SOLUSI PERSAMAAN DIOPHANTINE DENGAN IDENTITAS BILANGAN FIBONACCI DAN BILANGAN LUCAS

Ayu Puspitasari[1], YD Sumanto[2], Widowati[3]
[1]Program Studi S1 Matematika, Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
[2,3]Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang
ayupuspita40@gmail.com[1], ydsumanto@gmail.com[2], widowati_math@undip.ac.id[3]

Abstract. In this paper we propose diophantine equations with the form $x^2 - xy - y^2 = -1$ and $x^2 - xy - y^2 = 1$. These equations has integer solutions which can form Fibonacci numbers and Lucas numbers. Integer solutions of the Diophantine equations in the form of Fibonacci number and Lucas number are determined by using recursive formula, Binet's Formula, and the most important is identity of Fibonacci numbers and Lucas numbers.
Keywords : Diophantine equations, Fibonacci numbers, Lucas numbers, identity of Fibonacci numbers and Lucas numbers.

.

1. PENDAHULUAN

Barisan Fibonacci pertama kali diperkenalkan oleh Leonardo Fibonacci pada tahun 1202 dengan mengemukakan masalah mengenai populasi kelinci. Barisan Fibonacci selanjutnya dikembangkan oleh Edouard Anatole Lucas yang memperkenalkan barisan Lucas.

Sebelumnya telah dibahas barisan Fibonacci [1, 2] dan sifat-sifat barisan Lucas [3] yang lebih dikenal dengan kesamaan atau identitas. Melihat kurangnya pembahasan mengenai penerapan identitas bilangan fibonacci dan bilangan Lucas dalam ilmu matematika maka penulis mengfokuskan pada penerapan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas pada solusi persamaan Diophantine.

Persamaan Diophantine [4] merupakan persamaan yang hanya mempunyai solusi bilangan bulat. Telah dibahas sebelumnya solusi dari persamaan Diophantine dengan dua variabel dalam bentuk bilangan Fibonacci atau bilangan Lucas [5] dan juga solusi dari persamaan Diophantine Linear dalam bentuk bilangan Fibonacci atau bilangan Lucas [6]. Selanjutnya, dibahas solusi persamaan Diophantine $x^2 - xy - y^2 = -1$ dan $x^2 - xy - y^2 = 1$ dengan menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bilangan Fibonacci F_n didefinisikan secara rekursif dengan $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. Bilangan Lucas L_n didefinisikan [5] secara rekursif dengan $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ dan $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$.

Formula Binet bilangan Fibonacci dinyatakan sebagai $F_n = \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)}$, $n \geq 0$ sedangkan bilangan Lucas [7] dinyatakan sebagai $L_n = (\alpha^n + \beta^n)$, $n \geq 0$ dengan $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ merupakan penyelesaian dari persamaan $x^2 - x - 1 = 0$.

Berikut merupakan kesamaan (identitas) [8, 9, 10] dari bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas dengan F_n dan F_m bilangan Fibonacci serta L_n dan L_m bilangan Lucas, $m \in \mathbb{Z}$:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n,\ n \geq 1 \qquad (2.1)$$
$$L_{-n} = (-1)^n L_n,\ n \geq 1 \qquad (2.2)$$
$$F_n^2 - F_n F_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n+1} \qquad (2.3)$$
$$F_{m+1} F_n + F_m F_{n-1} = F_{m+n} \qquad (2.4)$$
$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n \qquad (2.5)$$
$$L_n^2 - 5F_n^2 = (-1)^n 4. \qquad (2.6)$$

Selanjutnya penulis mengemukakan hasil berupa identitas baru yang diberikan pada Teorema 2.1 dan Akibat 2.2 untuk menurunkan solusi persamaan $x^2 - xy - y^2 = -1$ dan $x^2 - xy - y^2 = 1$ dalam bentuk Bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

Teorema 2.1 *Bilangan y dan $m_1 = \sqrt{5y^2 - 4}$, keduanya bilangan bulat atau y dan $m_2 = \sqrt{5y^2 + 4}$, keduanya bilangan bulat jika dan hanya jika y bilangan Fibonacci F_n dan m_1 atau m_2 bilangan Lucas L_n*

Bukti :

