RUANG MATRIX LINEAR TRANSLASI INVARIAN PADA RUANG FUNGSI INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA [*a*,*b*]

Solikhin[1], YD. Sumanto[2], Susilo Hariyanto[3], Abdul Aziz[4]
[1,2,3,4]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika Undip
Jl. Prof. Soedarto, S.H. Semarang, 50275
Email: [1]solikhin@live.undip.ac.id

Abstract. In this paper we study Henstock-Dunford integral on $[a,b]$. We discuss some properties of the integrable. We will construct norm and matrix on Dunford-Henstock integrable function space, $HD[a,b]$. We obtain that $HD[a,b]$ is linear space. A function $\|.\|: HD[a,b] \to R$ defined by $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup\limits_{A \subset [a,b]} \left| (H)\int_A x^* f \right| \right)$ for every $f \in HD[a,b]$ is norm on linear space $HD[a,b]$. A function $d: HD[a,b] \times HD[a,b] \to R$ defined by $d(f,g) = \|f - g\|$ for every $f, g \in HD[a,b]$ is a matrix on linear space $HD[a,b]$. Further more, linear space $HD[a,b]$ is linear matrix translation invarian space.

Keyword : Henstock-Dunford integral, linear space, norm, invarian translation

1. PENDAHULUAN

Integral Henstock bernilai real didefinisikan atas partisi Perron δ-fine pada interval tertutup $[a,b]$ [1]. Integral ini merupakan pengintlakan dari integral Riemann dan integral McShane [1,2].

Kajian integral Henstock dalam ruang dimensi satu R [2] telah digeneralisasi dalam ruang Euclide R^n [3]. Bahkan untuk fungsi bernilai real digeneralisasi ke dalam fungsi bernilai Banach [4]. Integral Henstock untuk fungsi bernilai vektor atau Banach dikenal dengan integral Henstock-Bochner [5].

Kajian integral Henstock telah banyak dikombinasikan dengan integral lain seperti integral Henstock-Stieltjes [6], Henstock-Pettis, Henstock-Dunford untuk fungsi bernilai Banach [7]. Integral Henstock-Dunford merupakan hasil kombinasi integral Henstock dengan integral Dunford.

Integral Dunford didefinisikan oleh fungsi terukur lemah pada ruang real R [8]. Diberikan X ruang Banach dan $X^* = \left\{ x^* \middle| x^* : X \to R \text{ linear kontinu} \right\}$ ruang dualnya (dual pertama) dengan $X^{**} = \left\{ x^{**} \middle| x^{**} : X^* \to R \text{ linear kontinu} \right\}$ dual kedua serta $[a,b] \subset R$. Fungsi terukur lemah $f:[a,b] \to X$ dikatakan terintegral Dunford pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f:[a,b] \to R$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan untuk setiap himpunan terukur $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f = (H)\int_a^b x^* f \chi_A .$$

Selanjutnya integral Dunford kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f:[a,b] \to R$ terintegral Henstock. Integral ini dikenal dengan integral Henstock-Dunford [7, 9].

Topik integral Henstock-Dunford menjadi kajian oleh penulis. Beberapa kajian tentang integral Henstock-Dunford antara lain perluasan Harnack dan sifat Cauchy integral Henstock-Dunford dalam ruang Euclide R^n [10], beberapa sifat Small Riemann Sums fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [11, 12, 13], kekonvergenan barisan fungsi terintegral

Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [14], karakteristik fungsi primitive integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [15], serta posisi integral Henstock-Dunford dan integral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ [16].

Kajian posisi integral Henstock-Dunford dan integral Henstock-Bochner telah dihasilkan bahwa untuk setiap fungsi f yang terintegral Henstock-Bochner maka fungsi f tersebut terintegral Henstock-Dunford, akan tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Jika integral Henstock-Bochner diperlemah menjadi integral Henstock Lemah maka diperoleh bahwa integral Henstock-Dunford ekuivalen dengan integral Henstock Lemah [16]. Selanjutnya ditunjukkan syarat perlu dan syarat cukup sehingga integral Henstock-Bochner ekuivalen dengan integral Henstock-Dunford, yaitu koleksi $\left\{x^* f \,\middle|\, x^* \in B\left(X^*\right)\right\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$ [17].

