SYARAT PERLU DAN CUKUP INTEGRAL HENSTOCK-BOCHNER DAN INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA [*a,b*]

Solikhin, Y.D. Sumanto, Susilo Hariyanto, Abdul Aziz
[1,2,3,4]Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof Soedarto, S.H. Tembalang-Semarang
solikhin@live.undip.ac.id[1]

Abstract. In this paper we study Henstock-Bochner and Henstock-Dunford integral on $[a,b]$. We discuss some properties of the integrable. For every function which Henstock-Bochner integrable then it is Hentsock-Dunford integrable. The contrary is not true. Further more, let for any $x^* \in X^*$ and collection $\left\{ x^* f \middle| x^* \in B\left(X^*\right) \right\}$ is Henstock-*equi-integrable*. We will show that function $f:[a,b] \to X$ is Henstock-Bochner integrable on $[a,b]$ if only if it is Henstock-Dunford integrable on $[a,b]$.

Keywords : Hentsock-Bochner integral, Henstock-*equi-integrable* and Henstock-Dunford integral

1. PENDAHULUAN

Integral Henstock didefinisikan atas partisi Perron δ-fine pada interval tertutup $[a,b]$. Integral Henstock merupakan generalisasi dari integral Riemann dan integral McShane [1,2].

Kajian integral Henstock dalam ruang dimensi satu R [2] telah digeneralisasi dalam ruang Euclide R^n [3]. Bahkan untuk fungsi bernilai real [1,2] digeneralisasi ke dalam fungsi bernilai Banach [4]. Integral Henstock untuk fungsi bernilai vektor atau Banach dikenal dengan integral Henstock-Bochner [5].

Kajian integral Henstock telah banyak dikombinasikan dengan integral lain seperti integral Henstock-Stieltjes [6], Henstock-Pettis, Henstock-Dunford untuk fungsi bernilai Banach [7].

Integral Henstock-Dunford merupakan hasil kombinasi integral Henstock dengan integral Dunford. Integral Dunford didefinisikan oleh fungsi terukur lemah pada ruang real R [8]. Diberikan X ruang Banach dan $X^* = \left\{ x^* \middle| x^* : X \to R \text{ linear kontinu} \right\}$ ruang dualnya (dual pertama) dengan $X^{**} = \left\{ x^{**} \middle| x^{**} : X^* \to R \text{ linear kontinu} \right\}$ dual kedua serta $[a,b] \subset R$. Fungsi terukur lemah $f:[a,b] \to X$ dikatakan terintegral Dunford pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f:[a,b] \to R$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan untuk setiap himpunan terukur $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f = (H)\int_a^b x^* f \chi_A .$$

Selanjutnya integral Dunford kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f:[a,b] \to R$ terintegral Henstock. Integral ini dinamakan integral Henstock-Dunford [7, 9].

Topik integral Henstock-Dunford menjadi kajian oleh penulis. Beberapa kajian tentang integral Henstock-Dunford antara lain perluasan Harnack dan sifat Cauchy integral Henstock-Dunford dalam ruang Euclide R^n [10], beberapa sifat Small Riemann Sums fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [11, 12, 13], kekonvergenan barisan fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [14], karakteristik fungsi primitive integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [15], serta posisi integral Henstock-Dunford dan integral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ [16].

Kajian posisi integral Henstock-Dunford dan integral Henstock-Bochner telah dihasilkan bahwa untuk setiap fungsi f yang terintegral Henstock-Bochner maka fungsi f tersebut terintegral Henstock-Dunford, akan tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Jika integral Henstock-Bochner diperlemah menjadi integral Henstock Lemah maka diperoleh bahwa integral Henstock-Dunford ekuivalen dengan integral Henstock Lemah [16]. Berdasarkan hasil ini, maka penulis akan mengkaji syarat apa yang harus ditambahkan supaya integral Henstock-Bochner ekuivalen dengan integral Henstock-Dunford.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut diberikan definisi integral Henstock-Bochner , integral Henstock-Bochner serentak, integral Henstock serentak, dan integral Henstock-Dunford dari suatu fungsi bernilai vektor.