⇒ Misalkan y dan $m_1 = \sqrt{5y^2 - 4}$, keduanya bilangan bulat atau y dan $m_2 = \sqrt{5y^2 + 4}$, keduanya bilangan bulat**.** Bilangan y dan m_1 atau y dan m_2 yang terbentuk agar terbentuk bilangan bulat adalah:

y:	0	1	1	2	3	5	...	y	…
$m_{1.2}$:	2	1	3	4	7	11	...	$\sqrt{5y^2 - 4}$	…

Bilangan y selanjutnya yang terbentuk dari pola di atas adalah $\frac{y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$ dan m yang selanjutnya terbentuk adalah:

$$\sqrt{5\left(\frac{y+\sqrt{5y^2-4}}{2}\right)^2 + 4} = \sqrt{5\left(\frac{6y^2+2y\sqrt{5y^2-4}-4}{4}\right) + 4}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5y + \sqrt{5y^2 - 4}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5y+\sqrt{5y^2-4}}{2}. \quad (2.7)$$

Selanjutnya dibuktikan $\frac{y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$ dan $\frac{5y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$ adalah bilangan bulat. Untuk y bilangan genap, misalkan $y = 2k$, maka

$\sqrt{5y^2 - 4} = \sqrt{5(2k)^2 - 4} = 2\sqrt{5k^2 - 1}$

Bilangan $\frac{y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$ dan $\frac{5y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$ merupakan bilangan bulat karena $2\sqrt{5k^2 - 1}$ bilangan genap. Untuk y bilangan ganjil, misalkan $y = 2k - 1$, maka

$$\sqrt{5y^2 - 4} = \sqrt{5(2k - 1)^2 - 4} = \sqrt{2(10k^2 - 10k) + 1} \quad (2.8)$$

Bilangan $\frac{y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$ dan $\frac{5y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$ merupakan bilangan bulat karena $\sqrt{2(10k^2 - 10k) + 1}$ bilangan ganjil.

Menggunakan cara yang sama, y dan m yang terbentuk selanjutnya yaitu:

y:	0	1	1	2	...	y	
$m_{1.2}$:	2	1	3	4	...		
$\sqrt{5y^2 - 4}$						$\frac{5y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$	$\frac{5y+3\sqrt{5y^2-4}}{2}$

Selanjutnya dibuktikan y bilangan Fibonacci F_n dan m bilangan Lucas L_n.

Misalkan $U_n = \frac{3y+\sqrt{5y^2-4}}{2}$ dan $V_n = \frac{5y+3\sqrt{5y^2-4}}{2}$, maka:

$$U_n = \frac{3y+\sqrt{5y^2-4}}{2} = \frac{y+\sqrt{5y^2-4}}{2} + y = U_{n-1} + U_{n-2} \quad (2.9)$$

dengan $U_0 = 0$, $U_1 = U_2 = 1$, dan

$$V_n = \frac{5y+3\sqrt{5y^2-4}}{2} = \frac{5y+\sqrt{5y^2-4}}{2} + \sqrt{5y^2 - 4} = V_{n-1} + V_{n-2} \quad (2.10)$$

dengan $V_0 = 2$, $V_1 = 1$

Jadi, didapatkan rumus rekursif untuk U_n dan V_n:

$$U_0 = 0$$
$$V_0 = 2$$
$$U_1 = U_2 = 1$$
$$V_1 = 1$$
$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$
$$V_n = V_{n-1} + V_{n-2} \quad (2.11)$$

Mengingat definisi rekursif bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas maka U_n merupakan bilangan Fibonacci F_n dan V_n merupakan bilangan Lucas L_n. Jadi, y bilangan Fibonacci F_n dan m_1 atau m_2 bilangan Lucas L_n.

⇐ Misalkan y bilangan Fibonacci F_n dan m_1 atau m_2 bilangan Lucas L_n maka berikut dibuktikan y dan $m_1 = \sqrt{5y^2 - 4}$ atau $m_2 = \sqrt{5y^2 + 4}$ bilangan bulat.

Jika y bilangan Fibonacci F_n maka

$y = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ merupakan bilangan bulat, dan

$m_1 = \sqrt{5y^2 - 4} = \sqrt{5F_n^2 - 4}$ atau $m_2 = \sqrt{5y^2 + 4} = \sqrt{5F_n^2 + 4}$

Dapat ditunjukkan bahwa $m_{1.2} = \sqrt{5F_n^2 + (-1)^n 4} = \sqrt{L_n^2} = L_n$ dengan bilangan Lucas $L_n = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...$ merupakan bilangan bulat. Sehingga terbukti bahwa bilangan y dan $m_1 = \sqrt{5y^2 - 4}$, keduanya bilangan bulat atau y dan $m_2 = \sqrt{5y^2 + 4}$, keduanya bilangan bulat jika dan hanya jika y bilangan Fibonacci F_n dan m_1 atau m_2 bilangan Lucas L_n. ■

Selanjutnya diberikan hasil seperti pada Akibat 2.2 berikut.