Berdasarkan hasil-hasil kajian terkait integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, akan dikontruksi suatu fungsi yang merupakan suatu norm pada ruang linear fungsi terintegral Henstock-Dunford. Lebih lanjut berdasarkan norm yang diperoleh didefinisikan fungsi jarak sedemikian sehingga merupakan ruang matrix. Kemudian berdasarkan ruang matrix tersebut ditunjukkan bahwa ruang linear tersebut merupakan ruang linear translasi invarian.

2. INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD

Diberikan definisi integral Henstock-Dunford dari suatu fungsi bernilai vektor dan sifat-sifat sederhananya.

Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya (dual pertama) dengan X^{**} dual kedua , serta interval tertutup $[a,b]\subset R$. $B\left(X^*\right)=\left\{x^* \in X^* : \left\|x^*\right\| \le 1\right\}$ unit ball dalam X^* dan $[a,b]$ adalah interval tertutup di dalam himpunan semua bilangan riil R.

Pada tulisan ini jika $A=[c,d]\subset[a,b]$ maka simbol $\alpha(A)$ dimaksudkan sebagai $\alpha(A)=|d-c|$, yaitu panjang interval tertutup A.

Definisi 2.1 [7] *Fungsi bernilai vektor* $f:[a,b]\to X$ *dikatakan terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$, *jika untuk setiap* $x^* \in X^*$ *fungsi bernilai real* $x^* f:[a,b]\to R$ *terintegral Henstock pada* $[a,b]$ *dan untuk setiap interval tertutup* $A\subset[a,b]$ *terdapat vektor* $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ *sehingga*

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*)=\left(H\right)\int_A x^* f \;.$$

Vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ *di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford pada* A *atas fungsi* f *dan ditulis*

$$x^{**}_{(f,A)}=\left(HD\right)\int_A f \;.$$

Dapat ditunjukkan bahwa vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ adalah tunggal.

Koleksi semua fungsi yang terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ dinotasikan $HD[a,b]$.

Jadi, $f \in HD[a,b]$ berarti bahwa fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$.

Teorema 2.2 [7] *Jika* $f \in HD[a,b]$ *maka terdapat tunggal vektor* $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$.

Bukti: Diberikan sebarang interval tertutup $A\subset[a,b]$. Andaikan terdapat vektor $x^{**}_{1(f,A)} \in X^{**}$ dan $x^{**}_{2(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{1(f,A)}\left(x^*\right)=\left(H\right)\int_A x^* f \text{ dan}$$

$$x^{**}_{2(f,A)}\left(x^*\right)=\left(H\right)\int_A x^* f \;.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} x^{**}_{1(f,A)}\left(x^*\right)-x^{**}_{2(f,A)}\left(x^*\right) &=\left(H\right)\int_A x^* f-\left(H\right)\int_A x^* f \\ &=0, \end{aligned}$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.
Jadi $x^{**}_{1(f,A)} = x^{**}_{2(f,A)}$. ∎

Teorema 2.3. [7] *Jika* $f \in HD[a,b]$, *maka* $f \in HD(A)$ *untuk setiap interval tertutup* $A \subset [a,b]$.
Bukti: Jelas menurut definisi. ∎

Definisi 2.4 [1] *Fungsi* $f:[a,b] \to R$ *terintegral Henstock pada* $[a,b]$, *ditulis* $f \in H[a,b]$, *jika ada bilangan* $L \in R$ *sehingga untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *dan untuk setiap partisi Perron* $\delta-$*fine* $\mathcal{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), ..., (D_n, x_n)\}$ *berlaku*

$$\left| L - \mathcal{D}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\alpha(D) \right| < \varepsilon .$$

Menurut Definisi 2.1 maka berlaku teorema berikut.
Teorema 2.5 [7,17] *Fungsi* $f \in HD[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $x^* \in X^*$ $x^* f \in H[a,b]$.
Bukti: Jelas menurut Definisi 2.1. ∎

Koleksi semua fungsi yang terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, yaitu $HD[a,b]$ merupakan ruang linear, seperti dalam teorema berikut.
Teorema 2.6 [11,12,13] *Jika* $f, g \in HD[a,b]$ *dan* $u \in R$ *sebarang skalar maka untuk setiap* $x^* \in X^*$ *berlaku*
(i) $f + g \in HD[a,b]$ *dan*

$$x^{**}_{(f+g,A)} = x^{**}_{(f,A)} + x^{**}_{(g,A)},$$

(ii) $uf \in HD[a,b]$ *dan*

$$x^{**}_{(uf,A)} = u x^{**}_{(f,A)} .$$

Bukti: (i) Fungsi $f \in HD[a,b]$ berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Karena $g \in HD[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* g$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(g,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(g,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* g .$$

