PENDEKATAN *VALUE* BILANGAN *TRAPEZOIDAL FUZZY* DALAM METODE *MAGNITUDE*

Lathifatul Aulia[1], Bambang Irawanto[2], Bayu Surarso[3]
[1,2,3]Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang
Email: [1]lathifatulaulia213@yahoo.com, [2]b_irawanto@yahoo.co.id[2]

ABSTRACT. Defuzzification is the process to transform fuzzy numbers into real numbers (crisp). There are some defuzzification methods which can be used to confirm the fuzzy numbers. However, different defuzzification methods produce different real numbers (crisp) too. In this paper, we discuss about Magnitude method, that is an approachment method which can be used in the defuzzification of trapezoidal fuzzy numbers. The defuzzification method in the calculation considers average between the value of trapezoidal fuzzy numbers and the middle point of two defuzzifier trapezoidal fuzzy numbers.

Keywords : Fuzzy Numbers, Trapezoidal Fuzzy Numbers, Crisp numbers, Defuzzification, Magnitude.

I. PENDAHULUAN

Teori himpunan *fuzzy* banyak diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu seperti teori kontrol dan manajemen sains, pemodelan matematika dan berbagai aplikasi dalam bidang perindustrian. Karena dalam prateknya kenyataan asumsi kepastian tentang nilai-nilai parameter pada masalah pengambilan keputusan yang dimodelkan sering sulit dipenuhi, maka sering terjadi kekurangakuratan dalam masalah pengambilan keputusan. Untuk memecahkan dan mengakomodasi ketidakpastian tersebut, akan didekati dengan teori himpunan *fuzzy*.

Para ahli telah banyak yang mengusulkan beberapa pendekatan untuk memecahkan masalah yang menggunakan himpunan bilangan *fuzzy*. Hal utama yang perlu dilakukan terlebih dahulu yaitu mentransformasikan bilangan *fuzzy* menjadi bilangan riil tegas (*crisp*) atau proses penegasan (*defuzzifikasi*). Peringkat bilangan *fuzzy* merupakan hal penting dalam banyak model terapan dunia nyata dan dalam prosedur pengambilan keputusan. Pada tahun 2003 Przemyslaw Grzegorzewski dan Edyta Mrowka [1] membahas tentang aproksimasi bilangan *trapezoidal fuzzy*. Aproksimasi bilangan *trapezoidal fuzzy* merupakan aproksimasi terdekat dari bilangan *trapezoidal fuzzy* yang asli dengan mempertahankan interval harapan. Asady dan Zendehnam 2006 [2] menyajikan proses penegasan (*defuzzification*) bilangan *fuzzy* dengan menggunakan jarak minimal anatara dua bilangan *fuzzy*. Metode penegasan tersebut menghasilkan titik terdekat dengan bilangan *fuzzy* dan dapat digunakan dalam mengurutkan bilangan *fuzzy*. Abbasbandy dan Hajjari 2007 [3] menunjukkan pendekatan baru untuk peringkat bilangan *trapezoidal fuzzy* oleh besarnya bilangan *fuzzy*.

Dalam tulisan ini dibahas mengenai proses penegasan (*defuzzifikasi*) bilangan *trapezoidal fuzzy*. Pendekatan metode penegasan ini mempertimbangkan rata-rata antara *value* bilangan *trapezoidal fuzzy* dan nilai tengah dari dua nilai penegas bilangan *trapezoidal fuzzy*. Sehingga *Magnitude* lebih intuitif dalam mengurutkan bilangan-bilangan *trapezoidal fuzzy* (peringkat bilangan *trapezoidal fuzzy*).

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Aproksimasi Bilangan T*rapezoidal Fuzzy*

Berikut didefinisikan bilangan *trapezoidal fuzzy*.

Definisi 2.1 [4] *Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut himpunan fuzzy trapezoidal jika fungsi keanggotaan ($\mu_{\tilde{A}}$) dari bilangan fuzzy dituliskan dengan aturan :*

$$\mu_{\tilde{A}}(x: a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & ,\text{untuk } x \le a \\ l_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{x-a}{b-a} & ,\text{untuk } a \le x \le b \\ 1 & ,\text{untuk } b \le x \le c \\ r_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{d-x}{d-c} & ,\text{untuk } c \le x \le d \\ 0 & ,\text{untuk } x \ge d. \end{cases}$$

Untuk selanjutnya bilangan *trapezoidal fuzzy* $\tilde{A}$ dituliskan $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ dengan a, b, c, d seperti pada fungsi keanggotaan pada Definisi 3.1.

