

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN VIRUS EBOLA

Nok Muntoyimah¹, Widowati², YD. Sumanto³

^{1,2,3}Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika UNDIP

Jl. Prof. Soedarto, S.H. Semarang, 50275

Email: ²widowati_math@undip.ac.id

Abstract. The Ebola virus disease is caused by the Ebola Virus Deceased (EVD), it belongs to the Fioviridae virus family. Ebola virus can be transmitted through direct contact with infected bodily fluids, organ secretions, blood, and surfaces or objects contaminated by the virus. The spread of the Ebola virus is examined in the form of mathematical models of SEIR-D (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovery, Death*). The value of the basic reproduction number (\mathcal{R}_0) was calculated to determine the spread of the Ebola virus. Then, look for disease-free equilibrium and endemic equilibrium and stability analysis of equilibrium points. Numerical simulations performed by entering the initial values and parameter values. From the numerical analysis it is known that the basic reproduction number $\mathcal{R}_0 > 1$ so that the stability point of disease-free equilibrium model of the Ebola virus is not stable, whereas the stability of endemic equilibrium point of the model ebola virus is locally asymptotically stable, which means it has spread ebola virus.

Keywords : Ebola Virus, SEIR-D Model, Equilibrium Point, Stability Analysis, Basic Reproduction Number, Numerical Simulation

I. PENDAHULUAN

Perkembangan teknologi dan informasi semakin meningkat seiring dengan perkembangan dan kemajuan di bidang ilmu pengetahuan, berbanding lurus dengan teknologi dan informasi yang berkembang saat ini, salah satunya yaitu di bidang matematika. Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda, di antaranya di bidang-bidang seperti fisika, biologi, kedokteran, teknik, ilmu sosial, ekonomi, bisnis dan keuangan, juga masalah-masalah pada jaringan komputer [1].

Penyakit ebola merupakan suatu penyakit yang disebabkan oleh virus ebola yang disebut *Ebola Virus Deceased* (EVD), merupakan keluarga virus *filoviridae*. Virus ebola ditemukan pertama kali pada tahun 1976 di Sudan, Republik Demokratik Kongo, di sebuah desa yang terletak dekat Sungai Ebola yang menjadi nama dari penyakit tersebut [2]. Beberapa penelitian dilakukan untuk memperkirakan jumlah reproduksi dasar wabah virus ebola [3,4,5]. Sedangkan, Agosto et al.[6] menggunakan data kejadian dari Guinea untuk memperkirakan jumlah reproduksi dasar

(\mathcal{R}_0) dan menyelidiki dampak dari tindakan pengendalian non-farmasi. Althaus [3] melakukan penelitian untuk memperkirakan jumlah reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dari wabah virus ebola menggunakan data kejadian dan model SEIR (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovery*).

Model matematika pada penyebaran virus ebola dijelaskan oleh Agosto [7] dimodelkan dengan menggunakan model matematika SEIR-D (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovery-Death*). Perbedaan model matematika yang digunakan dari model sebelumnya adalah pada klas *Infected* dan *Recovery*. Klas *infected* dibagi dalam dua klas lagi, yaitu klas *early-stage infection* dan *late-stage infection* serta klas *recovery* dibagi menjadi klas *recovered* dan *immunity*.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Model Matematika Penyebaran Virus Ebola

Model matematika memiliki peranan yang penting dalam menganalisa suatu fenomena epidemik dalam bidang kesehatan dengan mengetahui tingkat penyebaran virus pada penyakit menular. Dalam dinamika penyebaran epidemik ada

kontak antara individu yang rentan terhadap virus dengan individu yang terinfeksi virus sehingga digunakan model endemik dalam menganalisa penyebaran virus ebola.

