BILANGAN DOMINASI PERSEKITARAN PADA GRAF LENGKAP DAN GRAF BIPARTIT LENGKAP

Lucia Ratnasari[1], Bayu Surarso[2], Harjito[3], Uun Maunah[4]
[1,2,3]Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
[4]Program Studi S1 Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Abstract. Given graph G with set of vertex V and set of edge E. Set D subset of V is called domination set if every point in $V - D$ is adjacent with at least one point in D in graph G. The minimum cardinality of all set of domination graph G is called domination number. Let S be a subset of V, set S is called a neighborhood set if $G = \bigcup_{v \in s} \langle N(v) \rangle$ with $\langle N(v) \rangle$ induced subgraph G of $N(v)$. The minimum cardinality of all the neighborhood set of graph G is called the neighborhood number. There are several types of neighborhood domination number depending on the parameters. In this paper we examine the transversal neighborhood domination number and global neighborhood domination number in complete graph and complete bipartite graph.

Keywords: neighborhood domination number, transversal neighborhood domination number, global neighborhood domination number global.

1. PENDAHULUAN

Salah satu topik dari teori graf adalah himpunan dominasi. Secara historis, masalah dominasi mulai dipelajari dari tahun 1950 oleh Hedetniemi dan Laskar, kemudian Haynes dkk menuliskan dalam bukunya lebih dari 75 jenis dominasi dan topik-topik lanjutan dalam dominasi yang telah didefinisikan dan diselidiki oleh beberapa penulis [1]. Himpunan dominasi dari sebuah graf $G = (V, E)$ merupakan himpunan S subset dari V dimana setiap titik di $V - S$ bertetangga setidaknya dengan satu titik di S, sedangkan bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi dari suatu graf G.

Berbagai jenis parameter dari dominasi telah didefinisikan dan dipelajari oleh beberapa penulis. Untuk suatu himpunan dominasi S dari graf G juga ingin diketahui bagaimana perilaku dari himpunan persekitaran *S*. Beberapa kajian dengan parameter dominasi persekitaran diantaranya adalah dominasi persekitaran total, dominasi persekitaran terhubung, dominasi persekitaran terhubung *equitable*, dominasi persekitaran *global* dan dominasi persekitaran *transversal*. Pada tulisan ini dikaji bilangan dominasi persekitaran *transversal* dan bilangan dominasi persekitaran *global* pada graf lengkap dan graf bipartit lengkap dan selanjutnya dibandingkan bilangan dominasi dengan parameter-parameter tersebut. Istilah-istilah dan notasi yang tidak didefinisikan dalam tulisan ini diambil dari referensi [2] dan [3].

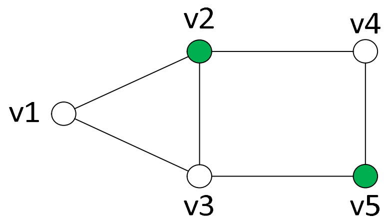
2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Bilangan Dominasi Persekitaran Transversal

Sebelum membahas bilangan dominasi persekitaran *transversal* terlebih dahulu dijelaskan pengertian himpunan persekitaran dan himpunan persekitaran minimum.

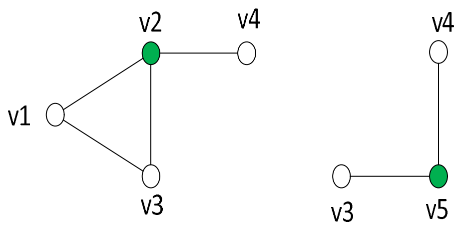
Definisi 2.1 [4] *Himpunan $S \subseteq V$ pada graf $G = (V, E)$ disebut himpunan persekitaran jika $G = \bigcup_{v \in s} \langle N(v) \rangle$, dengan $\langle N(v) \rangle$ subgraf induksi G dari $N(v)$. Himpunan persekitaran S disebut himpunan persekitaran minimum jika himpunan tersebut mempunyai kardinalitas minimum dari semua himpunan persekitaran S pada graf G. Kardinalitas* *minimum dari semua himpunan persekitaran disebut bilangan persekitaran dari G dan dinotasikan sebagai* $\eta(G)$.