Karena $A \subset [a,b]$ sebarang interval tertutup, maka berlaku untuk fungsi f dan fungsi g.
Jadi untuk sebarang $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(f+g)$ terintegral Henstock pada $[a,b]$
Oleh karena itu untuk sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas terdapat vektor $x^{**}_{(f+g,A)} \in X^{**}$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} x^{**}_{(f+g,A)}(x^*) &= (H)\int_A x^*(f+g) \\ &= (H)\int_A x^* f + = (H)\int_A x^* g \\ &= x^{**}_{(f,A)}(x^*) + x^{**}_{(g,A)}(x^*). \end{aligned}$$

Jadi $f + g \in HD[a,b]$ dan

$$x^{**}_{(f+g,A)} = x^{**}_{(f,A)} + x^{**}_{(g,A)}.$$

(ii). Diberikan sebarang skalar $u \in R$ dan diketahui $f \in HD[a,b]$.
Karena $f \in HD[a,b]$ berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $u \in R$ maka $x^* uf$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas terdapat vektor $x^{**}_{(uf,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(uf,A)}\left(x^*\right)=(H)\int_A x^* uf$$
$$=u(H)\int_A x^* f$$
$$=ux^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right).$$

Jadi $uf\in HD[a,b]$ dan

$$x^{**}_{(uf,A)}=ux^{**}_{(f,A)}.$$

Jadi $HD[a,b]$ merupakan ruang linear. ■

Teorema 2.7 *Jika $f=\theta$ hampir di mana-mana pada $[a,b]$ maka $f\in HD[a,b]$ dan jika $A\subset[a,b]$ interval tertutup maka*

$$x^{**}_{(f,A)}=\theta.$$

Bukti: Karena $f=\theta$ hampir di mana-mana pada $[a,b]$ maka ada himpunan $A\subset[a,b]$ dengan ukuran himpunan A, $\alpha(A)=0$ sehingga jika $x^*\in X^*$ berlaku

$$x^* f(x)\begin{cases}=0, & x\in[a,b]-A\\ \neq 0, & x\in A\end{cases}.$$

Dibentuk $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ dengan $A_k=\left\{x\in A: k-1\le\left\|f(x)\right\|_X\le k,\ k=1,2,3,...\right\}$ dan $\alpha(A_k)=0$.

Diberikan bilangan $\varepsilon>0$. Untuk setiap k terdapat himpunan terbuka O_k dengan $\alpha(O_k)<\dfrac{\varepsilon}{k.2^k}$ sehingga $A_k\subset O_k$.

Didefinisikan fungsi positif δ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga $N(x,\delta(x))\subset O_k$ untuk $x\in A_k$, $k=1,2,3,...$ dan sebarang fungsi positif untuk x yang lain.

Oleh karena itu, untuk sebarang $A\subset[a,b]$ interval tertutup dan jika $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum_{x\in A}x^* f(x)\alpha(D)-0\right|=$$
$$\left|\sum_{x\in A_k}x^* f(x)\alpha(D)+\sum_{x\notin A_k}x^* f(x)\alpha(D)\right|$$
$$=\left|\sum_{x\in A_k}x^* f(x)\alpha(D)\right|$$
$$\le\left|\sum_{x\in A_k}x^* f(x)\alpha(O_k)\right|$$
$$<\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x^*\right\|_X k\frac{\varepsilon}{2^k k}$$
$$<\varepsilon$$

untuk setiap $x^*\in X^*$ dan $\left\|x^*\right\|_X\le 1$.

Hal ini berarti fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk interval tertutup $A\subset[a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)=(H)\int_A x^* f=0.$$

Jadi $f\in HD[a,b]$ dan

$$x^{**}_{(f,A)}=\theta. \quad ■$$

3. NORM PADA RUANG FUNGSI INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD

Telah ditunjukkan dalam Teorema 2.6 bahwa himpunan fungsi yang terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, yaitu $HD[a,b]$ merupakan ruang linear.

Akan didefinisikan fungsi pada ruang linear $HD[a,b]$.

Definisi 3.1 *Didefinisikan fungsi $\|.\|:HD[a,b]\to R$ dengan*

$$\|f\|=\sup_{\substack{x^*\in X^*\\ \|x^*\|\le 1}}\left(\sup_{A\subset[a,b]}\left|(H)\int_A x^* f\right|\right)$$

untuk setiap $f\in HD[a,b]$.