Pada dinamika penyebaran virus ebola, populasi total pada waktu t dinotasikan dengan $N(t)$ dan

$$N(t) = S(t) + E(t) + I_E(t) + I_L(t) + R_1(t) + R_2(t) + D(t) \quad (2.1)$$

Parameter-parameter yang digunakan yaitu, β (Peluang efektif penyebaran virus ebola); ω (Laju penyebaran virus ebola); Π (Laju kelahiran); μ (Laju kematian individu secara alami); τ (Parameter modifikasi individu terinfeksi); ρ (Laju transisi individu sembuh menjadi individu terinfeksi dengan gejala awal); σ (Laju transisi individu laten menjadi individu terinfeksi dengan gejala awal); α (Laju transisi individu terinfeksi dengan gejala awal menjadi gejala akhir); ξ (Laju transisi individu sembuh menjadi individu yang bebas dari infeksi virus); h (Fraksi

diklasifikasikan menjadi 7 sub-populasi atau klas. Klasifikasi klas tersebut terdiri dari klas *susceptible* (S), klas *exposed* (E), klas *early-stage infection* (I_E), klas *late-stage infection* (I_L), klas *recovered* (R_1), klas *immunity* (R_2) dan klas *death* (D). Sehingga populasi totalnya adalah

individu dengan gejala terinfeksi yang menjadi sembuh); ε (Laju transisi individu sembuh yang terinfeksi kembali); γ (Laju kesembuhan individu yang terkena gejala infeksi virus) dan δ (Laju kematian individu karena virus ebola).

Asumsi-asumsi yang digunakan yaitu :

1. Populasi tertutup, artinya tidak ada migrasi yang masuk maupun keluar dari populasi,
2. Penularan virus ebola hanya terjadi dari manusia ke manusia.

Berikut adalah model matematika [7] pada penyebaran virus ebola :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Pi - \omega(I_E, I_L, R_1, D)S - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= \omega(I_E, I_L, R_1, D)S + \varepsilon\omega(I_E, I_L, R_1, D)R_1 - (\sigma + \mu)E, \\ \frac{dI_E}{dt} &= \sigma E - (\alpha + \mu)I_E + \rho R_1, \\ \frac{dI_L}{dt} &= \alpha I_E - (\gamma + \mu)I_L, \\ \frac{dR_1}{dt} &= h\gamma I_L - (\rho + \xi + \mu)R_1 - \varepsilon\omega(I_E, I_L, R_1, D)R_1, \\ \frac{dR_2}{dt} &= \xi R_1 - \mu R_2, \\ \frac{dD}{dt} &= (1 - h)\gamma I_L - \delta D, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dengan $\omega(I_E, I_L, R_1, D) = \frac{\beta(I_E + I_L + \tau_1 R_1 + \tau_2 D)}{S + E + I_E + I_L + R_1 + R_2 + D}$ merupakan laju penyebaran infeksi virus ebola.

Sifat Dasar [7] : Model penyebaran virus ebola pada persamaan (2.2) menjelaskan tentang populasi manusia yang terinfeksi virus ebola, artinya jika semua variabel keadaan bebas non-negatif untuk $t \geq 0$ maka solusi dengan nilai awal yang positif

akan tetap positif untuk setiap waktu ($t > 0$).

Lemma 1 [7] Diberikan nilai awal $F(0) \geq 0$, dengan $F(t) = (S, E, I_E, I_L, R_1, R_2, D)$, maka solusi dari model (2.2) adalah non-negatif untuk semua $t > 0$. Lebih lanjut

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Pi}{\mu}$$

dengan $N(t) = S(t) + E(t) + I_E(t) + I_L(t) + R_1(t) + R_2(t) + D(t)$

Daerah Invariant

Daerah fisibel dari Model ebola (2.9) didefinisikan dalam $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^7$ dengan $\Gamma = \{S(t), E(t), I_E(t), I_L(t), R_1(t), R_2(t), D(t): N(t) \leq U_1\}$, di mana $U_1 = \max\left\{N(0), \frac{\Pi}{\mu}\right\}$

Lemma 2 [7] Daerah $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^7$ adalah invariant-positif untuk model dasar (2.2) dengan kondisi awal non-negatif di \mathbb{R}_+^7 .