Contoh 2.2 Diberikan Graf G_1 dengan himpunan titik $V = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}\}$ dan $E = \{\boldsymbol{v_1v_2}, \boldsymbol{v_1v_3}, \boldsymbol{v_2v_3}, \boldsymbol{v_2v_4}, \boldsymbol{v_3v_5}, \boldsymbol{v_4v_5}\}$. Misal diambil $\boldsymbol{S_1} = \{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_5}\}$



Gambar 2.1 Graf G_1 dengan himpunan $S_1 = \{v_2, v_5\}$

Pada Gambar 2.1 terlihat bahwa $S_1 = \{v_2, v_5\}$ merupakan himpunan persekitaran dari G_1 karena $G = \bigcup_{v\in S}\langle N(v)\rangle = \langle N(v_2)\rangle \cup \langle N(v_5)\rangle$.



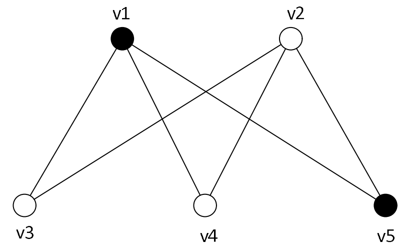
(a) **(b)**

Gambar 2.2 Subgraf *Induksi* G_1 dari (a) $N(v_2)$ dan (b) $N(v_5)$

Oleh karena tidak ada himpunan persekitaran yang mempunyai kardinalitas kurang dari 2 maka kardinalitas minimum dari setiap himpunan persekitaran di graf G_1 adalah dua sehingga bilangan persekitaran dari graf G_1 adalah dua atau $\eta(G_1) = 2$.

Definisi 2.3 [4] *Himpunan dominasi* $D \subseteq V$ *dari sebuah graf G disebut himpunan dominasi persekitaran transversal jika himpunan tersebut beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran transversal disebut bilangan dominasi persekitaran transversal dan dinotasikan dengan* $\gamma_{nt}(G)$. *Suatu himpunan dominasi persekitaran transversal D dari G dengan* $|D| = \gamma_{nt}(G)$ *disebut himpunan* γ_{nt}.

Contoh 2.4 Diberikan gambar graf seperti berikut :



Gambar 2.3 Graf $K_{2,3}$dengan himpunan dominasi $D = \{v_1, v_5\}$

Jika $G = (V_1, V_2, E)$ adalah graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ maka hanya terdapat satu himpunan persekitaran minimum S pada graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ tersebut yaitu $S_1 = \{v_1, v_2\}$. Misal akan dibentuk himpunan dominasi $D = \{v_1, v_5\}$ dengan dua titik dimana satu titiknya diambil dari $V_1 = \{v_1, v_2\}$ dan satu titik lainnya diambil dari $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ maka $D \cap S = \{v_1, v_5\} \cap \{v_1, v_2\} = \{v_1\}$. Karena himpunan dominasi D dan himpunan persekitaran minimum S beririsan maka himpunan dominasi D merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal*. Oleh karena himpunan dominasi persekitaran *transversal* D merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ maka terbukti jika bilangan dominasi persekitaran *transversal* graf G adalah 2.

Teorema 2.5 [4] *Untuk setiap graf bipartit lengkap* $K_{m,n}$ *berlaku ;*

$$\gamma_{nt}(G) = \begin{cases} 2, & jika\ m\ dan\ n \neq 1; \\ 1, & jika\ m\ atau\ n = 1. \end{cases}$$

Bukti :

Misal $G = (V_1, V_2, E)$ adalah sebuah graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ maka terdapat tiga kasus yaitu :

Kasus I : $m < n$ atau $m, n \neq 1$

Diketahui graf G adalah graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ untuk $m < n$ atau $m, n \neq 1$ dengan $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$. Karena $m < n$ maka m merupakan himpunan persekitaran minimum dari graf bipartit lengkap $K_{m,n}$. Kemudian setiap himpunan dominasi D dengan dua titik dimana satu titik berasal dari m dan satu titik lainnya berasal dari n akan mendominasi semua titik pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dan juga beririsan dengan m sebagai himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$. Oleh karena himpunan dominasi D beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ maka $\gamma_{nt}(G) = 2$.