Akibat 2.2 *Jika y dam m bilangan bulat, maka:*

(1) Solusi bilangan bulat dari $m = \sqrt{5y^2 - 4}$ adalah $(y, m) = (F_n, L_n)$ atau $(y, m) = (-F_n, L_n)$ untuk n bilangan ganjil.

(2) Solusi bilangan bulat dari $m = \sqrt{5y^2 + 4}$ adalah $(y, m) = (F_n, L_n)$ atau $(y, m) = (-F_n, L_n)$ untuk n bilangan genap.

Bukti:

Menurut Teorema 2.1, y adalah bilangan Fibonacci F_n. Kesamaan (2.4) menjelaskan $L_n^2 - 5F_n^2 = (-1)^n 4 \Leftrightarrow L_n^2 = 5F_n^2 + (-1)^n 4$

Jika n bilangan ganjil, $n = 2k + 1$ maka $L_{2k+1}^2 = 5F_{2k+1}^2 + (-1)^{2k+1} 4 = 5F_{2k+1}^2 - 4$ atau $L_n^2 = 5F_n^2 - 4$ dengan n bilangan ganjil.

Jika n bilangan genap, $n = 2k$ maka $L_{2k}^2 = 5F_{2k}^2 + (-1)^{2k} 4 = 5F_{2k}^2 + 4$ dengan n bilangan genap.

(1) untuk $m = \sqrt{5y^2 - 4}$, diperoleh:

$$m = \sqrt{5y^2 - 4} = \sqrt{5F_n^2 - 4} = \sqrt{L_n^2} = L_n$$

atau

$$m = \sqrt{5y^2 - 4} = \sqrt{5(-F_n)^2 - 4} = \sqrt{5F_n^2 - 4} = \sqrt{L_n^2} = L_n$$

dengan n bilangan ganjil.

(2) untuk $m = \sqrt{5y^2 + 4}$, diperoleh:

$$m = \sqrt{5y^2 + 4} = \sqrt{5F_n^2 + 4} = \sqrt{L_n^2} = L_n$$

atau

$$m = \sqrt{5y^2 + 4} = \sqrt{5(-F_n)^2 + 4} = \sqrt{5F_n^2 + 4} = \sqrt{L_n^2} = L_n$$

dengan n bilangan genap. ■

Contoh 2.3 Buktikan bahwa $m = \sqrt{841}$ adalah bilangan bulat.

$$m = \sqrt{841} = \sqrt{845 - 4} = \sqrt{5.169 - 4} = \sqrt{5.13^2 - 4} = \sqrt{5.F_7^2 - 4}$$

Menggunakan kesamaan (2.6) diperoleh:

$$m = \sqrt{L_7^2} = L_7 = 29$$

Terbukti $m = 29$ adalah bilangan bulat

Teorema 2.4 [5] *Jika F_n bilangan Fibonacci maka solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = -1$ adalah $(x, y) = (F_n, F_{n-1})$ atau $(x, y) = (-F_n, -F_{n-1})$ untuk n bilangan genap.*

Bukti:

Misalkan $y = u$ adalah solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = -1$, maka:

$$x^2 - xy - y^2 = -1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - xu - u^2 = -1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - xu - u^2 + 1 = 0$$

Persamaan (2.12) merupakan persamaan kuadrat dengan solusi dari x adalah:

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4(-u^2 + 1)}}{2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4u^2 - 4}}{2} x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{5u^2 - 4}}{2}$$

Misalkan x bilangan bulat maka $\sqrt{5u^2 - 4}$ adalah bilangan bulat. Bilangan bulat yang memenuhi $\sqrt{5u^2 - 4}$ dari Akibat 2.2 adalah $u = F_{n-1}$ atau $u = -F_{n-1}$ dengan n bilangan genap. Ambil $u = F_{n-1}$ maka persamaan (2.13) menjadi:

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{5u^2 - 4}}{2} = \frac{F_{n-1} \pm \sqrt{5F_{n-1}^2 - 4}}{2}$$

Selanjutnya dapat diperoleh:

$$x_{1,2} = \frac{F_{n-1} \pm L_{n-1}}{2}$$

Ambil $x = \frac{F_{n-1} + L_{n-1}}{2}$, dari kesamaan (2.5) didapatkan:

$$x = \frac{F_{n-1} + F_{n-2} + F_n}{2} = \frac{F_n + F_n}{2} = \frac{2F_n}{2} = F_n$$