Bukti :

Laju perubahan populasi totalnya adalah, $\frac{dN(t)}{dt} = \Pi - \mu N(t) + (\mu - \delta)D(t)$
 Sehingga $D(t) < N(t)$ berakibat $-N(t) < -D(t)$
 Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \Pi - \mu N(t) - \delta N(t) + \mu D(t) &\leq \Pi - \mu N(t) + (\mu - \delta)D(t) \leq \Pi - \mu N(t) \\ \Leftrightarrow \Pi - \mu N(t) - \delta N(t) + \mu D(t) &\leq \frac{dN(t)}{dt} \leq \Pi - \mu N(t) \\ \Leftrightarrow \Pi - (\mu + \delta)N(t) &\leq \frac{dN(t)}{dt} \leq \Pi - \mu N(t) \end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &\leq \Pi - \mu N(t) \\ \Leftrightarrow \left[\frac{dN(t)}{dt} + \mu N(t) \leq \Pi \right] \times e^{\mu t} &\Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} e^{\mu t} + \mu N(t) e^{\mu t} \leq \Pi e^{\mu t} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \{N(t) e^{\mu t}\} &\leq \Pi e^{\mu t} \Leftrightarrow \int_0^t \frac{d}{dt} \{N(t) e^{\mu t}\} dt \leq \int_0^t \Pi e^{\mu t} dt \\ \Leftrightarrow N(t) e^{\mu t} \Big|_0^t &\leq \left[\frac{\Pi}{\mu} e^{\mu t} \right]_0^t \Leftrightarrow N(t) e^{\mu t} - N(0) e^0 \leq \frac{\Pi}{\mu} e^{\mu t} - \frac{\Pi}{\mu} e^0 \\ \Leftrightarrow N(t) e^{\mu t} &\leq N(0) + \frac{\Pi}{\mu} e^{\mu t} - \frac{\Pi}{\mu} \Leftrightarrow N(t) \leq \frac{N(0) + \frac{\Pi}{\mu} e^{\mu t} - \frac{\Pi}{\mu}}{e^{\mu t}} \\ \Leftrightarrow N(t) &\leq N(0) e^{-\mu t} + \frac{\Pi}{\mu} - \frac{\Pi}{\mu} e^{-\mu t} \Leftrightarrow N(t) \leq \left[N(0) - \frac{\Pi}{\mu} \right] e^{-\mu t} + \frac{\Pi}{\mu}, t > 0 \dots \dots (**) \end{aligned}$$

Kasus 1

Untuk $N(0) \leq \frac{\Pi}{\mu}$
 Dari persamaan (**) diperoleh,
 $N(0) - \frac{\Pi}{\mu} < 0$ dengan $e^{-\mu t} > 0$
 maka berakibat,
 $N(t) \leq \frac{\Pi}{\mu}, t > 0$

Kasus 2

Untuk $N(0) > \frac{\Pi}{\mu}$
 Dari persamaan (**) diperoleh
 $N(t) \leq \left[N(0) - \frac{\Pi}{\mu} \right] e^{-\mu t} + \frac{\Pi}{\mu}$
 $\Leftrightarrow N(t) \leq N(0) - \frac{\Pi}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{\Pi}{\mu}$
 dengan $\frac{\Pi}{\mu} e^{-\mu t} > \frac{\Pi}{\mu}, t > 0$ berakibat,
 $N(t) \leq N(0), t > 0$

Dari bukti kasus 1 dan kasus 2 dapat dilihat bahwa

$$N(t) \leq U_1 \text{ dengan } U_1 = \max\left\{N(0), \frac{\Pi}{\mu}\right\}, t > 0$$

Terbukti bahwa Γ ada di daerah invariant positif. Dengan demikian, untuk setiap solusi dari model (2.2) dengan kondisi

awal di Γ akan berada di Γ untuk semua $t > 0$.

2.2 Titik Kesetimbangan

Berdasarkan sistem persamaan differensial (2.2) diperoleh dua titik kesetimbangan dari model penyebaran virus ebola, yaitu titik kesetimbangan

bebas penyakit virus ebola yaitu $E_0 = (S^*, E^*, I_E^*, I_L^*, R_1^*, R_2^*, D^*) = \left(\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0\right)$. Pada kondisi *steady-state*, artinya pada kondisi tetap (tidak berubah terhadap waktu) salah satu