Jika $A=[c,d]\subset[a,b]$ maka simbol $\alpha(A)$ dalam tulisan ini dimaksudkan sebagai $\alpha(A)=|d-c|$, panjang interval tertutup A.

Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya (dual pertama) dengan X^{**} dual kedua , serta interval tertutup $[a,b]\subset R$.

Definisi 2.1 [5] *Fungsi $f:[a,b]\to X$ dikatakan terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$, ditulis singkat $f\in HB[a,b]$, jika ada vektor $L\in X$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ pada $[a,b]$ berlaku*

$$\left\|L-\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D)\right\|_X<\varepsilon .$$

Jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ maka vektor L dalam Definisi 2.1 adalah tunggal dan ditulis

$$L=(HB)\int_a^b f .$$

Teorema Cauchy yang berlaku dalam integral Henstock fungsi bernilai real juga berlaku dalam integral Henstock-Bochner fungsi bernilai vektor.

Teorema 2.2 (Teorema Cauchy) *Fungsi $f\in HB[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{P}=\{(P,x)\}$ dan $\mathcal{Q}=\{(Q,x)\}$ partisi Perron $\delta-$fine pada $[a,b]$ berlaku*

$$\left\|\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right\|_X<\varepsilon .$$

Bukti: [17]. ■

Teorema 2.3 [17] *Jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ maka f terintegral Henstock-Bochner pada setiap interval tertutup $A\subset[a,b]$.*

Bukti:

Katakan $A=[c,d]\subset[a,b]$ interval tertutup di dalam $[a,b]$.

Karena $f\in HB[a,b]$ maka menurut Teorema Cauchy, untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{P}=\{(P,x)\}$ dan $\mathcal{Q}=\{(Q,x)\}$ partisi Perron *δ-fine* pada $[a,b]$ maka berlaku

$$\left\|\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right\|_X<\varepsilon .$$

Diambil $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ partisi Perron *δ-fine* pada $[c,d]$, $\mathcal{P}_1$ partisi Perron *δ-fine* pada $[a,c]$ dan $\mathcal{Q}_1$ partisi Perron *δ-fine* pada $[d,b]$.

Dibentuk

$$\mathcal{P}'=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{D}_1\cup\mathcal{Q}_1 \quad \text{dan}$$

$$\mathcal{Q}'=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\mathcal{Q}_1 .$$

Diperoleh $\mathcal{P}'$ dan $\mathcal{Q}'$ partisi Perron *δ-fine* pada $[a,b]$ sehingga

$$\left\|\mathcal{D}_1\sum f(x)\alpha(D_1)-\mathcal{D}_2\sum f(x)\alpha(D_2)\right\|_X$$

$$=\left\|\mathcal{P}'\sum f(x)\alpha(P')-\mathcal{Q}'\sum f(x)\alpha(Q')\right\|_X<\varepsilon .$$

Menurut Teorema Cauchy, terbukti $f\in HB[c,d]$ untuk setiap $[c,d]\subset[a,b]$. ■

Jika sebarang fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$, maka untuk setiap $x^* \in X^*$ komposisi fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Henstock.

Teorema 2.4 [16] *Jika $f \in HB[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$, fungsi $x^* f : [a,b] \to R$ terintegral Henstock pada $[a,b]$.*

Bukti:
Oleh karena $f : [a,b] \to X$ terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta > 0$ pada $[a,b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D) - (HB)\int_a^b f \right\|_X < \varepsilon.$$

Oleh karena itu untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^*(HB)\int_a^b f \right| \\ &\le \left\| x^* \right\|_X \left\| \mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D) - (HB)\int_a^b f \right\|_X \\ &\le \left\| x^* \right\|_X \varepsilon \end{aligned}$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ pada $[a,b]$.

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$, fungsi $x^* f \in H[a,b]$. ■

Definisi 2.5 [7] *Fungsi $f : [a,b] \to X$ dikatakan terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f : [a,b] \to R$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga*

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford pada A atas fungsi f dan ditulis

$$x^{**}_{(f,A)} = (HD)\int_A f .$$

Dapat ditunjukkan bahwa vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ adalah tunggal .