Definisi 2.2 [5] *Diberikan bilangan fuzzy $\tilde{A}$, potongan$-\alpha$ dari bilangan fuzzy $\tilde{A}$ adalah interval tertutup $\tilde{A}_\alpha = [\tilde{A}_L(\alpha), \tilde{A}_U(\alpha)]$, dengan $\tilde{A}_L(\alpha) = inf\{x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\}$ dan $\tilde{A}_U(\alpha) = sup\{x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\}$.*

Jika sisi-sisi dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ merupakan monoton *strictly* sehingga dapat diketahui bahwa $\tilde{A}_L(\alpha)$ dan $\tilde{A}_U(\alpha)$ merupakan fungsi invers dari $l_{\tilde{A}}$ dan $r_{\tilde{A}}$. Secara umum dengan menggunakan ketentuan bahwa $l_{\tilde{A}}(x)^{-1} = inf\{x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\} = \tilde{A}_L(\alpha)$ dan $r_{\tilde{A}}(x)^{-1} = sup\{x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\} = \tilde{A}_U(\alpha)$.

Definisi 2.3 [1] *Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dengan potongan – α adalah $[\tilde{A}_L(\alpha), \tilde{A}_U(\alpha)]$ dan $[\tilde{B}_L(\alpha), \tilde{B}_U(\alpha)]$, dimana $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$. Jarak antara $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\begin{matrix} \int_0^1 \left(\tilde{A}_L(\alpha) - \tilde{B}_L(\alpha)\right)^2 d\alpha \\ + \int_0^1 \left(\tilde{A}_U(\alpha) - \tilde{B}_U(\alpha)\right)^2 d\alpha \end{matrix}} \qquad (2.1)$$

Definisi 2.4 [2] *Interval harapan $EI(\tilde{A})$ dari bilangan fuzzy $(\tilde{A})$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$EI(\tilde{A}) = \left[\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)\, d\alpha, \int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)\, d\alpha\right]. \qquad (2.2)$$

Secara intuitif Interval harapan $EI(\tilde{A})$ merupakan interval terdekat suatu bilangan *fuzzy* $(\tilde{A})$.

Pada bagian ini dijelaskan mengenai aproksimasi bilangan *trapezoidal fuzzy* dari suatu bilangan *trapezoidal fuzzy*. Hasil aproksimasi bilangan *trapezoidal fuzzy* adalah suatu bilangan *trapezoidal fuzzy* terdekat dengan bilangan *fuzzy* asli. Dimana dalam aproksimasi terdapat nilai suatu bilangan *fuzzy* (*value*) merupakan nilai tegas bilangan *trapezoidal fuzzy*. Suatu *operator* aproksimasi $T: \mathbb{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{F}^T(\mathbb{R})$ adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan *fuzzy* $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ ke himpunan $\mathbb{F}^T(\mathbb{R})$ yang merupakan pendekatan dari bilangan-bilangan *fuzzy* dalam $\mathbb{F}(\mathbb{R})$. Bilangan *trapezoidal fuzzy* yang menunjukkan bilangan *fuzzy* yang paling dekat dengan bilangan *fuzzy* yang asli, termasuk semua bilangan *trapezoidal fuzzy* mempunyai interval harapan sama ke setiap himpunan bilangan *fuzzy* seperti aslinya. Selanjutnya, operator tersebut disebut *operator* aproksimasi bilangan *trapezoidal fuzzy* terdekat yang tetap mempertahankan interval harapan.

Diberikan bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$, ditentukan bilangan *fuzzy* $T(\tilde{A})$ merupakan bilangan *fuzzy* terdekat dengan $\tilde{A}$ dengan menggunakan perhitungan jarak metrik d. Karena bilangan *trapezoidal fuzzy* secara lengkap ditunjukkan dengan empat bilangan riil yang terbatas pada pendukung dan *core*. Pandang $T(\tilde{A}) = T(t_1, t_2, t_3, t_4)$ dengan $[T_L(\alpha), T_U(\alpha)]$ merupakan potongan$-\alpha$ dari $T(\tilde{A})$, maka $[T_L(\alpha), T_U(\alpha)] = [t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_4 - (t_4 - t_3)\alpha]$. Pandang jarak $d\left(\tilde{A}, T(\tilde{A})\right)$

merupakan jarak antara bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ dan bilangan *fuzzy* $T(\tilde{A})$.

$$d\left(\tilde{A}, T(\tilde{A})\right) = \sqrt{\int_0^1 (\tilde{A}_L(\alpha) - T_L(\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (\tilde{A}_U(\alpha) - T_U(\alpha))^2 d\alpha}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (\tilde{A}_L(\alpha) - (t_1 + (t_2 - t_1)\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (\tilde{A}_U(\alpha) - (t_4 - (t_4 - t_3)\alpha))^2 d\alpha}, \quad (2.3)$$

