# SIFAT-SIFAT DAN STRUKTUR ALJABAR MATRIKS PENYAJIAN DARI PERSEGI AJAIB

Suryoto[1], Harjito[2], Titi Udjiani SRRM[3], Nikken Prima Puspita[4]
[1,2,3,4]Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 50275
email : [1]suryotomath@gmail.com

**Abstrak**

Penelitian ini membahas sifat-sifat dasar dari persegi ajaib dan struktur aljabar dari himpunan semua matriks penyajian dari persegi ajaib berordo $n$. Struktur aljabar yang dapat dibentuk dari himpunan matriks persegi ini antara lain berupa grup komutatif terhadap operasi penjumlahan matriks, modul atas daerah bilangan bulat $\mathbb{Z}$, dan juga merupakan ruang vektor (atas lapangan rasional $\mathbb{Q}$, lapangan real $\mathbb{R}$ maupun lapangan kompleks $\mathbb{C}$). Diberikan pula nilai karakteristik dari matriks persegi ajaib salah satunya adalah konstanta ajaib dari matriks persegi ajaib yang bersangkutan.

**Kata Kunci :** persegi ajaib, konstanta ajaib, matriks persegi ajaib, grup komutatif, modul, nilai dan vektor karakteristik.

## 1. Pendahuluan

Untuk mempelajari struktur aljabar dari himpunan semua matriks penyajian suatu persegi ajaib dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya, terlebih dahulu diperlukan konsep persegi ajaib, grup komutatif dan modul atas ring dengan unsur satuan beserta sifat-sifatnya secara umum. Berikut diberikan pengertian persegi ajaib tersebut. Pada [1] dan [2] diperkenalkan persegi ajaib, sebagai sebuah persegi yang bersifat jumlahan entri-entri pada setiap baris, kolom, dan diagonalnya senantiasa sama dan jumlahan ini disebut konstanta ajaib dari persegi ajaibnya. Jumlahan yang konstan ini memegang peranan penting dalam penentuan nilai karakteristik dari matriks penyajian persegi ajaib yang bersangkutan. Berikut ini diberikan definisi persegi ajaib sebagai awal pembentukan struktur aljabar dari himpunan semua matriks penyajian dari persegi ajaib, yang merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan matriks dan lebih lanjut merupakan modul atas daerah bilangan bulat.

**Definisi 1.1** [1] *Persegi ajaib adalah kumpulan dari bilangan-bilangan yang disusun dalam kotak-kotak yang membentuk suatu persegi yang mempunyai sifat jumlah bilangan pada semua baris, semua kolom, dan pada kedua diagonalnya adalah sama. Biasanya jumlahan bilangan ini dinotasikan dengan notasi $S$.*

Berikut ini diberikan contoh dari persegi ajaib.

**Contoh 1. 1** Berikut adalah persegi ajaib berukuran $3 \times 3$ :

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Tampak bahwa jumlahan entri-entri pada setiap baris, setiap kolom, dan kedua diagonalnya senantiasa sama, yaitu sama dengan 15. Dengan demikian jumlah ajaib dari persegi ini adalah $S = 15$.

Selain persegi ajaib, konsep lain yang diperlukan dalam artikel ini adalah struktur grup komutatif dan modul yang merupakan struktur aljabar utama dari yang dapat dibentuk dari persegi ajaib tersebut. Pembahasan struktur aljabar dari himpunan semua matriks persegi ajaib, tidak terlepas dari struktur grup komutatif sebagai dasar pembentukannya. Secara formal pengertian tentang grup diberikan oleh definisi berikut.

**Definisi 1.2** [3] *Suatu grup adalah himpunan tidak kosong $G$ yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :*

*a.* *Operasi $*$ bersifat asosiatif, yaitu $a * (b * c) = (a * b) * c$, untuk setiap $a, b, c \in G$*

*b.* *$G$ mempunyai elemen identitas, yaitu terdapat elemen $e \in G$ sehingga $a * e = a = e * a$, untuk setiap $a \in G$. Elemen $e$ ini disebut elemen identitas dari $G$*

*c.* *Setiap elemen di $G$ mempunyai invers di $G$ juga, yaitu untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen $b \in G$ sehingga $a * b = e = b * a$. Elemen $b$ ini disebut invers dari $a$ dan dinotasikan dengan $b = a^{-1}$.*

*Selanjutnya grup $G$ disebut grup komutatif jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$.*

**Contoh 1.2** Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup, lebih lanjut himpunan ini merupakan grup komutatif. Demikian pula himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$, bilangan real $\mathbb{R}$, dan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan.