Jika f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, ditulis $f \in HD[a,b]$.

Teorema 2.6 [7] *Fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$.*

Bukti:
Jelas menurut Definisi 2.5. ■

Menurut Teorema 2.4 dan Teorema 2.6 diperoleh bahwa jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$, maka f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$.

Definisi 2.7 [8] *Koleksi $\mathcal{H} \subset \{ f \mid f : [a,b] \to X \}$ dikatakan terintegral Henstock-Bochner serentak (Henstock-Bochner equi-integrable) pada $[a,b]$ jika untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $f \in \mathcal{H}$ berlaku*

$$\left\| \mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D) - (HB)\int_a^b f \right\|_X < \varepsilon ,$$

dengan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$.

Jika diambil $X = R$ maka dikatakan terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$, yaitu koleksi $\mathcal{H} \subset \{ f \mid f : [a,b] \to R \}$ dikatakan terintegral Henstocr serentak (Henstock equi-integrable) pada $[a,b]$ jika untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $f \in \mathcal{H}$ berlaku

$$\left| \mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D) - (H)\int_a^b f \right| < \varepsilon ,$$

dengan $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ *sebarang partisi Perron δ-fine pada* $[a,b]$.

Teorema 2.8 [8] *Jika koleksi* $\mathcal{H}\subset\{f_k \mid f_k:[a,b]\to X, k\in N\}$ *terintegral Henstock-Bochner serentak pada* $[a,b]$ *dengan*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x), \forall\, x\in[a,b],$$

maka fungsi $f\in HB[a,b]$ *dan*

$$\lim_{k\to\infty}(HB)\int_a^b f_k=(HB)\int_a^b f.$$

Bukti:

Oleh karena diketahui bahwa $\mathcal{H}\subset\{f_k \mid f_k:[a,b]\to X, k\in N\}$ terintegral Henstock-Bochner serentak pada $[a,b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $f_k\in\mathcal{H}$, untuk setiap $k\in N$ berlaku

$$\left\|\mathcal{D}\sum f_k(x_i)\alpha(D_i)-(HB)\int_a^b f_k\right\|_X<\frac{\varepsilon}{4},$$

dengan $\mathcal{D}=\{(D_i,x_i) \mid i=1,2,...,n\}$ sebarang partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$.

Jika partisi Perron $\mathcal{D}=\{(D_i,x_i) \mid i=1,2,...,n\}$ diambil tetap maka f_k akan konvergen titik demi titik, yaitu

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n f_k(x_i)\alpha(D_i)=\sum_{i=1}^n f_k(x_i)\alpha(D_i).$$

Pilih $k_0\in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $k>k_0$ berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^n f_k(x_i)\alpha(D_i)-\sum_{i=1}^n f(x_i)\alpha(D_i)\right\|_X<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\left\|\sum_{i=1}^n f(x_i)\alpha(D_i)-(HB)\int_a^b f_k\right\|_X\le$$

$$\left\|\sum_{i=1}^n f(x_i)\alpha(D_i)-\sum_{i=1}^n f_k(x_i)\alpha(D_i)\right\|_X$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^n\left(f(x_i)\alpha(D_i)-(HB)\int_a^b f_k\right)\right\|_X$$

$$<\varepsilon$$

untuk setiap $k>k_0$.

Jadi jika untuk setiap $k,l>k_0$ diperoleh

$$\left\|(HB)\int_a^b f_k-(HB)\int_a^b f_l\right\|_X$$

$$\le\left\|(HB)\int_a^b f_{k_0}-\sum_{i=1}^n f_{k_0}(x_i)\alpha(D_i)\right\|_X$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^n f_{k_0}(x_i)\alpha(D_i)-\sum_{i=1}^n f(x_i)\alpha(D_i)\right\|_X$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^n f(x_i)\alpha(D_i)-(HB)\int_a^b f_{k_0}\right\|_X$$

$$<2\varepsilon.$$

Hal ini berarti barisan $\left\{(HB)\int_a^b f_k\right\}$ merupakan barisan Cauchy.