Untuk menentukan bilangan *trapezoidal fuzzy* tidak cukup dengan bilangan *fuzzy* terdekat tetapi perlu memperhatikan interval harapan dari bilangan *fuzzy* tersebut. Dalam menentukan bilangan riil yang terdiri $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ dengan meminimalkan persamaan (2.3) dan memenuhi kondisi

$$EI\left(T(\tilde{A})\right) = EI(\tilde{A})$$

Sehingga dapat ditulis kembali dan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\left[\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_3+t_4}{2}\right] = \left[\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha) d\alpha, \int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha) d\alpha\right]. \quad (2.4)$$

Sebelumnya, untuk menyelesaikan masalah tersebut, terlebih dahulu membentuk fungsi *Lagrange* dengan λ_1, λ_2 sebagai konstanta pengali *Lagrange*, yaitu

$$H(t_1, t_2, t_3, t_4, \lambda_1, \lambda_2) = d^2\left(\tilde{A}, T(\tilde{A})\right) + \lambda_1\left(\frac{t_1+t_2}{2} - \int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha) d\alpha\right) + \lambda_2\left(\frac{t_3+t_4}{2} - \int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha) d\alpha\right) \quad (2.5)$$

Selanjutnya, menentukan turunan parsial dari fungsi *Lagrange* $H(t_1, t_2, t_3, t_4)$ dan kemudian menghitung solusi dari fungsi tersebut.

$$\left(\frac{\partial H(t_1,t_2,t_3,t_4,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial t_1}\right) = 2\int_0^1 [\tilde{A}_L(\alpha) - (t_1 + (t_2 - t_1)\alpha)](\alpha - 1) d\alpha + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0, \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial H(t_1,t_2,t_3,t_4,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial t_2}\right) = 2\int_0^1 [\tilde{A}_L(\alpha) - (t_1 + (t_2 - t_1)\alpha)](-\alpha) d\alpha + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0, \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial H(t_1,t_2,t_3,t_4,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial t_3}\right) = 2\int_0^1 [\tilde{A}_U(\alpha) - (t_4 - (t_4 - t_3)\alpha)](-\alpha) d\alpha + \frac{1}{2}\lambda_2 = 0, \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial H(t_1,t_2,t_3,t_4,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial t_4}\right) = 2\int_0^1 [\tilde{A}_U(\alpha) - (t_4 - (t_4 - t_3)\alpha)](\alpha - 1) d\alpha + \frac{1}{2}\lambda_2 = 0, \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\partial H(t_1,t_2,t_3,t_4,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}\right) = \frac{t_1+t_2}{2} - \int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha) d\alpha = 0, \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\partial H(t_1,t_2,t_3,t_4,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}\right) = \frac{t_3+t_4}{2} - \int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha) d\alpha = 0. \quad (2.11)$$

Jadi, dari proses penjabaran dan penyelesaian fungsi $H(t_1, t_2, t_3, t_4, \lambda_1, \lambda_2)$ diperoleh solusi penyelesaian sebagai berikut

$$t_1 = t_1(\tilde{A}) = -6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha) d\alpha + 4\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha) d\alpha, \quad (2.12)$$

$$t_2 = t_2(\tilde{A}) = 6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha) d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha) d\alpha, \quad (2.13)$$

$$t_3 = t_3(\tilde{A}) = 6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha) d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha) d\alpha, \quad (2.14)$$

$$t_4 = t_4(\tilde{A}) = -6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha + 4\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha. \quad (2.15)$$

Selanjutnya di tentukan nilai determinan submatriks yaitu

$$det\left[\frac{\partial^2 H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_i \partial t_j}\right] =$$

$$\det\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}$$

dan $\det\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t_i \partial t_j}\right]_{i=1,2,3;j=1,2,3} = \frac{2}{9} > 0$,

$\det\left[\frac{\partial^2 H}{\partial {t_1}^2}\right] = \frac{2}{3} > 0$,

$\det\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t_i \partial t_j}\right]_{i=1,2;j=1,2} = \frac{1}{3} > 0$,

Karena $\det\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t_i \partial t_j}\right]_{i=1,2,3;j=1,2,3} = \frac{2}{9} > 0$, $\det\left[\frac{\partial^2 H}{\partial {t_1}^2}\right] = \frac{2}{3} > 0$, $\det\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t_i \partial t_j}\right]_{i=1,2;j=1,2} = \frac{1}{3} > 0$ maka menunjukkan bahwa $D\left(\tilde{A}, T(\tilde{A})\right)$ meminimalkan. Secara langsung ditunjukkan bahwa $d\left(\tilde{A}, T(\tilde{A})\right)$ juga meminimalkan.

Suatu fungsi kontinu $s: [0,1] \rightarrow [0,1]$ merupakan *reduce function*.