**Contoh 1.3** Himpunan semua matriks berukuran $2 \times 2$ :

$$M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

terhadap operasi penjumlahan matriks merupakan grup komutatif.

Selanjutnya menurut [4], modul adalah suatu struktur aljabar dari suatu himpunan tidak kosong atas sebuah ring yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner, berupa operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar, dimana himpunan ini merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan dilengkapi dengan tindakan perkalian skalar. Aksioma-aksioma yang berlaku pada modul serupa dengan aksioma-aksioma yang berlaku pada ruang vektor yang didefinisikan atas lapangan. Sebagai awal dalam pembahasan struktur aljabar himpunan semua matriks persegi ajaib sebagai modul atas daerah bilangan bulat $\mathbb{Z}$, ditinjau ring yang mempunyai unsur satuan. Berangkat dari ring ini didefinisikan modul atas ring yang dapat dibedakan menjadi dua, yaitu modul kiri dan modul. Berikut diberikan definisi dari modul kiri atas ring.

**Definisi 1. 3** ([4]) *Misalkan $R = (R, +, \cdot)$ ring dengan unsur satuan 1. Modul kiri $M$ atas ring $R$ atau $R$-modul kiri adalah grup komutatif $M = (M, +)$ yang dilengkapi dengan tindakan $\cdot : R \times M \to M$ melalui pengaitan $(\alpha, m) \to \alpha m$, untuk setiap pasang $(\alpha, m) \in R \times M$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut :*

*a.* $\alpha(m + n) = \alpha m + \alpha n$

*b.* $(\alpha + \beta)m = \alpha m + \beta m$

*c.* $(\alpha\beta)m = \alpha(\beta m)$

*d.* $1m = m$

*untuk setiap $\alpha, \beta \in R$ dan $m, n \in M$.*

Sedangkan pengertian untuk modul kanan dapat didefinisikan dengan cara yang serupa, perbedaannya terletak pada tindakan ring $R$ terhadap himpunan $M$-nya. Jika pada modul kiri berlaku tindakan $\cdot : R \times M \to M$ melalui pengaitan $(\alpha, m) \to \alpha m$ atau $R$ beraksi dari kiri dalam operasi perkalian skalar terhadap $M$, maka pada modul kanan berlaku sebaliknya, tindakan $\cdot : M \times R \to M$ melalui pengaitan $(m, \alpha) \to m\alpha$ yaitu $R$ beraksi dari kanan dalam operasi perkalian skalar terhadap $M$.

Dalam hal $R$ merupakan ring komutatif, pengertian modul kiri dan modul kanan tidak harus sama, ini karena elemen dari $M$ belum tentu sama dengan elemen dari $R$. Selanjutnya jika $M$ merupakan modul kiri dan sekaligus modul kanan, maka $M$ dikatakan modul atas $R$.

Berikut ini diberikan beberapa contoh modul atas suatu ring.

**Contoh 1. 4** Diberikan $R = (R, +, \cdot)$ sebarang ring dengan $I$ dan $J$ berturut-turut adalah ideal kiri dan ideal kanan di $R$, maka $I$ dan $J$ berturut-turut merupakan $R$-modul kiri dan $R$-modul kanan terhadap operasi perkalian ring $R$.