Kasus II : $m = n$

Diketahui graf G adalah bipartit lengkap $K_{m,n}$ untuk $m = n$ dimana $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$. Karena $m = n$ maka terdapat dua himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ yaitu m dan n. Kemudian setiap himpunan dominasi dengan dua titik dimana satu titik berasal dari m dan satu titik lainnya berasal dari n atau sebaliknya akan mendominasi semua titik pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dan juga beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$. Oleh karena himpunan dominasi D beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ maka $\gamma_{nt}(G) = 2$.

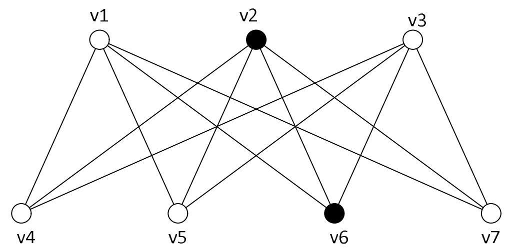
Kasus III : m atau $n = 1$

Diketahui graf G adalah graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dimana $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$. Karena m atau $n = 1$ maka terdapat satu himpunan persekitaran minimum graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ yaitu m atau $n = 1$ yang mempunyai anggota himpunan titik berjumlah satu. Kemudian titik tersebut juga yang akan menjadi himpunan dominasi dan juga beririsan dengan himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$. Oleh karena himpunan dominasi D beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ maka $\gamma_{nt}(G) = 1$. ■

Contoh 2.6

Kasus I :

Diberikan gambar graf bipartit lengkap seperti berikut :

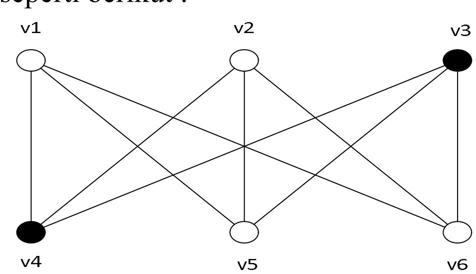


Gambar 2.4 Graf bipartit lengkap $K_{3,4}$ dengan himpunan dominasi $D = \{v_2, v_6\}$

Pada Gambar 2.4 merupakan graf bipartit lengkap $K_{3,4}$ dengan $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $V_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Karena $|V_1| < |V_2|$ maka $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ merupakan himpunan persekitaran S pada graf bipartit $K_{3,4}$. Misal himpunan dominasi $D = \{v_2, v_6\}$ maka $D \cap S = \{v_2, v_6\} \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_2\}$. Karena himpunan dominasi D beririsan dengan himpunan persekitaran S maka Himpunan dominasi D merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal*. Oleh karena himpunan dominasi persekitaran *transversal* merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf bipartit lengkap $K_{3,4}$ maka terbukti jika $\gamma_{nt}(K_{3,4}) = 2$.

Kasus II :

Diberikan gambar graf bipartit lengkap seperti berikut :

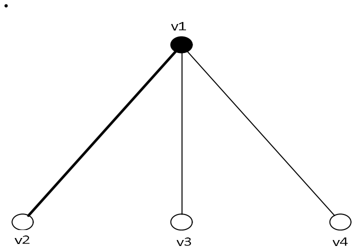


Gambar 2.5 Graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ dengan himpunan dominasi $D = \{v_3, v_4\}$

Pada Gambar 2.5 merupakan graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ dengan $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$. Karena $|V_1| = |V_2|$ maka terdapat dua himpunan persekitaran minimum S pada graf bipartit lengkap $K_{3,3}$yaitu $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $S_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$. Misal himpunan dominasi $D = \{v_3, v_4\}$ maka $D \cap S_1 = \{v_3, v_4\} \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_3\}$ dan $D \cap S_2 = \{v_3, v_4\} \cap \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_4\}$. Karena himpunan dominasi D beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum S pada graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ maka Himpunan dominasi D merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal*. Oleh karena himpunan dominasi persekitaran *transversal* D merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ maka terbukti jika $\gamma_{nt}(K_{3,3}) = 2$.