$$(S^{**}, E^{**}, I_E^{**}, I_L^{**}, R_1^{**}, R_2^{**}, D^{**}) = \left(\frac{\Pi}{-\frac{p_2}{p_1} + \mu}, \frac{-\frac{p_2}{p_1}\Pi}{k_1(-\frac{p_2}{p_1} + \mu)}, \frac{\sigma(-\frac{p_2}{p_1})\Pi k_3 k_4}{k_1(-\frac{p_2}{p_1} + \mu)(k_2 k_3 k_4 - h\alpha\gamma\rho)}, \frac{\alpha\sigma(-\frac{p_2}{p_1})\Pi k_4}{k_1(-\frac{p_2}{p_1} + \mu)(k_2 k_3 k_4 - h\alpha\gamma\rho)}, \frac{h\gamma\alpha\sigma(-\frac{p_2}{p_1})\Pi}{k_1(-\frac{p_2}{p_1} + \mu)(k_2 k_3 k_4 - h\alpha\gamma\rho)}, \frac{\xi h\gamma\alpha\sigma(-\frac{p_2}{p_1})\Pi}{k_1\mu(-\frac{p_2}{p_1} + \mu)(k_2 k_3 k_4 - h\alpha\gamma\rho)}, \frac{(1-h)\gamma\alpha\sigma(-\frac{p_2}{p_1})\Pi k_4}{k_1\delta(-\frac{p_2}{p_1} + \mu)(k_2 k_3 k_4 - h\alpha\gamma\rho)} \right) = (W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7)$$

dengan $\omega^{**} = -\frac{p_2}{p_1} > 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) merupakan rata-rata jumlah individu dalam populasi terinfeksi baru yang diproduksi langsung maupun tidak langsung dari satu individu terinfeksi pada periode penyebaran penyakit dalam

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \rho(M) = \frac{\beta\sigma(k_4\delta(k_3 + \alpha) + \alpha\gamma[\delta h\tau_1 + (1-h)k_4\tau_2])}{k_1\delta(k_2 k_3 k_4 - h\alpha\gamma\rho)} \quad (2.3)$$

dengan $\rho(M)$ merupakan matriks spektral radius.

2.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Metode pelinearannya yang digunakan untuk menganalisis kestabilan dari sistem persamaan nonlinear (2.2) adalah deret Taylor orde satu. Sistem persamaan

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta & -\beta & -\beta\tau_1 & 0 & -\beta\tau_2 \\ 0 & -k_1 & \beta & \beta & \beta\tau_1 & 0 & \beta\tau_2 \\ 0 & \sigma & -k_2 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h\gamma & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-h)\gamma & 0 & 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

Teorema [8] Pada titik kesetimbangan bebas penyakit, titik E_0 adalah stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

komponen yang terinfeksi dari sistem (2.2) bukan nol ($\omega(I_E, I_L, R_1, D) \neq 0$) diperoleh titik kesetimbangan endemik E_1 yaitu :

populasi rentan. Dengan menentukan nilai bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dapat diketahui apakah virus ebola akan menyebar atau tidak. Nilai bilangan reproduksi \mathcal{R}_0 merupakan nilai eigen terbesar dari matriks NGM, diperoleh

diferensial yang dilinierisasi digunakan sebagai acuan dalam menentukan kestabilan dari model matematikanya. Selanjutnya dapat diperoleh matriks Jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit virus ebola seperti berikut :

Bukti : Diketahui $\mathcal{R}_0 < 1$, agar kondisi pada sistem stabil asimtotik lokal terpenuhi maka nilai $\det(H_j) > 0$. Diperoleh,

$$\det(H_j) = a_7(-a_2a_1a_3^2a_6^2 - a_2^2a_1a_5^2a_6 + 2a_2a_1^2a_5a_6^2 + a_0a_3^2a_6^2 - a_4^2a_1^2a_5a_6 + a_4a_1^2a_6^2a_3 - a_0^2a_5^3a_6 + 3a_1^2a_7a_6^2a_0 - 3a_6a_1a_7^2a_0^2 - a_6^3a_1^3 - a_2^3a_1a_7^2 + a_4^3a_1^2a_7 + a_0^3a_7^3 - a_1a_2a_3a_4a_5a_6 - a_1a_2a_0a_7a_5a_6 - a_1a_2a_3a_4^2a_7 + a_1a_3a_6a_7a_2^2 + a_1a_4a_5a_7a_2^2 - 3a_2a_4a_6a_7a_1^2 + 3a_0a_1a_2a_4a_7^2 - a_0a_4a_5a_6a_3^2 + a_0a_7a_3^2a_4^2 - 2a_0a_2a_6a_7a_3^2 + a_0a_3a_2a_6a_5^2 - a_0a_2a_3a_4a_5a_7 - 3a_0a_1a_3a_5a_6^2 + a_5a_3a_6a_7a_0^2 + a_0a_3a_7^2a_2^2 + a_1a_0a_3a_4a_7a_6 - 2a_4a_3a_7^2a_0^2 + 2a_0a_1a_4a_6a_5^2 - 2a_0a_1a_5a_7a_4^2 + a_4a_7a_5^2a_0^2 - a_2a_5a_7^2a_0^2) > 0$$