**Contoh 1. 5** Pandang daerah bilangan bulat $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, maka sebarang grup komutatif $G = (G, +)$ merupakan $\mathbb{Z}$-modul terhadap operasi (tindakan) :

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{\text{sebanyak } n \text{ suku}}, & \text{untuk } n > 0 \\ 0, & \text{untuk } n = 0 \\ -\big((-n)g\big), & \text{untuk } n < 0 \end{cases}$$

## 2. Sifat-sifat Dasar Persegi Ajaib

Sebelum membahas sifat-sifat dasar yang berlaku pada persegi ajaib diberikan terlebih dulu beberapa jenis persegi ajaib yang cukup dikenal yang diambil dari referensi [1] dan [2], beserta dengan metode pengkonstruksiannya.

**Persegi Ajaib Sempurna**

*Persegi ajaib sempurna* adalah persegi ajaib dengan sifat tambahan bahwa jumlahan entri pada sebarang diagonal tambahan yang sejajar dengan diagonal utama maupun yang sejajar dengan diagonal yang bukan utama sama dengan konstanta ajaib.

**Persegi Ajaib Simetris**

*Persegi ajaib simetris* adalah persegi ajaib yang bersifat jumlahan bilangan pada dua sel sebarang yang simetris terhadap sel pusatnya bernilai sama. Persegi ajaib simetris ini kadang disebut juga dengan istilah persegi ajaib asosiatif.

**Persegi Ajaib Nol**

*Persegi ajaib nol* adalah persegi ajaib dimana konstanta ajaibnya adalah 0.

**Persegi Ajaib Geometris**

*Persegi ajaib geometris* atau *persegi ajaib perkalian* adalah persegi ajaib dimana perkalian dari entri-entri setiap baris, kolom, dan pojok-pojok diagonalnya merupakan suatu konstanta.

Berikut diberikan contoh dari persegi-persegi ajaib sebagaimana telah diberikan sebelumnya.

**Contoh 2.1** Beberapa jenis persegi ajaib.

Persegi ajaib sempurna :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Persegi ajaib nol :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 11 | –12 | –5 | 2 |
| 10 | –8 | –6 | 1 | 3 |
| –9 | –7 | 0 | 7 | 9 |
| –3 | –1 | 6 | 8 | –10 |
| –2 | 5 | 12 | –11 | –4 |

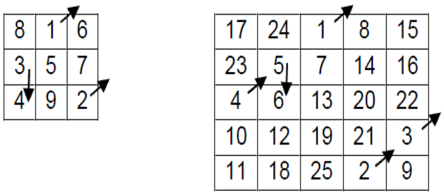
Persegi ajaib geometris :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 432 | 6 | 18 | 16 |
| 4 | 72 | 24 | 108 |
| 8 | 36 | 12 | 216 |
| 54 | 48 | 144 | 2 |

Sementara itu terdapat beberapa cara untuk menghasilkan persegi ajaib, pada bagian ini hanya diberikan beberapa metode pengkonstruksian yang cukup dikenal. Pada dasarnya metode pengkonstruksian persegi ajaib berordo ganjil berbeda dengan persegi ajaib berordo genap.

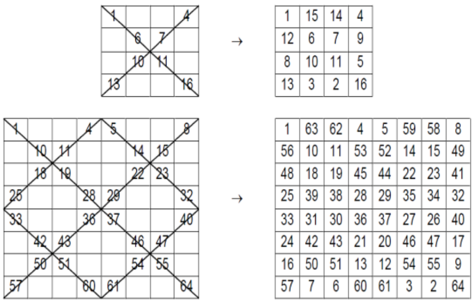
a. Persegi Ajaib Ordo Ganjil

   Metode yang cukup terkenal untuk mengkonstruksi persegi ajaib berordo ganjil adalah Metode de la Loubere. Berikut ini diberikan pengkonstruksian persegi ajaib ordo 3 dengan metode de la Loubere.