Kasus III :

Diberikan gambar graf bipartit seperti berikut :



Gambar 2.6 Graf bipartit lengkap $K_{1,3}$ dengan himpunan dominasi $D = \{v_1\}$

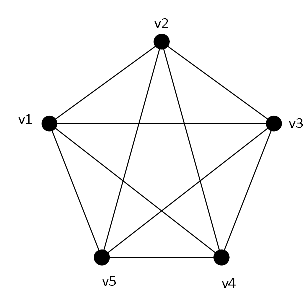
Pada Gambar 2.6 merupakan graf bipartit lengkap $K_{1,3}$ dengan $|V_1| = \{v_1\}$ dan $|V_2| = \{v_2, v_3, v_4\}$. Karena $|V_1| < |V_2|$ maka $V_1 = \{v_1\}$ merupakan himpunan persekitaran S pada graf bipartit lengkap $K_{1,3}$. Karena $V_1 = \{v_1\}$ mendominasi semua titik pada graf bipartit lengkap $K_{1,3}$ maka himpunan dominasi D dengan kardinalitas minimum pada graf bipartit lengkap $K_{1,3}$ adalah $V_1 = \{v_1\}$. Karena himpunan dominasi D juga merupakan himpunan persekitaran minimum S pada graf bipartit lengkap $K_{1,3}$ yang mana himpunan tersebut pastilah saling beririsan maka himpunan dominasi D merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal* . Oleh karena itu himpunan dominasi persekitaran *transversal* D merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf bipartit lengkap $K_{1,3}$ maka terbukti jika $\gamma_{nt}(K_{1,3}) = 1$.

Teorema 2.7 [4] *Untuk setiap graf lengkap K_n dengan order n maka $\gamma_{nt}(K_n) = n$*

Bukti :

Misal K_n adalah sebuah graf lengkap K_n dengan order n. Oleh karena setiap titik pada graf lengkap merupakan himpunan persekitaran minimum dan juga setiap titik pada graf lengkap dapat mendominasi semua titik pada graf lengkap K_n maka himpunan dominasi persekitaran *transversal*-nya adalah semua titik pada graf lengkap K_n. Jadi terbukti $\gamma_{nt}(K_n) = n$. ∎

Contoh 2.8 Diberikan gambar graf seperti berikut :



Gambar 2.7 Graf K_5 dengan himpunan dominasi $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

Pada Gambar 2.7 terlihat graf roda K_n dengan order 5. Karena setiap titik merupakan himpunan persekitaran minimum $S_1 = \{v_1\}$, $S_2 = \{v_2\}, S_3 = \{v_3\}, S_4 = \{v_4\}, S_5 = \{v_5\}$ maka himpunan dominasinya haruslah beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum graf K_5. Misal $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ maka :

$D \cap S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_1\} = \{v_1\}$
$D \cap S_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_2\} = \{v_2\}$
$D \cap S_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_3\} = \{v_3\}$

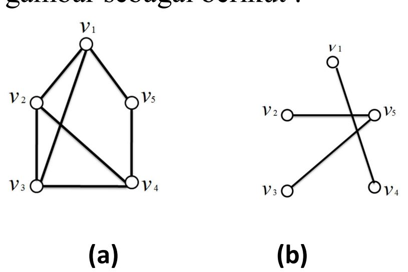
$D \cap S_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_4\} = \{v_4\}$
$D \cap S_5 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_5\} = \{v_5\}$
Karena himpunan dominasi D beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf K_5 maka D merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal* pada graf K_5. Oleh karena himpunan dominasi persekitaran *transversal* D merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf maka terbukti $\gamma_{nt}(K_5) = 5$.