Dua fungsi f dan g dikatakan ekuivalen jika $f=g$ hampir dimana-mana (*h.d*) pada $[a,b]$, yaitu jika terdapat himpunan terukur-α $E\subset[a,b]$ dengan $\mu_\alpha(E)=0$ sehingga

$$f(x)=g(x),\ \forall x\in[a,b]-E.$$

Teorema 3.2 *Diberikan ruang linear* $HD[a,b]$. *Fungsi* $\|.\|:HD[a,b]\to R$ *dengan*

$$\|f\|=\sup_{\substack{x^*\in X^*\\ \|x^*\|\le 1}}\left(\sup_{A\subset[a,b]}\left|(H)\int_A x^* f\right|\right)$$

untuk setiap $f\in HD[a,b]$ *merupakan norma pada* $HD[a,b]$.

Bukti: Ditunjukkan bahwa fungsi $\|.\|$ merupakan norma pada ruang linear $HD[a,b]$.

(N1). Diambil sebarang $f\in HD[a,b]$.

Karena untuk setiap $x^*\in X^*$ dan $A\subset[a,b]$ berlaku $\left|(H)\int_A x^* f\right|\ge 0$ maka

$$\|f\|=\sup_{\substack{x^*\in X^*\\ \|x^*\|\le 1}}\left(\sup_{A\subset[a,b]}\left|(H)\int_A x^* f\right|\right)\ge 0.$$

Jadi, $\|f\|\ge 0$.

Selanjutnya diperlihatkan bahwa $\|f\|=0 \iff f=\theta$.

Diketahui $f=\theta$, dibuktikan $\|f\|=0$.

Jika $f=\theta$ pada $[a,b]$ maka

$$f(x)=\theta,\ \forall x\in[a,b],$$

sehingga untuk setiap interval tertutup $A\subset[a,b]$ berlaku

$$f(x)=\theta,\ \forall x\in A\subset[a,b].$$

Dengan demikian untuk setiap $x^*\in X^*$ dengan $\|x^*\|\le 1$ diperoleh

$$x^* f(x)=0, \forall x\in A\subset[a,b]$$

sehingga

$$\Rightarrow\ (H)\int_A x^* f=0, \forall x^*\in X^*, \|x^*\|\le 1, \forall x\in A\subset[a,b]$$

$$\Rightarrow\ \left|(H)\int_A x^* f\right|=0, \forall x^*\in X^*, \|x^*\|\le 1, \forall x\in A\subset[a,b]$$

$$\Rightarrow\ \sup_{x\in A}\left|(H)\int_A x^* f\right|=0$$

$$\Rightarrow\ \sup_{\substack{x^*\in X^*\\ \|x^*\|\le 1}}\left(\sup_{A\subset a,b]}\left|(H)\int_A x^* f\right|\right)=0$$

$$\Rightarrow\ \|f\|=0.$$

Jadi jika $f=\theta$ maka $\|f\|=0$.

Diketahui $\|f\|=0$, dibuktikan $f=\theta$.

$$\|f\|=0 \iff \sup_{\substack{x^*\in X^*\\ \|x^*\|\le 1}}\left(\sup_{A\subset[a,b]}\left|(H)\int_A x^* f\right|\right)=0$$

$$\Rightarrow\ \sup_{A\subset[a,b]}\left|(H)\int_A x^* f\right|=0, \forall x^*\in X^*, \|x^*\|\le 1$$

$$\Rightarrow\ \left|(H)\int_A x^* f\right|=0, \forall x^*\in X^*, \|x^*\|\le 1, \forall A\subset[a,b]$$

Andaikan $f\ne\theta$, maka terdapat $x^*\in X^*$ dengan $\|x^*\|\le 1$ sehingga

$$x^* f\ne 0$$

hampir dimana-mana pada $[a,b]$, yaitu terdapat himpunan terukur $A\subset[a,b]$ dengan $\mu_\alpha(A)\ne 0$ sehingga

$$x^* f(x)>0 \text{ atau } x^* f(x)<0$$

hampir dimana-mana pada A.

Oleh karena itu diperoleh

$$\left|(H)\int_A x^* f\right|>0 \text{ atau } \left|(H)\int_A x^* f\right|<0,$$

untuk suatu $x^*\in X^*, \|x^*\|\le 1$ dan $A\subset[a,b]$.