Definisi 2.6 [1] Jika $\tilde{A}$ merupakan bilangan *trapezoidal fuzzy* dengan interval harapan $[\tilde{A}_L(\alpha), \tilde{A}_U(\alpha)]$ sebagai potongan$-\alpha$, dan s merupakan *reduce function*. Nilai terhadap fungsi s $\left(Val_s(\tilde{A})\right)$ dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$Val_s(\tilde{A}) = \int_0^1 s(\alpha)[\tilde{A}_L(\alpha) + \tilde{A}_U(\alpha)]d\alpha$$

$Val_s(\tilde{A})$ dapat dipandang sebagai titik yang sesuai dengan *magnitude* (besarnya) bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang merupakan nilai tegas dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$.

Berikut hasil dari nilai tegas suatu bilangan *trapezoidal fuzzy* mengakibatkan nilai keraguan (*ambiguitas*). Selanjutnya diukur nilai keraguan dari bilangan *fuzzy*.

Misalkan suatu bilangan *trapezoidal fuzzy* $\tilde{A} = (a,b,c,d)$ mempunyai nilai $Val_s(\tilde{A}) = \frac{b+c}{2} + \frac{(d-c)-(b-a)}{6}$. Menurut Definisi 2.6 mudah untuk menunjukkan bahwa bilangan *trapezoidal fuzzy* $T(\tilde{A}) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ dengan *regular reduce function* $s(\alpha) = \alpha$, maka

$$Val_s\left(T(\tilde{A})\right) = \frac{t_3+t_2}{2} + \frac{(t_4-t_3)-(t_2-t_1)}{6} \quad (2.16)$$

Dengan mensubstitusikan persamaa (2.12), (2.13), (2.14), dan (2.15) ke dalam persamaan (2.16) diperoleh

$$Val_s\left(T(\tilde{A})\right) = \frac{1}{2}\left[6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha + 6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha\right] + \frac{1}{6}\left[\left(-6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha + 4\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - \left(6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha\right)\right) - \left(6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha - \left(-6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha + 4\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha\right)\right)\right]$$

$$= \int_0^1 \alpha[\tilde{A}_U(\alpha) + \tilde{A}_L(\alpha)]d\alpha = Val_s(\tilde{A}).$$

2.3 *Magnitude* untuk *Ranking* Bilangan *Trapezoidal Fuzzy*

Selain Definisi 2.1, untuk bilangan *trapezoidal fuzzy* juga dapat dinyatakan dalam bentuk lain. Adapun definisinya sebagai berikut :

Definisi 2.8 [3] *Suatu bilangan fuzzy dinyatakan dengan parameter* $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$ *dalam bentuk sepasang* $(\underline{\widetilde{U}}, \overline{\widetilde{U}})$ *merupakan fungsi dari* $\underline{\widetilde{U}}(r), \overline{\widetilde{U}}(r), 0 \le r \le 1,$ *yang memenuhi persyaratan sebagai berikut :*

1. $\underline{\widetilde{U}}(r)$ *adalah fungsi kontinu monoton naik terbatas kiri,*
2. $\overline{\widetilde{U}}(r)$ *adalah fungsi kontinu monoton turun terbatas kanan.*
3. $\underline{\widetilde{U}}(r) \le \overline{\widetilde{U}}(r),\ 0 \le r \le 1.$

Suatu bilangan *trapezoidal fuzzy* $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$, dengan dua penegas x_0, y_0, dan kekaburan kiri $\sigma > 0$ dan kekaburan kanan $\beta > 0$ pada suatu himpuann fuzzy dimana fungsi keanggotaan adalah

$$\widetilde{U}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}(x - x_0 + \sigma), & \text{untuk } x_0 - \sigma \le x \le x_0, \\ 1, & \text{untuk } x \epsilon [x_0, y_0], \\ \frac{1}{\beta}(y_0 - x + \beta), & \text{untuk } y_0 \le x \le y_0 + \beta, \\ 0, & \text{untuk x yang lainnya.} \end{cases}$$

dan bentuk parameternya adalah

$\underline{\widetilde{U}}(r) = x_0 - \sigma + \sigma r,\ \overline{\widetilde{U}}(r) = y_0 + \beta - \beta r.$

Metode *ranking* bilangan *trapezoidal fuzzy* ini berdasarkan pada perbedaan fungsi keanggotaan kiri dan kanan pada beberapa potongan$-\alpha$ dari bilangan *trapezoidal fuzzy*. *Magnitude* adalah besarnya suatu bilangan *fuzzy* yang merupakan bilangan riil tegas (*crisp*) dari suatu bilangan *trapezoidal fuzzy* [1]. Bilangan *trapezoidal fuzzy* $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$ dengan bentuk parameter $\widetilde{U} = (\underline{\widetilde{U}}(r), \overline{\widetilde{U}}(r))$, *magnitude* bilangan *trapezoidal fuzzy* $\widetilde{U}$ adalah $Mag(\widetilde{U}) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\underline{\widetilde{U}}(r) + \overline{\widetilde{U}}(r) + x_0 + y_0\right) f(r) dr\right]$ [3]. Proses dibentuknya *Magnitude* sebagai berikut.