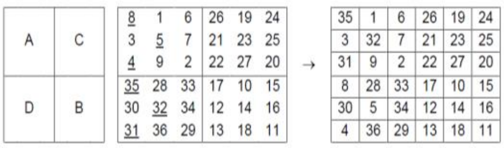
b. Persegi Ajaib Ordo Genap Kelipatan Empat

Persegi ajaib ordo genap kelipatan 4 atau $n \equiv 0 \bmod 4$ atau disebut persegi ajaib doubly-even order dapat dikontruksi dengan menggunakan metode Durer. Berikut diberikan garis besar pengkonstruksian dengan metode Durer ini.



c. Persegi Ajaib Ordo Genap Bukan Kelipatan Empat

Persegi ajaib ordo genap bukan kelipatan 4, seperti ordo 6, 10, 14, dan seterusnya atau secara umum $n \equiv 2 \bmod 4$ atau disebut persegi ajaib singly-even order dapat dikontruksi dengan menggunakan metode Ralph Stracey. Berikut diberikan garis besar pengkonstruksian dengan metode Ralph Stracey ini.



Selanjutnya diberikan definisi matriks penyajian dari persegi ajaib, sebagaimana dituangkan pada definisi berikut.

**Definisi 2.1** *Matriks penyajian dari suatu persegi ajaib berukuran $n \times n$ adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ atau matriks berordo $n$ yang entri-entrinya adalah bilangan real yang disusun sedemikian hingga jumlah entri-entri pada setiap baris, kolom, dan diagonalnya sama.*

Untuk menyingkat penulisan dan penyebutan, matriks penyajian dari suatu persegi ajaib selanjutnya disebut saja dengan istilah matriks persegi ajaib.

Selanjutnya matriks persegi ajaib yang entri-entrinya berupa bilangan $1, 2, \cdots, n^2$ dinamakan matriks persegi ajaib normal (klasik). Untuk matriks persegi ajaib $M$, konstanta ajaib dari matriks $M$, dinotasikan dengan $\sigma(M)$.

**Contoh 2.2** Dari persegi ajaib berukuran $3 \times 3$ pada Contoh 1.5 :

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Matriks penyajian dari persegi ajaib ini adalah matriks yang berbentuk :

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Berikut ini diberikan beberapa sifat dasar dari matriks persegi ajaib.

1. *Jumlahan dua matriks persegi ajaib dengan ordo sama menghasilkan matriks persegi ajaib juga.*

   **Bukti :** Misalkan $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ matriks-matriks persegi ajaib berordo $n$ dengan konstanta ajaibnya berurut-turut dinotasikan dengan $\sigma(A)$ dan $\sigma(B)$, serta matriks $C = A + B = (c_{ij})$, maka untuk sebarang baris matriks $C$ berlaku $\sigma(C) = \sigma(A + B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Hal ini juga berlaku untuk sebarang kolom matriks $C$ dan kedua diagonalnya. Ini memperlihatkan $C$ merupakan matriks persegi ajaib. ■

2. *Jika $M$ suatu matriks persegi ajaib, maka transpose dari $M$ juga merupakan matriks*

*persegi ajaib dengan konstanta ajaib yang sama*.

**Bukti :** Misalkan $M^t$ menyatakan transpose dari matriks $M$, maka tampak bahwa baris matriks $M$ menjadi kolom matriks $M^t$ dan sebaliknya kolom matriks $M$ menjadi baris dari matriks $M^t$. Dengan demikan jumlahan entri-entri pada setiap baris dan kolomnya senantiasa terawetkan. Demikian pula untuk jumlahan pada kedua diagonalnya, senantiasa terawetkan di dalam matriks $M^t$. Hal ini memberikan $\sigma(M^t) = \sigma(M)$. ■

3. *Jika $M$ suatu matriks persegi ajaib dan $M'$ adalah matriks hasil transformasi geometri (rotasi atau refleksi) matriks $M$, maka $M'$ juga merupakan matriks persegi ajaib*.

   **Bukti :** Karena letak entri dari matriks hasil transformasinya relatif tidak berubah terhadap entri yang lainnya, maka jumlahan entri-entrinya pada setiap baris, kolom, dan diagonal senantiasa tetap, yaitu $\sigma(M') = \sigma(M)$. ■

4. *Jika $M$ suatu matriks persegi ajaib dan $N$ suatu matriks yang diperoleh dari matriks $M$ dengan menambahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi setiap entrinya dengan sebuah bilangan (tidak boleh nol untuk kasus perkalian dan pembagian), maka $N$ merupakan matriks persegi ajaib*.