Hal ini kontradiksi dengan $\left|(H)\int_A x^* f\right|=0, \forall x^*\in X^*, \|x^*\|\le 1, \forall A\subset[a,b]$.

Jadi, $f=\theta$.

Jadi jika $\|f\|=0$ maka $f=\theta$.

Oleh karena itu $\|f\|=0 \iff f=\theta$.

(N2). Diambil sebarang $f\in HD[a,b]$ dan sebarang $u\in R$ skalar, diperoleh

$$\|uf\|=\sup_{\substack{x^*\in X^*\\ \|x^*\|\le 1}}\left(\sup_{A\subset[a,b]}\left|(H)\int_A x^*(uf)\right|\right)$$

$$=\sup_{\substack{x^*\in X^*\\ \|x^*\|\le 1}}\left(\sup_{A\subset[a,b]}\left|u(H)\int_A x^* f\right|\right)$$

$$= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} |u| \left| (H) \int_A x^* f \right| \right)$$

$$= |u| \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* f \right| \right)$$

$$= |u| \| f \|.$$

(N3). Diambil sebarang $f, g \in HD[a,b]$ diperoleh

$$\| f + g \| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* (f + g) \right| \right)$$

$$= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* f + (H) \int_A x^* g \right| \right)$$

Karena

$$\sup_{A \subset [a,b]} \left\{ \left| (H) \int_A x^* f + (H) \int_A x^* g \right| \right\}$$

$$\le \sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* f \right| + \sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* g \right|$$

Maka untuk setiap $x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1$ berlaku

$$\sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* f + (H) \int_A x^* g \right| \right)$$

$$\le \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* f \right| \right) + \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* g \right| \right)$$

Jadi,

$$\| f + g \| \le \| f \| + \| g \|.$$

Karena ketiga kondisi di atas dipenuhi maka terbukti bahwa fungsi $\|.\|$ merupakan norma pada $HD[a,b]$. ■

Menurut Teorema 3.2, ruang linear $HD[a,b]$ dengan fungsi

$$\| f \| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* f \right| \right)$$

untuk setiap $f \in HD[a,b]$ merupakan ruang bernorma. Jadi, $\left(HD[a,b], \|.\| \right)$ ruang bernorma terhadap norma

$$\| f \| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* f \right| \right).$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi jarak pada ruang linear $HD[a,b]$.

Definisi 3.3 *Didefinisikan fungsi $d : HD[a,b] \times HD[a,b] \to R$ pada ruang linear $HD[a,b]$ oleh*

$$d(f,g) = \| f - g \|$$

$$= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* (f - g) \right| \right),$$

untuk setiap $f, g \in HD[a,b]$.

Fungsi $d : HD[a,b] \times HD[a,b] \to R$ seperti pada Definisi 3.3 merupakan matrix pada $HD[a,b]$.

Teorema 3.4 *Ruang linear $HD[a,b]$ merupakan ruang matrix terhadap fungsi jarak*

$$d(f,g) = \| f - g \|,$$

untuk setiap $f, g \in HD[a,b]$.

Bukti: Ditunjukkan bahwa fungsi d merupakan matrix pada ruang linear $HD[a,b]$.

(D1). Diambil sebarang dua fungsi $f, g \in HD[a,b]$, diperoleh

$$d(f,g) = \| f - g \| \ge 0.$$

(D2). Diambil sebarang dua fungsi $f, g \in HD[a,b]$, diperoleh

$$d(f,g) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* (f - g) \right| \right), \quad \forall f, g \in HD[a,b]$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left(\sup_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* (f - g) \right| \right), \quad \forall A \subset [a,b], \forall x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left| (H) \int_A x^* (f - g) \right|, \quad \forall A \subset [a,b], \forall x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (H) \int_A x^* (f - g), \quad \forall A \subset [a,b], \forall x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1$$

$\Leftrightarrow \quad 0 = x^*(f-g)(x), \quad \forall x \in A \subset [a,b], \forall x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1$

$\Leftrightarrow \quad \theta = (f-g)(x), \quad \forall x \in A \subset [a,b]$

$\Leftrightarrow \quad f = g$.