Jika nilai $\mathcal{R}_0 < 1$ maka sistem memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit dan stabil asimtotik lokal sehingga penyakit tidak menyebar dalam populasi. Sebaliknya, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat nilai eigen dari matriks jacobian

$J(E_0)$ yang bernilai positif sehingga titik E_0 tidak stabil, artinya penyakit akan tetap menyebar dan terjadi endemik. Selanjutnya, diperoleh matriks Jacobian pada titik kesetimbangan endemik sebagai berikut :

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & b_1 & c_1 & 0 & d_1 \\ e_1 & f_1 & g_1 & g_1 & h_1 & 0 & i_1 \\ 0 & j_1 & l_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & e_2 & f_2 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & i_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_2 & 0 & 0 & l_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_1 = -\mu - \frac{\beta(w_3 + w_4 + \tau_1 w_5 + \tau_2 w_7)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}$$

$$b_1 = -\frac{\beta w_1}{(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7)}$$

$$c_1 = -\frac{\beta w_1 \tau_1}{(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7)}$$

$$d_1 = -\frac{\beta w_1 \tau_2}{(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7)}$$

$$e_1 = \frac{\beta(w_3 + w_4 + \tau_1 w_5 + \tau_2 w_7)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}$$

$$f_1 = -k_1$$

$$g_1 = \frac{\beta(w_1 + \varepsilon w_5)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}$$

$$h_1 = \frac{\beta(w_1 + \varepsilon 2\tau_1 w_5 + \varepsilon(w_3 + w_4 + \tau_2 w_7))}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}$$

$$i_1 = \frac{\beta(w_1 + \varepsilon \tau_2 w_5)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}$$

$$j_1 = \sigma$$

$$l_1 = -k_2$$

$$a_2 = \rho$$

$$b_2 = \alpha$$

$$c_2 = -k_3$$

$$d_2 = -\frac{\varepsilon \beta w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}$$

$$e_2 = h\gamma - \frac{\varepsilon \beta w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}$$

$$f_2 = -\left(k_4 + \frac{\varepsilon \beta 2\tau_1 w_5 + \varepsilon \beta(w_3 + w_4 + \tau_2 w_7)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}\right)$$

$$g_2 = -\frac{\varepsilon\beta\tau_2 w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7}$$

$$h_2 = \xi$$

$$i_2 = -\mu$$

$$j_2 = (1 - h)\gamma$$

$$l_2 = -\delta$$

didapat polinomial dalam bentuk λ sebagai berikut :

$$P(\lambda) = a_0\lambda^7 + a_1\lambda^6 + a_2\lambda^5 + a_3\lambda^4 + a_4\lambda^3 + a_5\lambda^2 + a_6\lambda + a_7 = 0 \quad (2.4)$$

Kestabilan Titik kesetimbangan endemik ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz berikut,

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 \end{bmatrix}$$

Jika memenuhi $\det(H_j) > 0$ [9], maka sistem stabil asimtotik lokal pada titik kesetimbangan endemik.

2.5 Simulasi Numerik

Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik didapat dari Augusto [6,7] sebagai berikut,