5. *Untuk matriks persegi ajaib normal $M$ dengan ordo $n$, maka berlaku*

$$\sigma(M) = \frac{n}{2}(n^2 + 1).$$

   **Bukti :** Untuk bukti sifat ini sudah banyak dibuktikan dalam beberapa artikel atau referensi yang membahas tentang persegi ajaib, diantaranya dibuktikan oleh Schubert ([5], hal. 44). Bukti untuk $n$ ganjil diberikan oleh Denes dan Keedwell ([6], hal. 280, Teorema 6,2.2). Bukti lain untuk rumus ini dapat dilakukan dengan memperhatikan jumlahan dari bilangan-bilangan penyusunnya yang merupakan barisan aritmatika. ■

6. *Untuk matriks persegi ajaib $M$ yang disusun dari bilangan-bilangan yang membentuk barisan aritmatika, maka berlaku*

$$\sigma(M) = \frac{n}{2}(\text{bilangan terkecil} + \text{bilangan terbesar})$$

   **Bukti** : Dapat dilihat pada King ([8], hal. 6 – 7) atau dengan mencari jumlahan dari bilangan-bilangan penyusunnya yang merupakan barisan aritmatika. ■

## 3. Struktur Aljabar Himpunan Matriks Penyajian Persegi Ajaib dan Aspek Aljabar Terkait

Sebelum membahas struktur aljabar yang dapat dibentuk dari persegi ajaib, terlebih dahulu diberikan beberapa notasi maupun terminologi yang akan digunakan untuk mempermudah pembahasan. Notasi $MS(n)$ dimaksudkan adalah himpunan semua matriks persegi ajaib berordo $n$.

Berikut ini diberikan beberapa hasil penting terkait dengan himpunan dari matriks persegi tersebut sebagaimana diberikan oleh teorema berikut.

**Teorema 3.1** *Untuk $n \in \mathbb{N}$, dengan $n \neq 2$, $MS(n)$ membentuk grup komutatif terhadap operasi penjumlahan matriks*.

**Bukti :** Misalkan $A, B, C \in MS(n)$, matriks-matriks persegi dengan ordo $n$. Misalkan juga $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, dan $C = (c_{ij})$, dengan $i, j = 1, 2, \cdots, n$ maka dapat diperlihatkan beberapa hal berikut :

a. Sifat tertutup operasi penjumlah matriks.

   Dari penjumlah matriks $A$ dan $B$ dipunyai $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Untuk memperlihatkan $A + B$ merupakan matriks persegi ajaib, harus diperlihatkan bahwa jumlah entri-entri pada setiap baris, kolom, dan diagonalnya adalah sama. Dipilih sebarang baris $k$ dari matriks $A + B$, dengan $k =$

$1, 2, \cdots, n$ maka dengan menggunakan sifat penjumlahan matriks diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} + \sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{kj} + b_{kj}\right)$$
$$= \sigma(A + B)$$

Dengan cara serupa dapat dilihat bahwa jumlahan dari entri-entri pada setiap kolom matriks $A + B$ adalah

$$\sum_{i=1}^{n} a_{il} + \sum_{i=1}^{n} b_{il} = \sum_{i=1}^{n} (a_{il} + b_{il}) = \sigma(A + B)$$

Demikian pula jumlahan entri-entri pada kedua diagonal matriks $A + B$ juga diperoleh $\sigma(A + B)$. Hal ini memperlihatkan $A + B$ matriks persegi ajaib.

b. Terpenuhinya sifat asosiatif penjumlahan matriks.

Untuk matriks-matriks persegi $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, dan $C = (c_{ij})$, dengan $i, j = 1, 2, \cdots, n$ diperoleh

$$(A + B) + C = \left[(a_{ij}) + (b_{ij})\right] + (c_{ij})$$
$$= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij})$$
$$= (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})$$
$$= (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij})$$
$$= (a_{ij}) + \left[(b_{ij}) + (c_{ij})\right]$$
$$= A + (B + C)$$

c. $MS(n)$ mempunyai elemen identitas terhadap operasi penjumlahan matriks

Elemen identitas penjumlahan dari $MS(n)$ adalah matriks $O$ dengan $a_{ij} = 0$, untuk setiap $i$ dan $j$, karena untuk sebarang matriks $A = (a_{ij}) \in MS(n)$ diperoleh $A + O = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A$, demikian juga

$$O + A = (0 + a_{ij}) = (a_{ij}) = A.$$

d. Setiap matriks di $MS(n)$ senantiasa mempunyai invers jumlah di $MS(n)$ juga

Untuk sebarang matriks $A = (a_{ij}) \in MS(n)$ terdapat matriks $B = (-1)A$ dan berlaku $A + B = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = O$.