Karena X lengkap maka setiap barisan Cauchy akan konvergen di X.

Jadi,

$$\lim_{k\to\infty}(HB)\int_a^b f_k=L\in X.$$

Menurut Hipotesa, untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $f_k\in\mathcal{H}$, untuk setiap $k\in N$ berlaku

$$\left\|\mathcal{D}\sum f_k(x_i)\alpha(D_i)-(HB)\int_a^b f_k\right\|_X<\frac{\varepsilon}{4},$$

dengan $\mathcal{D}=\{(D_i,x_i) \mid i=1,2,...,n\}$ sebarang partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$.

Karena

$$\lim_{k\to\infty}(HB)\int_a^b f_k=L\in X,$$

Pilih $K\in N$ sedemikian sehingga berlaku

$$\left\|(HB)\int_a^b f_k-L\right\|_X<\varepsilon,$$

untuk setiap $k>K$.

Karena f_k konvergen ke f titik demi titik maka ada $k_1\ge K$ sehingga berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^n f_{k_1}(x_i)\alpha(D_i)-\sum_{i=1}^n f(x_i)\alpha(D_i)\right\|_X<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\alpha(D_i) - L \right\|_X \leq$$
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\alpha(D_i) - \sum_{i=1}^{n} f_{k_1}(x_i)\alpha(D_i) \right\|_X$$
$$+ \left\| \sum_{i=1}^{n} f_{k_1}(x_i)\alpha(D_i) - (HB)\int_a^b f_{k_1} \right\|_X$$
$$+ \left\| (HB)\int_a^b f_{k_1} - L \right\|_X < 2\varepsilon .$$

Hal ini berarti bahwa f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ dan

$$\lim_{k\to\infty} (HB)\int_a^b f_k = L = (HB)\int_a^b f .$$

Jadi $f \in HB[a,b]$ dan

$$\lim_{k\to\infty} (HB)\int_a^b f_k = (HB)\int_a^b f . \quad \blacksquare$$

Telah ditunjukkan bahwa jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi x^*f terintegral Henstock, sebaliknya belum tentu berlaku. Artinya jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi x^*f terintegral Henstock, maka belum tentu fungsi f terintegral Henstock-Bochner dan diperlihatkan contohnya [16]. Teorema berikut ini menyatakan keberlakuan sebaliknya dengan memberikan syarat bahwa untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real x^*f harus terintegral Henstock serentak.

Lemma 2.9 *Diberikan sebarang bilangan real* $a,b \in R$.

(i) Jika $a \le x$ *untuk setiap* $x > b$ *maka* $a \le b$.

(ii) Jika $a \ge x$ *untuk setiap* $x < b$ *maka* $a \ge b$.

Bukti:

(i) Andaikan $a > b$ maka terdapat bilangan $x \in R$ sehingga $a > x > b$. Diperoleh $a > x$ dan $x > b$. Kontradiksi dengan yang diketahui $x \ge a$, untuk setiap $x > b$. Jadi $a \le b$.

(ii) Andaikan $a < b$ maka terdapat bilangan $x \in R$ sehingga $a < x < b$. Diperoleh $a < x$ dan $x < b$. Kontradiksi dengan yang diketahui $x \le a$, untuk setiap $x < b$. Jadi yang benar $a \ge b$. $\blacksquare$

Lemma 2.9 akan digunakan untuk menunjukkan bukti syarat cukup dari teorema berikut ini.

Teorema 2.10 *Fungsi* $f \in HB[a,b]$ *jika dan hanya jika koleksi* $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ *terintegral Henstock serentak pada* $[a,b]$.