Diperoleh solusi bilangan bulat $(x,y)=(F_n,F_{n-1})$ dengan n bilangan genap, sehingga didapatkan:

$$x^2-xy-y^2=F_n^2-F_nF_{n-1}-F_{n-1}^2$$

Menggunakan kesamaan (2.3) dan mengingat n bilangan genap maka:

$$x^2-xy-y^2=F_n^2-F_nF_{n-1}-F_{n-1}^2=(-1)^{n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$$

Solusi lain dari persamaan $x^2-xy-y^2=-1$ adalah $(x,y)=(-F_n,-F_{n-1})$, dengan n bilangan genap. Untuk $(x,y)=(-F_n,-F_{n-1})$ diperoleh:

$$\begin{aligned}x^2-xy-y^2&=F_n^2-F_nF_{n-1}\\&-F_{n-1}^2=(-1)^{n+1}\\&=(-1)^{2n+1}=-1\end{aligned}$$

Jadi, solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2-xy-y^2=-1$ adalah $(x,y)=(F_n,F_{n-1})$ atau $(x,y)=(-F_n,-F_{n-1})$, dengan n bilangan genap. ■

Contoh 2.5 Diberikan persamaan $x^2-xy-y^2=-1$. Solusi bilangan bulat dari persamaan tersebut menurut Teorema 2.2 adalah $(x,y)=(F_n,F_{n-1})$ atau $(x,y)=(-F_n,-F_{n-1})$ dengan n bilangan genap. Misalkan $n=2$ maka solusinya menjadi $(x,y)=(F_2,F_{2-1})=(F_2,F_1)=(1,1)$ atau $(x,y)=(-F_2,-F_{2-1})=(-1,-1)$. Secara langsung dapat dihitung untuk $(x,y)=(1,1)$ didapatkan:

$$\begin{aligned}x^2-xy-y^2&=1^2-1.1-1^2\\&=1-1-1=-1\end{aligned}$$

Untuk $(x,y)=(-1,-1)$ didapatkan:

$$\begin{aligned}x^2-xy-y^2&\\&=(-1)^2-(-1)(-1)\\&-(-1)^2=1-1-1\\&=-1\end{aligned}$$

Jadi, $(x,y)=(1,1)$ atau $(x,y)=(-1,-1)$ merupakan solusi dari persamaan $x^2-xy-y^2=-1$

Teorema 2.6 **[5]** *Jika F_n bilangan Fibonacci, solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2-xy-y^2=1$ adalah $(x,y)=(F_n,F_{n-1})$ atau $(x,y)=(-F_n,-F_{n-1})$ dengan n bilangan ganjil.*

Bukti:

Misalkan $y=u$ adalah solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2-xy-y^2=1$, maka:

$$\begin{aligned}&x^2-xy-y^2=1\\&\Leftrightarrow x^2-xu-u^2=1\\&\Leftrightarrow x^2-xu-u^2-1=0\end{aligned}$$

Persamaan (2.14) merupakan persamaan kuadrat dengan solusi dari x adalah:

$$x_{1,2}=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4(-u^2-1)}}{2}=\frac{u\pm\sqrt{u^2+4u^2+4}}{2}x_{1,2}=\frac{u\pm\sqrt{5u^2+4}}{2}$$

Misalkan x bilangan bulat maka $\sqrt{5u^2+4}$ adalah bilangan bulat. Bilangan bulat yeng memenuhi $\sqrt{5u^2+4}$ dari Akibat 3.3.15 adalah $u=F_{n-1}$ dengan n bilangan ganjil. Ambil $u=F_{n-1}$, persamaan (2.15) menjadi:

$$x_{1,2}=\frac{u\pm\sqrt{5u^2+4}}{2}=\frac{F_{n-1}\pm\sqrt{5F_{n-1}^2+4}}{2}$$

Menggunakan kesamaan (2.6), diperoleh:

$$x_{1,2}=\frac{F_{n-1}\pm L_{n-1}}{2}$$

Ambil $x=\frac{F_{n-1}+L_{n-1}}{2}$, dari kesamaan (2.5) didapatkan:

$$x=\frac{F_{n-1}+F_{n-2}+F_n}{2}=\frac{F_n+F_n}{2}=\frac{2F_n}{2}=F_n$$

Diperoleh solusi bilangan bulat $(x,y)=(F_n,F_{n-1})$ dengan n bilangan ganjil, sehingga didapatkan:

$$x^2-xy-y^2=F_n^2-F_nF_{n-1}-F_{n-1}^2$$

Menggunakan kesamaan (2.3) diperoleh:

$$x^2-xy-y^2=F_n^2-F_nF_{n-1}-F_{n-1}^2=(-1)^{n+1}=(-1)^{2n-1+1}=1$$

Solusi lain dari persamaan $x^2-xy-y^2=-1$ adalah $(x,y)=(-F_n,-F_{n-1})$, dengan n bilangan ganjil. Untuk $(x,y)=(-F_n,-F_{n-1})$ diperoleh:

$$x^2-xy-y^2=F_n^2-F_nF_{n-1}-F_{n-1}^2=(-1)^{n+1}=(-1)^{2n-1+1}=1$$

Jadi, solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2-xy-y^2=1$ adalah $(x,y)=(F_n,F_{n-1})$ atau $(x,y)=(-F_n,-F_{n-1})$ dengan n bilangan ganjil ■

Contoh 2.7 Diberikan persamaan $x^2-xy-y^2=1$. Solusi bilangan bulat dari persamaan tersebut menurut Teorema 2.4 adalah $(x,y)=(F_n,F_{n-1})$ atau

$(x, y) = (-F_n, -F_{n-1})$ dengan n bilangan ganjil. Misalkan $n = -3$ maka solusinya menjadi $(x, y) = (F_{-3}, F_{-3-1}) = (F_{-3}, F_{-4}) = (2, -3)$ atau $(x, y) = (-F_{-3}, -F_{-3-1}) = (-2,3)$.
Secara langsung dapat dihitung untuk $(x, y) = (2, -3)$ didapatkan:

$$\begin{aligned} &x^2 - xy - y^2 \\ &= 2^2 - 2(-3) \\ &- (-3)^2 = 4 + 6 - 9 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Untuk $(x, y) = (-2, 3)$ didapatkan:

$$\begin{aligned} &x^2 - xy - y^2 \\ &= (-2)^2 - (-2)3 \\ &- 3^2 = 4 + 6 - 9 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, $(x, y) = (2, -3)$ atau $(x, y) = (-2, 3)$ merupakan solusi dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = 1$

3. PENUTUP

Menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas telah diperoleh solusi bilangan bulat dari persamaan Diophantine $x^2 - xy - y^2 = -1$ dan $x^2 - xy - y^2 = 1$. Solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = -1$ adalah $(x, y) = (F_n, F_{n-1})$ atau $(x, y) = (-F_n, -F_{n-1})$ dengan n bilangan genap sedangkan solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = 1$ adalah $(x, y) = (F_n, F_{n-1})$ atau $(x, y) = (-F_n, -F_{n-1})$ untuk n bilangan ganjil.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, Robert G. dan Donald R. Sherbert, (2010), *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition. Canada: John Wiley & Sons.

[2] Ana Rahmawati, (2013), *Barisan k-Fibonacci dan Sifat-Sifatnya,* Skripsi, Universitas Diponegoro, Semarang.

[3] Sitepu, Cunda Priyanti, (2013), *Barisan k-Lucas dan Sifat-Sifatnya,* Skripsi, Universitas Diponegoro, Semarang

[4] Andreescu, Titu, Dorin Andrica dan Ion Cucurezeanu, (2010), *An Introduction to Diophantine Equations,* New York: Birkhauser.

[5] Demirturk, Bahar dan Refik Keskin, (2009), Integer Solutions of Some Diophantine Equations via Fibonacci and Lucas Numbers, *Journal of Integer Sequences*, Vol 12, Artikel: 09.8.7.

[6] Batra, Sanjit Singh, Nikhil Kumar dan Amitabha Tripathi, (2015), On A Linear Diophantine Problem Involving The Fibonacci and Lucas Sequences, *Integers*, Vol 15, A26.

[7] Koshy, Thomas, (2007), *Elementary Number Theory with Applications, Second Edition,* USA: Academic Press.

[8] Hoggat, Verner E., (1969), *Fibonacci and Lucas Numbers,* Palo Alto, CA: Houghton Mifflin Company.

[9] Keskin, Refik, (2014), Three Identities Concerning Fibonacci and Lucas Numbers, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 20(5): 44-48.

[10] Rabinowitz, Stanley, (1996), Algorithmic Manipulaton of Fibonacci Identities, *Applications of Fibonacci Numbers*, 6 : 389 – 408.