Dengan cara serupa diperoleh $B + A = (-a_{ij}) + (a_{ij}) = (-a_{ij} + a_{ij}) = (0) = O$.

e. Terpenuhinya sifat komutatif penjumlahan matriks.

Untuk matriks $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ di $MS(n)$ berlaku

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A.$$

Ini memperlihatkan sifat komutatif berlaku pada himpunan matriks $MS(n)$.

Dengan demikian terbukti bahwa $(MS(n), +)$ merupakan grup komutatif. ■

Dengan diketahui bahwa himpunan $MS(n)$ membentuk grup komutatif terhadap operasi penjumlahan matriks lebih lanjut dapat diperlihatkan bahwa himpunan semua matriks persegi ajaib $MS(n)$ membentuk struktur modul atas daerah integral $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, seperti diberikan oleh teorema berikut.

**Teorema 3.2** *Himpunan semua matriks persegi $MS(n)$ membentuk modul atas daerah integral $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$.*

**Bukti** : Teorema 3.1 memberikan bahwa himpunan matriks persegi ajaib $(MS(n), +)$ membentuk grup komutatif. Untuk memperlihatkan himpunan ini membentuk modul atas $\mathbb{Z}$, didefinisikan operasi perkalian skalar

$$\cdot : \mathbb{Z} \times MS(n) \to MS(n)$$

dengan $\cdot(\alpha, A) = \alpha A$, untuk setiap $(\alpha, A) \in \mathbb{Z} \times MS(n)$. Misalkan $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ di $MS(n)$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, maka diperoleh

a. Operasi perkalian skalar bersifat distributif atas penjumlahan matriks persegi ajaib, yaitu $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Perhatikan bahwa

$$\alpha(A + B) = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \left[\alpha(a_{ij} + b_{ij})\right] = (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\alpha b_{ij})$$
$$= \alpha A + \alpha B.$$

b. Operasi penjumalahan dari dua operasi perkalian skalar dengan matriks persegi ajaib memenuhi sifat distributif kanan, yaitu $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

Perhatikan bahwa

$$(\alpha+\beta)A = \left[(\alpha+\beta)a_{ij}\right] = \left(\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}\right) = \left(\alpha a_{ij}\right) + \left(\beta a_{ij}\right) = \alpha A + \beta A.$$

c. Hasil kali dua perkalian skalar dengan matriks persegi ajaib bersifat asosiatif, yaitu : $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Dicatat bahwa $(\alpha\beta)A = \left[(\alpha\beta)a_{ij}\right] = \alpha\left(\beta a_{ij}\right) = \alpha(\beta A)$.

d. Elemen satuan 1 merupakan identitas operasi perkalian skalar.

Tampak bahwa $1A = \left(1a_{ij}\right) = \left(a_{ij}\right) = A$.

Karena semua aksioma modul dipenuhi, maka terlihat bahwa himpunan matriks persegi $MS(n)$ membentuk modul atas daerah integral $\mathbb{Z}$. ■

Selanjutnya jika ring acuan pendefinisian struktur aljabarnya dipersempit tidak lagi daerah integral $\mathbb{Z}$, tetapi menjadi lapangan, seperti lapangan bilangan rasional, lapangan real, maupun lapangan kompleks, maka diperoleh struktur aljabar lain dari himpunan matriks persegi ajaib ini. Struktur aljabar yang baru merupakan ruang vektor dan telah diperlihatkan oleh banyak peneliti yang lain, salah satunya adalah oleh Stephens ([2], hal. 17 – 18) dan oleh Ward ([7], hal. 108 – 111) Berikut ini diberikan hasil tersebut.