2.2 Bilangan Dominasi Persekitaran Global

Sebelum dibahas himpunan dominasi persekitaran global, terlebih dahulu dibahas mengenai himpunan dominasi global, himpunan dominasi terkendali, himpunan dominasi terhubung dan himpunan dominasi independen .

Definisi 2.9 [5] *Suatu himpunan dominasi D disebut himpunan dominasi global, jika himpunan D merupakan himpunan dominasi pada graf G dan graf komplemen (G^c). Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi gobal disebut bilangan dominasi global dari G, dan dinotasikan sebagai γ_g(G).*

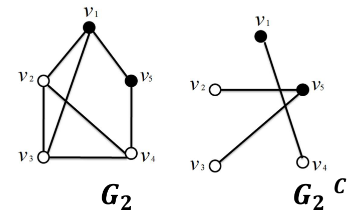
Contoh 2.10 Diberikan graf G_2 dengan gambar sebagai berikut :



Gambar 2.8 (a) Graf G_2 dan (b) graf $G_2{}^C$

Graf G_2 mempunyai $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G_2) = \{v_1v_2,\ v_1v_5,\ v_1v_3,\ v_2v_3,\ v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$, maka didapat graf $G_2{}^C$ dengan $V(G_2{}^C) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G_2{}^C) = \{v_1v_4,\ v_2v_5,\ v_5v_3\}$.

Misalkan $D_2 = \{v_1, v_5\}$, maka $V(G_2) - D_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$. Karena setiap titik di $V - D_2$ bertetangga dengan minimal satu titik di D_2 maka D_2 merupakan himpunan dominasi pada graf G_9. Graf $G_9{}^c$ dengan $V(G_2{}^C) - D_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$. Karena setiap titik di $V(G_2{}^C) - D_2$ bertetangga dengan minimal satu titik di D_2, maka D_2 merupakan himpunan dominasi pada graf $G_2{}^c$. Jadi D_2 merupakan himpunan dominasi global.



Gambar 2.9 Graf G_2 dan $G_2{}^C$ dengan Himpunan Dominasi $D_2 = \{v_1, v_5\}$

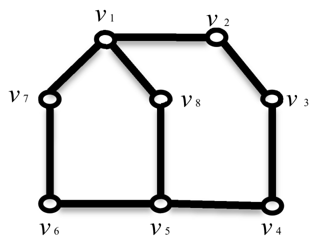
Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi global di graf G_2 adalah 2, maka $\gamma_g(G_2)$ = 2.

Definisi 2.11 [5] *Suatu himpunan dominasi D disebut himpunan dominasi terkendali jika setiap titik v di $V - D$ bertetangga dengan titik di D serta titik u di $V - D$ dengan $u \neq v$. Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi terkendali disebut bilangan dominasi terkendali dari G, dan dinotasikan sebagai γ_r(G).*

Definisi 2.12 [6] *Suatu himpunan D subset dari $V(G)$ disebut himpunan dominasi terhubung jika D himpunan dominasi dan subgraph induksi $< D >$ juga terhubung. Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi terhubung disebut bilangan dominasi terhubung dari G, dan dinotasikan sebagai γ_c(G).*

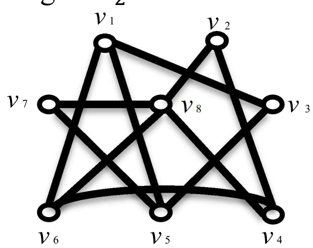
Definisi 2.13 [6] *Misalkan G graf terhubung. Graf persekitaran G yang dinotasikan sebagai G^N adalah graf G^N dimana $V(G^N) = V(G)$ dan $E(G^N)$ = $\{uv | u, v \in V(G),$ terdapat $w \in V(G)$ sehingga $uw, vw \in E(G)\}$.*

Contoh 2.14 Diberikan graf G_2 dengan gambar sebagai berikut :



Gambar 2.10 Graf G_2

Ditentukan graf ${G_2}^N$



Gambar 2.11 Graf ${G_2}^N$

Pada Gambar 2.11 terlihat bahwa gambar tersebut merupakan gambar graf persekitaran G_2, dimana $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1, v_1v_8, v_8v_5 \in E(G_2)$ sehingga $v_1v_3, v_3v_5, v_5v_7, v_7v_8, v_8v_6, v_6v_1, v_1v_5, v_8v_2, v_2v_4, v_4v_6 \in E({G_2}^N)$.