1. Pandang bilangan *trapezoidal fuzzy* $T(\tilde{A}) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ dengan nilai $Val_{(s)}(T(\tilde{A})) = \frac{t_3+t_2}{2} + \frac{(t_4-t_3)-(t_2-t_1)}{6}$,
2. Tambahkan $\frac{t_3+t_2}{2}$ sebagai titik pusat bilangan *fuzzy* $T(\tilde{A})$ pada $Val_{(s)}(T(\tilde{A}))$,
3. Tentukan nilai rata-rata antara $\frac{t_3+t_2}{2}$ dan $Val_{(s)}T(\tilde{A})$, maka diperoleh Rata-rata nilai (*value*) yang baru dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ adalah

$$\frac{1}{2}\left[Val_{(s)}\, T(\tilde{A}) + \frac{t_3+t_2}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{t_3+t_2}{2} + \frac{(t_4-t_3)-(t_2-t_1)}{6} + \frac{t_3+t_2}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(t_3 + t_2 + \frac{(t_4-t_3)-(t_2-t_1)}{6}\right)$$
$$= \left(\frac{t_3+t_2}{2} + \frac{(t_4-t_3)-(t_2-t_1)}{12}\right)$$

Dari perhitungan nilai bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang baru diperoleh nilai (*value*) yang lebih kecil dari perhitungan $Val_{(s)}\, T(\tilde{A})$. Karena dalam perhitungan nilai yang baru membagi titik-titik suatu bilangan *fuzzy* menjadi lebih kecil sehingga hasil yang diperoleh lebih mendekati titik tengah dari suatu bilangan *trapezoidal fuzzy*.

Perhitungan nilai bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang baru dapat dinyatakan ke dalam bentuk lain mengikuti Definisi 2.6. Diketahui bilangan *trapezoidal fuzzy* $\tilde{A} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ maka

$$Val_{(s)baru}(\tilde{A}) = \frac{t_3+t_2}{2} + \frac{(t_4-t_3)-(t_2-t_1)}{12} \quad (2.17)$$

Jika bilangan *trapezoidal fuzzy* $\tilde{A} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ dinyatakan dalam $\tilde{A} = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$ maka $Val_{(s)baru}(\tilde{A})$ menjadi

$$Val_{(s)baru}(\tilde{A}) = \frac{x_0+y_0}{2} + \frac{\beta-\sigma}{12} \quad (2.18)$$

Teorema 2.4 *Jika* $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$ *adalah bilangan trapezoidal fuzzy dengan bentuk parameter* $\widetilde{U} = (\underline{\widetilde{U}}(r), \overline{\widetilde{U}}(r))$, *dan*

$f(r)$ merupakan reduce function maka Magnitude "Mag" adalah

$$Mag(\widetilde{U}) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\underline{\widetilde{U}}(r) + \overline{\widetilde{U}}(r) + x_0 + y_0\right) f(r)dr\right]$$

Bukti :

Dari Definisi 2.8 diketahui bahwa $\left(\underline{\widetilde{U}}(r), \overline{\widetilde{U}}(r)\right)$ adalah parameter untuk perhitungan batas atas dan batas bawah dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{U}$, dengan bentuk parameter $\underline{\widetilde{U}}(r) = x_0 - \sigma + \sigma r$, $\overline{\widetilde{U}}(r) = y_0 + \beta - \beta r$,

Selanjutnya ditunjukkan $Val_{(s)baru}(\tilde{A})$ menurut Definisi 2.6 dengan mensubstitusikan persamaan (2.12), (2.13), (2.14), dan (2.15) ke dalam persamaan (2.17) sebagai berikut:

$$Val_{(s)baru}(\tilde{A}) = \frac{t_3+t_2}{2} + \frac{(t_4-t_3)-(t_2-t_1)}{12}$$