Bukti: (Syarat perlu) Karena $f \in HB[a,b]$ berarti ada $L = (HB)\int_a^b f \in X$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D) - (HB)\int_a^b f \right\|_X < \varepsilon .$$

Oleh karena itu untuk sebarang $x^* \in B(X^*) = \{x^* \in X^* \mid \|x^*\|_X \le 1\}$ diperoleh

$$\left| \mathcal{D}\sum (x^*f)(x)\alpha(D) - x^*(HB)\int_a^b f \right|$$
$$= \left| x^*\left(\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D) - (HB)\int_a^b f \right) \right|$$
$$\le \|x^*\|_X \left\| \mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D) - (HB)\int_a^b f \right\|_X$$
$$\le \|x^*\|_X \, \varepsilon ,$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ pada $[a,b]$.

Jadi $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$.

(Syarat cukup) Diketahui $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$. Berarti untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $x^*f \in \{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum\left(x^{*}f\right)(x)\alpha(D)-(H)\int_{a}^{b}x^{*}f\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

dengan $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$ dan $x^{*}\in B\left(X^{*}\right)$.

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}&\left|x^{*}\left(\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right)\right|\\&=\left|x^{*}\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-x^{*}\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right|\\&\leq\left|\mathcal{P}\sum\left(x^{*}f\right)(x)\alpha(P)-(H)\int_{a}^{b}x^{*}f\right|\\&+\left|\mathcal{Q}\sum\left(x^{*}f\right)(x)\alpha(Q)-(H)\int_{a}^{b}x^{*}f\right|\\&<\varepsilon,\end{aligned}$$

untuk sebarang $\mathcal{P}=\{(P,x)\}$, $\mathcal{Q}=\{(Q,x)\}$ dua partisi Perron $\delta-$fine pada $[a,b]$ dan $x^{*}\in B\left(X^{*}\right)$.

Karena untuk sebarang $x^{*}\in B\left(X^{*}\right)$ berlaku

$$\begin{aligned}&\left|x^{*}\left(\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right)\right|\\&\leq\left\|x^{*}\right\|_{X}\left\|\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right\|_{X}\\&\leq\left\|\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right\|_{X}\end{aligned}$$

dan karena

$$\left|x^{*}\left(\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right)\right|<\varepsilon$$

maka menurut Lemma 2.9 diperoleh

$$\left\|\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right\|_{X}<\varepsilon.$$

Jadi untuk sebarang $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{Q}$ partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$ berlaku

$$\left\|\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q)\right\|_{X}<\varepsilon.$$

Menurut Teorema Cauchy, f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$. ■

Berdasarkan Teorema Cauchy dan definisi integral Henstock-Bochner serentak diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.11 *Koleksi* $\mathcal{H}\subset\{f\,|\,f:[a,b]\to X\}$ *terintegral Henstock-Bochner serentak pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga*

$$\left\|\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D)-\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)\right\|_{X}<\varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D}=\{(D,x)\},\mathcal{P}=\{(P,y)\}$ *dua partisi Perron* δ*-fine pada* $[a,b]$ *dan* $f\in\mathcal{H}$.

Bukti:

(Syarat Perlu) Diketahui $\mathcal{H}\subset\{f\,|\,f:[a,b]\to X\}$ terintegral Henstock-Bochner serentak pada $[a,b]$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $f\in\mathcal{H}$ berlaku

$$\left\|\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D)-\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(D)\right\|_{X}<\varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D}=\{(D,x)\},\mathcal{P}=\{(P,y)\}$ dua partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$.

(Syarat Cukup) Diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga

$$\left\|\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D)-\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(D)\right\|_{X}<\varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D}=\{(D,x)\},\mathcal{P}=\{(P,y)\}$ dua partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$ dan $f\in\mathcal{H}$.

Berarti untuk setiap $f\in\mathcal{H}$ berlaku

$$\left\|\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D)-\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(D)\right\|_{X}<\varepsilon.$$

Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $f\in\mathcal{H}$ berlaku

$$\left\|\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D)-\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(D)\right\|_{X}<\varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D}=\{(D,x)\},\mathcal{P}=\{(P,y)\}$ dua partisi Perron δ-fine pada $[a,b]$.