Tabel 2.1 Nilai Parameter

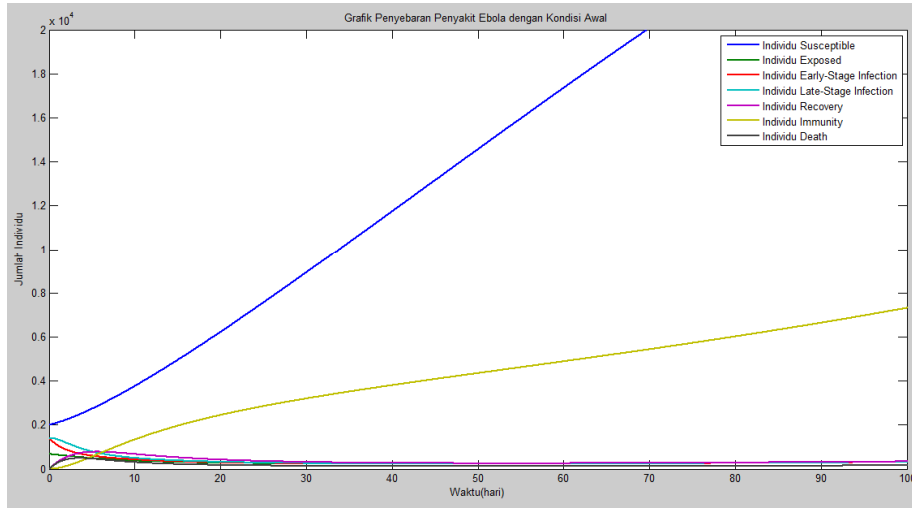
Parameter	β	Π	μ	τ_1, τ_2	ρ	σ	α	h	ε	ξ	γ	δ
Nilai	0.3045	400	0.00004	0.21	0.02	0.5239	0.5472	0.48	0.2	0.21	0.5366	0.5

Dengan perhitungan menggunakan software maple, diperoleh :

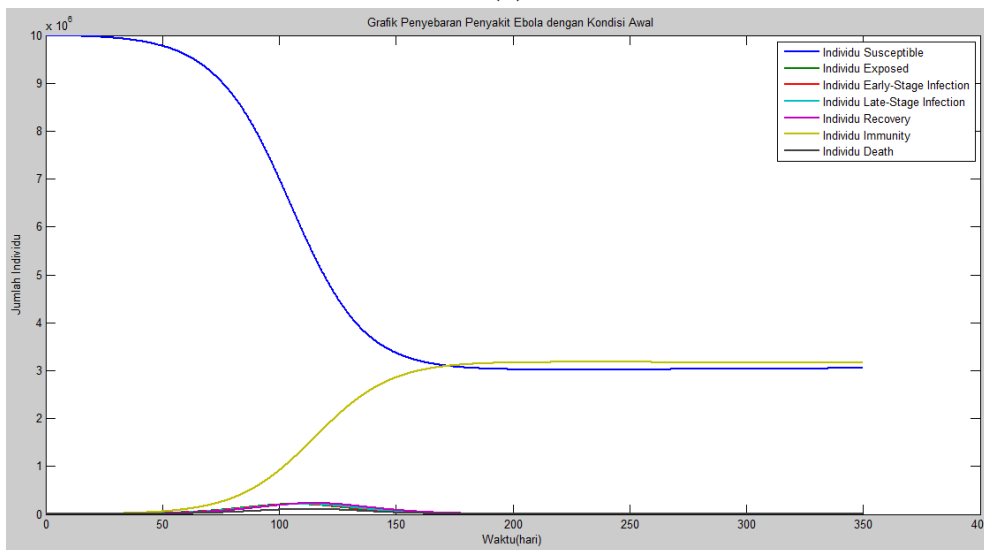
1. Titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S^*, E^*, I_E^*, I_L^*, R_1^*, R_2^*, D^*) = (\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = (10^7, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ dengan nilai eigen matriks Jacobian dari titik kesetimbangan bebas penyakit ebola adalah $0.0845, -0.74453 + 0.26331i, -0.23364(10^{-7}), -0.06829, -0.17940, -0.68568,$ dan $-0.74453 - 0.26331i,$ kestabilan pada titik kesetimbangan bebas oenyakit adalah tidak stabil.
2. Titik kesetimbangan endemik $(S^{**}, E^{**}, I_E^{**}, I_L^{**}, R_1^{**}, R_2^{**}, D^{**}) = (0.90985(10^7); 68.81739; 68.75098; 70.10386; 78.49292;$

$412087.8663; 39.12244)$

- Nilai eigen matriks jacobian dari titik kesetimbangan endemik adalah $-0.27377 + .31453 I, -0.88671(10^{-7}), -0.03473, -0.08499, -1.07396,$ dan $-0.27377 - 0.31453 I,$ kestabilan pada titik kesetimbangan endemik adalah stabil asimtotik lokal yang berarti terjadi penyebaran virus ebola pada manusia.
3. Nilai bilangan reproduksi dasar $\mathcal{R}_0 = 1.226021424.$ Dari hasil perhitungan diketahui bahwa nilai $\mathcal{R}_0 > 1,$ artinya individu yang terinfeksi virus ebola dapat menularkan virus ebola kepada individu lain sehingga akan terjadi endemik.