**Teorema 3.3** *Himpunan semua matriks persegi* $MS(n)$ *membentuk ruang vektor atas lapangan* $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$.

**Bukti** : Bukti sejalan dengan apa yang telah diberikan oleh Stephens ([2], hal. 17 – 18, dengan cara memperluas lapangan real $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ menjadi lapangan kompleks $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$. ■

Seperti telah diberikan sebelumnya, untuk sebarang persegi ajaib senantiasa dikaitkan dengan sebuah nilai numerik yang disebut dengan jumlah ajaib atau konstanta ajaib. Pada bab ini diperlihatkan bahwa konstanta ajaib ini menjadi nilai karakteristik dari matriks persegi ajaibnya.

Sebelum melihat hal ini diberikan terlebih dahulu beberapa definisi berikut, sebagai alat bantu memahami permasalahan nilai karakteristik dan vektor karakteristik untuk matriks persegi ajaib ini.

**Definisi 3.4** ([9]) *Misalkan* $A$ *matriks persegi berukuran* $n \times n$. *Bilangan real* $\lambda$ *disebut nilai karakteristik matriks* $A$ *jika terdapat vektor tak nol* $v$ *berdimensi-*$n$ *sedemikian hingga* $Av = \lambda v$, *dengan vektor tak nol* $v$ *disebut vektor karakteristik dari matriks* $A$ *yang berpadanan dengan nilai karakteristik* $\lambda$.

Selanjutnya berkaitan dengan nilai karakteristik dari suatu matriks persegi dipunyai istilah jari-jari (radius) sepktral, seperti diberikan oleh definisi berikut.

**Definisi 3.5** ([10]) *Misalkan* $M$ *sebarang matriks persegi, jari-jari (radius) spektral dari matiks* $M$ *adalah supremum dari semua nilai karatkteristik matriks* $M$, *dan dinotasikan dengan* $\rho(M) = maks\ \{|\lambda| : \lambda\ nilai\ karakteristik\ dari\ M\}$. *Jari-jari (radius) spektral yang merupakan nilai karakteristik terbesar ini kadang juga dikenal dengan istilah nilai karakteristik utama atau nilai karakteristik dominan dari matriks persegi* $M$.

Sebagimana di dalam aljabar linier, untuk mencari nilai karakteristik (dan juga vektor karakteristik yang berpadanan) dari sebuah matriks persegi $A$, dilakukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|\lambda I - A| = 0$ untuk $\lambda$, dimana notasi $I$ menyatakan matriks identitas, yaitu matriks yang bernilai 1 pada diagonal utamanya dan bernilai 0 untuk yang lainnya. Berikut ini diberikan contoh menentukan nilai karakteristik untuk matriks persegi ajaib berordo 3.

**Contoh 3.1** Diberikan matriks persegi ajaib

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Ditentukan nilai karakteristik dan vektor karakteristik dari matriks $M$.

Dari persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$ diperoleh

$$\begin{vmatrix} \lambda - 8 & -1 & -6 \\ -3 & \lambda - 5 & -7 \\ -4 & -9 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\lambda - 8)(\lambda - 5)(\lambda - 2) &+ (-1)(-7)(-4) \\ &+ (-6)(-3)(-9) \\ &- (-6)(\lambda - 5)(-4) \\ &- (\lambda - 8)(-7)(-9) \\ &- (-1)(-3)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ (\lambda^2 - 13\lambda + 40)(\lambda - 2) &- 28 - 162 - 24\lambda \\ &+ 120 - 63\lambda + 504 - 3\lambda + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ \lambda^3 - 13\lambda^2 + 40\lambda - 2\lambda^2 + 26\lambda - 80 - 28 \\ - 126 - 24\lambda + 120 - 63\lambda \\ + 504 - 3\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda^3 - 15\lambda^2 - 24\lambda + 360 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda^2(\lambda - 15) - 24(\lambda - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (\lambda - 15)(\lambda^2 - 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda - 15 = 0 \text{ atau } \lambda^2 - 24 = 0$$

Dengan demikian nilai-nilai karakteristik untuk matriks $M$, yaitu

$$\lambda = 15,\ \lambda = 2\sqrt{6}, \text{ dan } \lambda = -2\sqrt{6}.$$

Sementara itu jari-jari spektral dari matriks persegi $M$ adalah $\lambda = 15$ dan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristik ini adalah $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dari Contoh 3.1 membawa kita ke dugaan sementara sebagaimana diberikan oleh konjektur berikut ini.