Teorema 2.15 *Jika $K_{m,n}$ adalah graf bipartit lengkap dengan $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ dan $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, maka ${K_{m,n}}^N = K_m \cup K_n$.*

Bukti :

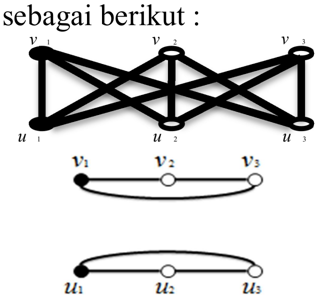
$K_{m,n}$ merupakan graf bipartit lengkap dengan $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$dan $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Karena $K_{m,n}$ adalah graf bipartit lengkap, maka untuk setiap titik di V_1 *bertetangga* dengan titik di V_2 dan setiap titik di V_2 bertetangga dengan titik di V_1. Graf persekitaran $K_{m,n}$, setiap $v_i, v_j \in V_1$ terdapat $u_k \in V_2$, sehingga $E(K_{m,n}) = \{v_iu_k, v_ju_k\}$, maka untuk $v_iu_k, v_ju_k \in E(K_{m,n})$ terdapat $w \in V(K_{m,n})$ sedemikian sehingga $v_iv_j, u_kw \in E({K_{m,n}}^N)$. Jadi setiap titik di V_1 bertetangga dengan titik di V_1 yang lain dan setiap titik di V_2 bertetangga dengan titik di V_2 yang lain, sedemikian sehingga $E({K_{m,n}}^N) = \{v_iv_j\} \cup \{u_kw\} = K_m \cup K_n$.■

Teorema 2.15 [6] *Jika $K_{m,n}$ adalah graf bipartit lengkap dengan $V_1 = \{v_i, v_j, \dots, v_m\}$ dan $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, maka $\gamma_{gn}(K_{m,n}) = 2$ untuk $m + n \geq 3$.*

Bukti :

Graf $K_{m,n}$ merupakan graf bipatit lengkap, maka $V(K_{m,n})$ dapat dipartisi menjadi 2 himpunan V_1 dan himpunan V_2 dengan $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ dan $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Karena graf $K_{m,n}$ adalah graf bipatit lengkap maka setiap titik di V_1 bertetangga dengan setiap titik di V_2 dan setiap titik di V_2 bertetangga dengan setiap titik di V_1. Diambil sebarang $D = \{v_i, u_j\}$ dimana titik v_i di V_1 dan titik u_j di V_2. Setiap titik v_k bertetangga dengan titik u_j dan setiap titik u_l bertetangga dengan titik v_i pada graf $K_{m,n}$, maka $D = \{v_i, u_j\}$ merupakan himpunan dominasi untuk graf $K_{m,n}$, sehingga diperoleh $\gamma(K_{m,n}) = |D| = 2$. Pada graf persekitaran $K_{m,n}$ setiap titik di V_1 selain titik v_i bertetangga dengan titik v_i dan setiap titik di V_2 selain titik u_j bertetangga dengan titik u_j, maka $D = \{v_i, u_j\}$ merupakan himpunan dominasi untuk graf ${K_{m,n}}^N$, sehingga $\gamma({K_{m,n}}^N) = |D| = 2$. Jadi $D = \{v_i, u_j\}$ merupakan himpunan dominasi persekitaran global pada graf $K_{m,n}$, maka didapat $\gamma_{gn}(K_{m,n}) = |D| = 2$. ■

Contoh 2.16 Diberikan graf $K_{3,3}$ dengan gambar sebagai berikut :