(a)



(b)

Gambar 3.2. (a) Simulasi Model Bebas Virus Ebola, (b) Simulasi Model Endemik

Gambar 3.2(a) menunjukkan perubahan jumlah populasi S, E, I_E, I_L, R_1, R_2 , dan D terhadap waktu. Terlihat bahwa jumlah populasi klas *susceptible* dan klas *immunity* semakin meningkat seiring berjalannya waktu. Pada klas lain jumlah populasi menurun mendekati nol. Gambar 3.2.(b) menunjukkan perubahan jumlah populasi S, E, I_E, I_L, R_1, R_2 , dan D terhadap waktu. Terlihat bahwa seiring berjalannya waktu jumlah populasi kelas *susceptible* semakin berkurang, hal ini terjadi karena individu pada kelas *susceptible* terinfeksi virus ebola sehingga menjadi kelas *exposed*. Seiring berjalannya waktu, pada klas

exposed, early-stage infection, late-stage infection, recovered, immunity dan *death*, jumlah populasi mengalami kenaikan dari keadaan awal. Pada waktu tertentu, jumlah populasi pada setiap kelas tidak mengalami perubahan sehingga pada keadaan tersebut sistem berada pada kondisi setimbang. Dalam kondisi setimbang, virus ebola akan selalu ada sampai waktu tak terbatas sehingga penyakit virus ebola bersifat endemik.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan mengenai solusi kesetimbangan matematika SEIR-D pada penyebaran virus ebola yang telah dilakukan diperoleh

kesimpulan bahwa model mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit virus ebola dan titik kesetimbangan endemik. Pembahasan mengenai analisis kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit virus ebola menunjukkan bahwa sistem tidak stabil dan kestabilan pada titik kesetimbangan endemik sistem stabil asimtotik lokal yang berarti tetap terjadi penyebaran virus ebola pada manusia.

Dari hasil simulasi numerik didapat nilai bilangan reproduksi dasar sebesar $\mathcal{R}_0 = 1.226021424$. Oleh karena nilai $\mathcal{R}_0 > 1$, maka individu yang terinfeksi virus ebola dapat menularkan virus ebola kepada individu lain, sehingga virus ebola akan menyebar dan menjadi endemik.

IV. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Widowati dan Sutimin. 2013. *Pemodelan Matematika Analisis dan Aplikasinya*. Semarang: Undip Press.
- [2] Centers for Disease Control and Prevention (CDC). 2014. *Outbreaks chronology: Ebola hemorrhagic fever*.
- [3] C.L. Althaus. *Estimating the Reproduction Number of Ebola Virus (EVOB) During the 2014 Outbreak in West Africa*. 1st ed. PLOS Currents Outbreak. 2014.
- [4] M.I. Meltzer , C.Y. Atkins , S. Santibanez , B. Knust , B.W. Petersen , E.D. Ervin , S.T. Nichol , I.K. Damon , M.L. Washington. *Estimating the future number of cases in the ebola epidemic Liberia and Sierra Leone, 2014–2015*. Morb. Mortal. Wkly. Rep. 63 (03) (2014) 1–14 .
- [5] S. Towers , O. Patterson-Lomba , C. Castillo-Chavez. *Temporal Variations in the Effective Reproduction Number of the 2014 West Africa Ebola Outbreak*. 1st ed. PLOS Currents Outbreaks. 2014 .
- [6] F.B. Augusto , M.I. Teboh-Ewungkem , A.B. Gumel. *Mathematical assessment of the role of traditional belief systems and customs and health-care settings in the transmission dynamics of the 2014 ebola outbreaks*. BMC Med. 13 (2015) 96.
- [7] F.B. Augusto. *Mathematical Model of Ebola transmission dynamics with relapse and reinfection*. Mathematical Biosciences 283 (2017) 48–59.
- [8] Driessche, P. van den dan James Watmough. 2002. *Reproduction Numbers and Subthreshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*. University of Victoria and University of New Brunswick : Canada.
- [9] Edelsteins-Keshet, L. 1988. *Mathematical models in biology*. New York : Random House.