$$\begin{aligned}
Val_{(s)baru}(\tilde{A}) = {} & \frac{1}{2}\left[6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha + 6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha\right] + \\
& \frac{1}{12}\left[\left(-6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha + 4\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - \left(6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - \right.\right.\right. \\
& \left.\left. 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha\right)\right) - \left(6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha - \right. \\
& \left.\left.\left(-6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha + 4\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \frac{1}{2}\left[6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha + 6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha\right] + \\
& \frac{1}{12}[-6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha + 4\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - 6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha + \\
& 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - 6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha + 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha - 6\int_0^1 \alpha\, \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha + \\
& 4\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \alpha(\tilde{A}_U(\alpha) + \tilde{A}_L(\alpha))\, d\alpha + \frac{1}{2}\left(6\int_0^1 \alpha(\tilde{A}_U(\alpha))\, d\alpha + 6\int_0^1 \alpha(\tilde{A}_L(\alpha))\, d\alpha - \right.\right. \\
& \left.\left. 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \alpha(\tilde{A}_U(\alpha) + \tilde{A}_L(\alpha))\, d\alpha + \frac{1}{2}\left(\left(6\int_0^1 \alpha(\tilde{A}_U(\alpha))\, d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_U(\alpha)d\alpha\right) + \right.\right. \\
& \left.\left.\left(6\int_0^1 \alpha(\tilde{A}_L(\alpha))\, d\alpha - 2\int_0^1 \tilde{A}_L(\alpha)d\alpha\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \alpha(\tilde{A}_U(\alpha) + \tilde{A}_L(\alpha))\, d\alpha + \frac{1}{2}(t_2 + t_3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \alpha\left[\tilde{A}_L(\alpha) + \tilde{A}_U(\alpha)\right] d\alpha + (t_3 + t_2)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \alpha\left[\tilde{A}_L(\alpha) + \tilde{A}_U(\alpha)\right] d\alpha + (t_3 + t_2)\int_0^1 \alpha\, d\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \alpha\left[\tilde{A}_L(\alpha) + \tilde{A}_U(\alpha) + (t_3 + t_2)\right] d\alpha\right] \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) yang diperoleh dari perhitungan $Val_{(s)baru}(\tilde{A})$ untuk bilangan *trapezoidal fuzzy* sama dengan perhitungan untuk menegaskan bilangan *trapezoidal fuzzy* menggunakan *Magnitude*.

$$Val_{(s)baru}(\tilde{A}) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \alpha\left[\tilde{A}_L(\alpha) + \tilde{A}_U(\alpha) + (t_3 + t_2)\right] d\alpha\right]$$

Telah diketahui sebelumnya bahwa bilangan *trapezoidal fuzzy* $\tilde{A} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ yang dinyatakan dalam $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$, dimana

$t_2 = x_0$

$t_3 = y_0$

$t_2 - t_1 = \sigma \Leftrightarrow \; t_1 = x_0 - \sigma$

$t_4 - t_3 = \beta \Leftrightarrow \; t_4 = \beta + y_0$

Sehingga

$\tilde{A}_L(\alpha) = \alpha(t_2 - t_1) + t_1$

$\tilde{A}_L(\alpha) = \alpha\sigma + x_0 - \sigma$

$\tilde{A}_L(\alpha) = (\alpha - 1)\sigma + x_0$

$\tilde{A}_U(\alpha) = t_4 - (t_4 - t_3)\alpha$

$\tilde{A}_U(\alpha) = \beta + y_0 - \beta\alpha$

$\tilde{A}_U(\alpha) = y_0 + (1 - \alpha)\beta$

Maka didapat persamaan seperti berikut :

$$\begin{aligned} Val_{(s)baru}(\tilde{A}) &= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^1 \alpha\left[\tilde{A}_L(\alpha) + \tilde{A}_U(\alpha) + (t_3 + t_2)\right] d\alpha\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^1 \alpha\left[\tilde{A}_L(\alpha) + \tilde{A}_U(\alpha) + (x_0 + y_0)\right] d\alpha\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^1 \alpha\left[\left((\alpha - 1)\sigma + x_0\right) + (y_0 + (1 - \alpha)\beta) + (x_0 + y_0)\right] d\alpha\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\underline{\widetilde{U}}(r) + \overline{\widetilde{U}}(r) + x_0 + y_0\right) f(r)dr\right] = Mag(\widetilde{U}) \end{aligned}$$

dimana $s(\alpha) = f(r)$ merupakan *reduce function.*

Misalkan $\widetilde{\mathrm{H}} = (40,60,10,10)$ merupakan bilangan *trapezoidal fuzzy* yang diubah kedalam bilangan tegas dengan *Magnitude* diperoleh :

Contoh 2.2

$\underline{\widetilde{\mathrm{H}}}(r) = \; x_0 - \sigma + \sigma r = 40 - 10 + 10r \;, \; \overline{\widetilde{\mathrm{H}}}(r) = y_0 + \beta - \beta r = 60 + 10 - 10r$

$$Mag(\widetilde{\mathrm{H}}) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\widetilde{\mathrm{H}}(r) + \overline{\widetilde{\mathrm{H}}}(r) + x_0 + y_0\right) f(r)dr\right]$$

$Mag(\widetilde{\mathrm{H}}) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (40 - 10 + 10r + 60 + 10 - 10r + 40 + 60) f(r)dr\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (200) r \, dr\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{200}{2} r^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{200}{2}\right] = \frac{200}{4} = 50$

Sehingga diperoleh nilai *Magnitude* yaitu $Mag(\widetilde{\mathrm{H}}) = 50$.