**Konjektur 3.5** *Jika matriks persegi ajaib entri-entrinya kesemuanya positif, maka nilai karakteristik utamnaya adalah konstanta ajaibnya. Lebih lanjut jika matriks persegi ajaibnya memuat entri yang bernilai negatif, maka salah satu nilai karakteristiknya adalah konstanta ajaibnya*.

## 4. Kesimpulan

Dari rangkaian penjelasan pada bagian sebelumnya telah diperoleh gambaran bahwa persegi ajaib mempunyai beberapa keajaiban, khususnya yang berkaitan dengan jumlah ajaib atau konstanta ajaibnya. Konstanta ini merupakan rasio dari jumlahan dari entri-entri (bilangan-bilangan) penyususun persegi ajaibnya dengan ordo dari persegi ajaibnya. Lebih lanjut dapat diduga konstanta ajaib tersebut menjadi nilai karakteristik dari matriks penyajian persegi ajaibnya.

Dari hasil pembahasan sejauh ini dapat disimpulkan bahwa struktur aljabar dari himpunan semua matriks persegi ajaib terhadap operasi penjumlahan matriks merupakan grup komutatif. Lebih lanjut dapat diperlihatkan bahwa himpunan ini membentuk suatu modul atau suatu ruang vektor tergantung dari ring yang dijadikan acuan pendefinisian operasi perkalian skalarnya. Sifat-sifat yang berlaku pada struktur aljabar ini serupa dengan struktur aljabar modul atau ruang vektor biasa.

Mengingat masih luasnya kajian terhadap persegi ajaib ini, seperti yang diberikan pada konjektur 3.5, penelitian ini masih sangat terbuka untuk dilanjutkan dan dikembangkan untuk mengkaji sifat-sifat yang berlaku maupun hasil-hasil yang lain yang belum ditemukan.

## 5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Sains dan Matematika (FSM) Universitas Diponegoro yang telah memberikan bantuan finansial, melalui program Penelitian Pembinaan dengan dana DIPA PNBP FSM Universitas Diponegoro Tahun 2017 dengan kontrak pelaksanaan penelitian No. 1645d/UN7.5.8/PP/2017.

## 6. Daftar Pustaka

[1] Andrews, W. S., "*Magic Squares and Cubes*", 2nd edition, Dover Publications Inc., Vanice Street, New York 14, New York, 1960.

[2] Stephens, D. L., "*Matrix Properties of Magic Squares*", A Master of Science Professional Paper, College of Arts and Science, Denton, Texas, 1993.

[3] Joseph, A. Galliani, "*Contemporary Abstract Algebra*", Narosa Publication House, Daryaganj, New Delhi, 2009.

[4] Wisbauer, Robert, "*Foundations of Modul & Ring Theory*", Gordon & Research Science Publishers, Reading, 1991.

[5] Scubert, Hermann, "*Mathematical Essays and Recreations*", Open Court Publishing Company, Chicago, 1899.

[6] Denes, Joszef & A. D. Keedwell, "*Latin Squares and their Applications*", Academic Press, New York, 1974.

[7] Ward, J. E., "Vector Space of Magic Squares", *Mathematics Magazine*, 52, 2, 108 – 111, 1980.

[8] King, David, "Magic Square Puzzles", Dorset Press, Great Britain, 1992.

[9] Anton, H. & Chris Rorres, "*Elementary Linear Algebra* (*Application Version*)", 11th edition, John Wiley and Sons Inc., New York, 2014.

[10] David, C. Lay, "Linear Algebra and Its Applications", 3rd edition, Pearson Education Inc., 2009.