Gambar 2.12 Graf $K_{3,3}$ dan ${K_{3,3}}^N$ dengan himpunan dominasi $D = \{v_1, u_1\}$

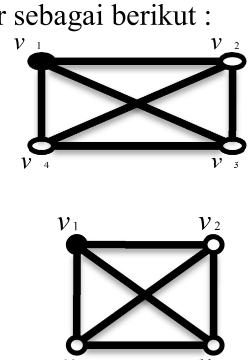
Pada Gambar 2.12 terlihat bahwa $D = \{v_1, u_1\}$ merupakan himpunan dominasi pada graf $K_{3,3}$ dan ${K_{3,3}}^N$, sehingga $D = \{v_1, u_1\}$ merupakan himpunan dominasi persekitaran global untuk graf $K_{3,3}$. Jadi kardinalitas minimum dari suatu himpunan dominasi persekitaran global dari graf $K_{3,3}$ adalah 2, sehingga $\gamma_{gn}(K_{3,3}) = |D| = 2$.

Teorema 2.17 [6] *Jika K_n adalah graf lengkap dengan n titik, maka* $\gamma_{gn}(K_n) = 1 \; untuk \; n \geq 3$.

Bukti :

Graf K_n merupakan graf lengkap, dengan n titik. Karena setiap titik pada graf K_n bertetangga ke semua titik yang lain. Diambil sebarang $D = \{v_i\}$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, karena setiap titik di $V(K_n) - D$ bertetangga dengan v_i itu sendiri, maka D merupakan himpunan dominasi untuk graf K_n, sehingga diperoleh $\gamma(K_n) = 1$. Graf persekitaran K_n adalah graf K_n itu sendiri, maka $D = \{v_i\}$ merupakan himpunan dominasi untuk graf ${K_n}^N$, sehingga diperoleh $\gamma_{gn}(K_n) = |D| = 1$. ■

Contoh 2.19 Diberikan graf K_4 dengan gambar sebagai berikut :



Gambar 2.13 Graf K_4 dan ${K_4}^N$ dengan himpunan dominasi $D = \{v_1\}$

Pada Gambar 2.13 terlihat bahwa $D = \{v_1\}$ merupakan himpunan dominasi pada graf K_4 dan ${K_4}^N$. Jadi $D = \{v_1\}$ merupakan himpunan dominasi persekitaran global untuk graf K_4. Kardinalitas minimum dari suatu himpunan dominasi persekitaran global dari graf K_4 adalah 1, sehingga $\gamma_{gn}(K_4) = |D| = 1$.

3. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai himpunan serta bilangan dominasi persekitaran *transversal* dan bilangan dominasi persekitara *global* pada graf lengkap K_n dan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dapat diambil kesimpulan bahwa :

1. Jika G graf lengkap K_n dengan order n maka bilangan dominasi persekitaran *transversal*-nya n sedangkan bilangan dominasi persekitaran *global*-nya 1 untuk $n \geq 3$.
2. Jika G graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ untuk $m, n \neq 1$ dan $m + n \geq 3$ maka bilangan dominasi persekitaran *transversal dan* bilangan dominasi persekitara *global*nya 2

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] S. Sivakumar, N. D. Soner, A. Alwardi, (2012), *Connected Equitable Domination in Graphs,* 1: 123-130.

[2] Wilson, J. R. dan J. J. Watkins, (1990), *Graphs: An Introductory Approach*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.

[3] F. Harary, (1969), Graph Theory, Addison-wesley, Reading Mass.

[4] M.P. Sumathi, (2014), *On neighbourhood Transversal Domination in Graphs,* Int. J. Contemp. Math Sciences, 9(5) : 243-252.

[5] I.H. Naga Raja Rao, S. V. Siva Rama Raju, (2014), *Global Neigborhood Domination*, Proyecciones Journal of Mathematics, 33 : 25-41.

[6] C. Sivagnanan, (2012), *Neighborhood Connected Domination Number of Total Graphs*, Gen. Math. Notes, 25(1): 27-32.