Operasi aritmatika antara dua buah bilangan *trapezoidal fuzzy* didefiniskan menurut prinsip perluasan.

Definisi 2.9 [3] *Diberikan* $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma_0, \beta_0)$ *dan* $\tilde{V} = (x_1, y_1, \sigma_1, \beta_1)$ *adalah dua bilangan trapezoidal fuzzy, dengan* $\widetilde{U} = \left(\underline{\widetilde{U}}, \overline{\widetilde{U}}\right)$ *dan* $\tilde{V} = \left(\underline{\tilde{V}}, \overline{\tilde{V}}\right)$ *didefinisikan.*

i. $\widetilde{\mathrm{U} \oplus \mathrm{V}} = (x_0, y_0, \sigma_0, \beta_0) \oplus (x_1, y_1, \sigma_1, \beta_1)$

$= (x_0 + x_1, y_0 + y_1, \sigma_0 + \sigma_1, \beta_0 + \beta_1)$

a. $(\underline{\widetilde{U \oplus V}})(r) = \underline{\widetilde{U}}(r) + \underline{\widetilde{V}}(r) = (x_0 - \sigma_0 + \sigma_0 r) + (x_1 - \sigma_1 + \sigma_1 r) = (x_0 + x_1) + (\sigma_0 + \sigma_1)r - (\sigma_0 + \sigma_1)$

b. $\left(\overline{\widetilde{U \oplus V}}\right)(r) = \overline{\widetilde{U}}(r) + \overline{\widetilde{V}}(r) = (y_0 + \beta_0 - \beta_0 r) + (y_1 + \beta_1 - \beta_1 r)$
$= (y_0 + y_1) + (\beta_0 + \beta_1) - (\beta_0 + \beta_1)r$

ii. $(k\widetilde{U}) = (k(x_0, y_0, \sigma_0, \beta_0)) = (kx_0, ky_0, k\sigma_0, k\beta_0)$

a. $(\underline{k\widetilde{U}})(r) = k\underline{\widetilde{U}}(r) = k(x_0 - \sigma_0 + \sigma_0 r) = (kx_0 - k\sigma_0 + k\sigma_0 r)$, untuk $k > 0$,

b. $\left(\overline{k\widetilde{U}}\right)(r) = k\overline{\widetilde{U}}(r) = k(y_0 + \beta_0 - \beta_0 r) = (ky_0 - k\beta_0 r + k\beta_0)$. untuk $k > 0$,

Teorema 2.5 [3]
Untuk dua bilangan trapezoidal fuzzy $\widetilde{U}$ dan $\widetilde{V} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, dengan $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma_0, \beta_0)$ dan $\widetilde{V} = (x_1, y_1, \sigma_1, \beta_1)$. Berlaku :

$$Mag(\widetilde{U \oplus V}) = Mag(\widetilde{U}) \oplus Mag(\widetilde{V})$$

Teorema 2.6 [3] *Untuk semua bilangan trapezoidal fuzzy simetris $\widetilde{U} = (-x_0, x_0, \sigma, \sigma)$. Berlaku :*

$$Mag(\widetilde{U}) = 0$$

Teorema 2.7 [3]*Untuk setiap dua bilangan trapezoidal fuzzy simetris $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma, \sigma)$ dan $\widetilde{V} = (x_0, y_0, \sigma, \sigma)$. Berlaku:*

$$Mag(\widetilde{U}) = Mag(\widetilde{V})$$

Teorema 2.8 *Untuk setiap bilangan trapezoidal fuzzy $\widetilde{U} = (x_0, y_0, \sigma_0, \beta_0)$ dan $k > 0\ \forall\ \widetilde{U} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ k merupakan konstanta. Berlaku :*

$$Mag(k\widetilde{U}) = kMag(\widetilde{U})$$

Bukti :

$$(k\widetilde{U}) = (k(x_0, y_0, \sigma_0, \beta_0)) = (kx_0, ky_0, k\sigma_0, k\beta_0)$$
$$(\underline{k\widetilde{U}})(r) = k\underline{\widetilde{U}}(r) = k(x_0 - \sigma_0 + \sigma_0 r) = (kx_0 - k\sigma_0 + k\sigma_0 r)$$
$$\left(\overline{k\widetilde{U}}\right)(r) = k\overline{\widetilde{U}}(r) = k(y_0 + \beta_0 - \beta_0 r) = (ky_0 - k\beta_0 r + k\beta_0)$$
$$Mag(k\widetilde{U}) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\underline{k\widetilde{U}}(r) + \overline{k\widetilde{U}}(r) + kx_0 + ky_0\right) f(r)dr\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (kx_0 - k\sigma_0 + k\sigma_0 r + ky_0 + k\beta_0 - k\beta_0 r + kx_0 + ky_0) f(r)dr\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 k(x_0 - \sigma_0 + \sigma_0 r + y_0 + \beta_0 - \beta_0 r + x_0 + y_0) f(r)dr\right]$$
$$= \frac{1}{2}k\left[\int_0^1 (x_0 - \sigma_0 + \sigma_0 r + y_0 + \beta_0 - \beta_0 r + x_0 + y_0) f(r)dr\right]$$
$$= kMag(\widetilde{U}).\ \therefore Terbukti.$$