Jadi $\mathcal{H}\subset\{f\,|\,f:[a,b]\to X\}$ terintegral Henstock-Bochner serentak pada $[a,b]$. ■

Telah ditunjukkan juga bahwa setiap fungsi yang terintegral Henstock-Bochner maka terintegral Henstock-Dunford [16], akan tetapi sebaliknya belum tentu berlaku [16]. Jika ditambahkan syarat bahwa untuk setiap koleksi $\left\{x^{*}f\,\middle|\,x^{*}\in B\left(X^{*}\right)\right\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$ maka sebaliknya akan berlaku seperti diuraikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.12 *Diketahui koleksi* $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ *terintegral Henstock serentak pada* $[a,b]$. *Fungsi* $f \in HB[a,b]$ *jika dan hanya jika* $f \in HD[a,b]$.

Bukti: (Syarat Perlu) Diketahui koleksi $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ maka untuk sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$, fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada A. Jadi terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left\| \mathcal{D}\sum_{x\in A} f(x)\alpha(D) - (H)\int_A f \right\|_X < \varepsilon .$$

Oleh karena itu untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - (H)\int_A x^* f \right| \\
&= \left| (x^*)\left(\mathcal{D}\sum_{x\in A} f(x)\alpha(D) - (H)\int_A f \right) \right| \\
&= \|x^*\|_X \left\| \mathcal{D}\sum_{x\in A} f(x)\alpha(D) - (H)\int_A f \right\|_X \\
&< \|x^*\|_X \,\varepsilon ,
\end{aligned}$$

untuk setiap $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A.

Hal ini berarti x^*f terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Jadi $f \in HD[a,b]$.

(Syarat Cukup) Karena $f \in HD[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real x^*f terintegral Henstock pada $[a,b]$. Karena diketahui bahwa koleksi $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$ maka menurut Teorema 2.10 fungsi $f \in HB[a,b]$. ■

3. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa jika untuk setiap $x^* \in X^*$ koleksi $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$ maka fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Gordon, R.A., (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.

[2] Lee P.Y., (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.

[3] Indrati, Ch. R., (2002), *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n, Disertasi*, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[4] Cao, S.C., (1992), The Henstock Integral for Banach-valued Functions, *Southeast Asian Bull. Math*, 16(-): 35-40.

[5] Cao, S.C., (1993), On The Henstock-Bochner Integral, *Southeast Asian Bull. Math. Special Issue*, p. 1-3.

[6] Lim J.S, Yoon J.H, Eun G.S. (1998), On Henstock Stieltjes Integral, *Kangweon-Kyungki Math. Jour.*, 6(1): 87-96.

[7] Guoju, Ye., Tianqing, An. (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.

[8] Schwabik, S., Guoju, Ye. (2005), *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Singapore.

[9] Saifullah. (2003), *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide R^n*,

Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[10] Solikhin. (2013), Perluasan Harnack dan Sifat Cauchy Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide R^n, *Jurnal Matematika*, 16(1): 8-12.

[11] Solikhin, Y.D. Sumanto dan Siti Khabibah. (2013), Locally dan Globally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9 November 2013, A.8 halaman 55-64, ISBN 978–979-16353-9-4.

[12] Solikhin, YD. Sumanto dan Siti Khabibah. (2014), Essentially Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Jurnal Matematika*, 17(2): 55-61.

[13] Solikhin, Sumanto dan Khabibah. (2012), Functionally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Jurnal Sains dan Matematika*, 20(3): 58-63.

[14] Solikhin, Heru Tjahjana dan Solichin Zaki. (2016), Kekonvergenan Barisan Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Jurnal Matematika*, 19(1): 29-39.

[15] Solikhin. (2017), Karakteristik Fungsi Primitive Integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY*, 25 Februari 2017, hal.107-115 ISBN 978–602-6100-0-0.

[16] Solikhin, Heru Tjahjana dan Solichin Zaki. (2016), Posisi Integral Henstock-Dunford dan Integral Henstock-Bochner pada $[a,b]$, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY*, 5 Nopember 2016, hal. MA85-MA92 ISBN 978–602-73403-1-2.

[17] Solikhin. (2011), *Integral Dunford-Henstock pada sel* $[\overline{a},\overline{b}]\subset R^n$, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.