(D3). Diambil sebarang dua fungsi $f, g \in HD[a,b]$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \|f-g\| \\ &= \|g-f\| \\ &= d(g,f). \end{aligned}$$

(D4). Diambil sebarang tiga fungsi $f, g, h \in HD[a,b]$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \|f-h\| \\ &= \|f-g+g-h\| \\ &\le \|f-g\| + \|g-h\| \\ &= d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

Jadi, fungsi d merupakan matrix pada $HD[a,b]$. Dengan kata lain, ruang linear $HD[a,b]$ merupakan rungan matrix terhadap matrix d. ■

Definisi 3.5 [18] Ruang linear X dikatakan ruang linear translasi invarian jika terhadap matrix d memenuhi

i) $d(f+h, g+h) = d(f,g)$, dan

ii) $d(cf, cg) = |c| d(f,g)$.

Berdasarkan Definisi 3.5, ruang linear $HD[a,b]$ terhadap matrix seperti pada Definisi 3.3 merupakan ruang linear translasi invarian.

Lemma 3.6 (Translasi Invarian) Ruang linear $HD[a,b]$ merupakan ruang linear translasi invarian terhadap matrix d.

Bukti:

Diambil sebarang $f, g, h \in HD[a,b]$ dan sebarang skalar $c \in R$.

Berdasarkan Definisi 3.3, diperoleh

$$\begin{aligned} d(f+h, g+h) &= \|(f+h)-(g+h)\| \\ &= d(f,g) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} d(cf, cg) &= \|(cf)-(cg)\| \\ &= |c| d(f,g). \end{aligned}$$

Jadi, $HD[a,b]$ merupakan ruang linear translasi invarian. ■

4. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa $HD[a,b]$ merupakan ruang liner dan merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup\limits_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^* f \right| \right)$. Lebih lanjut merupakan ruang matrix terhadap matrix $d(f,g) = \sup\limits_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} \left(\sup\limits_{A \subset [a,b]} \left| (H) \int_A x^*(f-g) \right| \right)$.

Dengan menggunakan matrix tersebut, $HD[a,b]$ merupakan ruang linear translasi invarian.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Gordon, R.A. (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.

[2] Lee P.Y. (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration,* World Scientific, Singapore.

[3] Indrati, Ch. R. (2002), *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n, Disertasi*, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[4] Cao, S.C., (1992), The Henstock Integral for Banach-valued Functions, *Southeast Asian Bull. Math*, 16(-): 35-40.

[5] Cao, S.C., (1993), On The Henstock-Bochner Integral, *Southeast Asian Bull. Math. Special Issue*, p. 1-3.

[6] Lim J.S, Yoon J.H, Eun G.S. (1998), On Henstock Stieltjes Integral, *Kangweon-Kyungki Math. Jour.*, 6(1): 87-96.

[7] Guoju, Ye., Tianqing, An. (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.

[8] Schwabik, S., Guoju, Ye. (2005), *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Singapore.

[9] Saifullah. (2003), *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide* R^n, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[10] Solikhin. (2013), Perluasan Harnack dan Sifat Cauchy Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide R^n, *Jurnal Matematika*, 16(1): 8-12.

[11] Solikhin, YD. Sumanto dan Siti Khabibah. (2013), *Locally dan Globally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b]*, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, 9 November 2013, A.8 halaman 55-64, ISBN 978–979-16353-9-4.

[12] Solikhin, YD. Sumanto dan Siti Khabibah. (2014), Essentially Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Jurnal Matematika*, 17(2): 55-61

[13] Solikhin, Sumanto dan Khabibah. (2012), Functionally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], *Jurnal Sains dan Matematika*, 20(3): 58-63.

[14] Solikhin, Heru Tjahjana dan Solichin Zaki. (2016), Kekonvergenan Barisan Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Jurnal Matematika*, 19(1): 29-39.

[15] Solikhin. (2017), *Karakteristik Fungsi Primitive Integral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY, 25 Februari 2017, hal.107-115 ISBN 978–602-6100-0-0.

[16] Solikhin, Heru Tjahjana dan Solichin Zaki. (2016), *Posisi Integral Henstock-Dunford dan Integral Henstock-Bochner pada* $[a,b]$, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY, 5 Nopember 2016, hal. MA85-MA92 ISBN 978–602-73403-1-2.

[17] Solikhin, YD. Sumanto, Susilo Hariyanto, dan Abdul Aziz. (2017), Syarat Perlu dan Syarat Cukup Integral Henstock-Bochner dan Integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Jurnal Matematika*, 20(1): 29-39.

[18] Kreyszig, E. (1989), *Introductory Funtional Analysis with Applications*, John Willey & Sons, USA.