Contoh 2.3 Diberikan bilangan *trapezoidal fuzzy* yaitu $\widetilde{U} = (5, 6, 2, 2)$ dan $k = 2 > 0$, $\forall\ \widetilde{U} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ maka diperoleh

$$Mag(k\widetilde{U}) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\underline{k\widetilde{U}}(r) + \overline{k\widetilde{U}}(r) + kx_0 + ky_0\right) f(r)dr\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (kx_0 - k\sigma_0 + k\sigma_0 r + ky_0 + k\beta_0 - k\beta_0 r + kx_0 + ky_0) f(r)dr\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 44r\, dr = \frac{1}{2}[22] = 11$$
$$Mag(\widetilde{U}) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\underline{\widetilde{U}}(r) + \overline{\widetilde{U}}(r) + x_0 + y_0\right) f(r)dr\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (x_0 - \sigma_0 + \sigma_0 r + y_0 + \beta_0 - \beta_0 r + x_0 + y_0) f(r)dr\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 22r\, dr = \frac{1}{2}[11] = 5{,}5$$

Sehingga untuk $kMag(\widetilde{U}) = 2 \times 5{,}5 = 11$.

Definisi 2.10 [3] *Diberikan dua bilangan trapezoidal fuzzy $\tilde{U}$ dan $\tilde{V} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$. Ranking atau urutan antara dua bilangan trapezoidal fuzzy yang didefinisikan sebagai berikut:*

i. $Mag(\tilde{U}) > Mag(\tilde{V})$ *jika dan hanya jika* $\tilde{U} \succ \tilde{V}$,

ii. $Mag(\tilde{U}) = Mag(\tilde{V})$ *jika dan hanya jika* $\tilde{U} \sim \tilde{V}$.

Contoh 2.4

maka sesuai definisi sifat perbandingan relasi bilangan trapesium *fuzzy*, dengan cara yang sama diperoleh:

a. $\mathrm{Mag}(4,5,3{,}3) = 4{,}5 > \mathrm{Mag}(4,5,3,1) = 4{,}333$ sehingga $(4,5,3{,}3) \succ (4,5,3{,}1)$
b. $Mag\ (3,4,2,1) = 3{,}42 < Mag(3,4,1{,}7) = 4$ sehingga $(3,4,2,1) \prec (3,4,1,7)$
c. $Mag(3,4,1,7) = 4 = Mag(3,5,2,2) = 4$ sehingga $(3,4,1,7) \sim (3,5,2,2)$.

III. KESIMPULAN

Magnitude digunakan untuk mengkonversi bilangan *trapezoidal fuzzy* menjadi bilangan tegas (*crisp*) sekaligus membandingkan dua bilangan *trapezoidal fuzzy.* Proses diperolehnya perhitungan *Magnitude* berdasarkan nilai (Val) suatu bilangan *trapezoidal fuzzy.* Definisi nilai (Val) bilangan *trapezoidal fuzzy* yang ada ditambahkan dengan nilai tengah bilangan *trapezoidal fuzzy* menjadi nilai (Val) baru. Selanjutnya, menghitung rata-rata nilai (Val) baru sehingga diperoleh nilai yang lebih dekat dengan nilai tengah (*middle point*) dari bilangan *trapezoidal fuzzy* tersebut. Sehingga diperoleh perhitungan *Magnitude* yang merupakan metode pendekatan sebagai penegas bilangan *trapezoidal fuzzy.* Tujuan *Magnitude* selain untuk menegaskan bilangan *trapezoidal fuzzy* yaitu dapat digunakan untuk membandingkan bilangan-bilangan *trapezoidal fuzzy.*

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Grzegorzewski, Przemyslaw dan Mrowka, Edyta. 2003. "*Trapezoidal Approximations of Fuzzy Numbers".* Fuzzy Sets and Systems, 153, 115-135.

[2] Asady, B. dan Zendehnam, A..2006. "*Ranking Fuzzy Numbers by Distance Minimization*", Applied Mathematical Modeling, 31, 2589-2598.

[3] Abbasbandy, S. dan Hajjari, T..2007. "*A New Approach for Ranking of Trapezoidal Fuzzy Numbers*", Comput. Math. Appl., 57, 413-419.

[4] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[5] Hajjari, T. 2015. "*Fuzzy Risk Analysis Based on Ranking of Fuzzy Numbers Via New Magnitude Method*", Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol. 12, No. 3, pp. 17-29.