

PELABELAN TOTAL *TRIMAGIC* SISI TERURUT TITIK-a PADA BEBERAPA GRAF

Maita Aprilia¹, Robertus Heri SU², Farikhin³

^{1,2,3}Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Email: ²soelistyoutomo@gmail.com

ABSTRACT. Given graph $G(V, E)$ with $|V(G)| = p$ and $|E(G)| = q$. Graph G is called has an edge trimagic total labeling if there exist bijection function $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ such that for each edge $v_i v_j \in E(G)$ obtained $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$. Then graph G is called has a-vertex consecutive edge trimagic total labeling if there exist an edge trimagic total labeling and $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{a + 1, a + 2, \dots, a + p\}$ where $0 \leq a \leq q$. In this final paper is discussed about a-vertex consecutive edge trimagic total labeling for graph $\langle B_{m,n}; 2 \rangle$ with $m, n \geq 1$, $\langle K_{1,n}; 3 \rangle$ with $n \geq 3$, $C_n \odot K_1$, $G \langle v; nP_3 \rangle$ with n even, $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$, $P_3 \odot K_n$ with n even, $C_n \odot K_2$ and F_n with n even.

Keywords: Labeling, Edge Trimagic Total Labeling, a-Vertex Consecutive Edge Trimagic Total Labeling.

I. PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan himpunan unsur-unsur dari elemen graf graf (titik atau sisi atau keduanya) ke himpunan bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau non negatif) yang disebut label. Pelabelan dengan domain himpunan titik disebut pelabelan titik, dengan domain himpunan sisi disebut pelabelan sisi dan dengan domain gabungan himpunan sisi dan himpunan titik disebut pelabelan total. Dalam perkembangannya banyak kajian yang membahas tentang pelabelan, misalnya tentang pelabelan total *trimagic* sisi dan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a pada graf. Pada tugas akhir ini dibahas mengenai pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a pada beberapa graf.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1. Pelabelan Total *Trimagic* Sisi

Definisi 2.1. [1] Diberikan graf $G(V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ yang selanjutnya ditulis $G(p, q)$. Suatu pelabelan total *trimagic* sisi (edge *trimagic* total labeling) pada graf $G(p, q)$ adalah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow$

$\{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga $\forall (v_i v_j) \in E(G)$ berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$.

2.2. Pelabelan Total *Trimagic* Sisi Terurut Titik-a

Definisi 2.2. [5] Suatu pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a pada graf $G(p, q)$ adalah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga $\forall (v_i v_j) \in E(G)$ berlakuf $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$ dan $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{a + 1, a + 2, \dots, a + p\}$ dimana $0 \leq a \leq q$.

Definisi 2.3. [5] Graf Bistar $(B_{m,n})$ adalah graf yang diperoleh dari dua salinan saling lepas dari graf $K_{1,m}$ dan $K_{1,n}$ dengan menghubungkan titik-titik pusat graf $K_{1,m}$ dan $K_{1,n}$ dengan sebuah sisi. Graf $B_{m,n}$ memiliki $(m + n + 2)$ titik dan $(m + n + 1)$ sisi. Graf $\langle B_{m,n}; 2 \rangle$ adalah graf yang diperoleh dari graf $B_{m,n}$ dengan menambahkan sebuah titik baru pada sisi yang menghubungkan titik-titik pusat graf $K_{1,m}$ dan $K_{1,n}$. Graf \langle

$B_{m,n}:2 >$ memiliki $(m + n + 3)$ titik dan $(m + n + 2)$ sisi.

Teorema 2.1. [5] *Graf $\langle B_{m,n}:2 \rangle$ merupakan graf dengan pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a untuk $m, n \geq 1$.*

Bukti:

Misalkan graf $\langle B_{m,n}:2 \rangle$ untuk $m, n \geq 1$ dengan $V(\langle B_{m,n}:2 \rangle) = \{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+n}, v_{m+n+1}, v_{m+n+2}, v_{m+n+3}\}$ dan $E(\langle B_{m,n}:2 \rangle) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ dimana $E_1 = \{v_1v_i; 4 \leq i \leq m + 3\}$, $E_2 = \{v_2v_j; m + 4 \leq j \leq m + n + 3\}$ dan $E_3 = \{v_1v_3, v_3v_2\}$.

Didefinisikan pelabelan titik dan pelabelan sisi untuk graf $\langle B_{m,n}:2 \rangle$ dengan $f(v_i) = m + n + 2 + i$, $1 \leq i \leq m + n + 3$, $f(v_1v_i) = m + n + 4 - i$, $4 \leq i \leq m + 3$, $f(v_2v_j) = m + n + 4 - j$, $m + 4 \leq j \leq m + n + 3$, $f(v_1v_3) = m + n + 1$ dan $f(v_3v_2) = m + n + 2$.

Dibuktikan bahwa pelabelan ini adalah pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a.

- Untuk semua sisi pada $E_1 = \{v_1v_i; 4 \leq i \leq m + 3\}$

$$f(v_1) + f(v_1v_i) + f(v_i) = 3m + 3n + 9 = k_1$$
- Untuk semua sisi pada $E_2 = \{v_2v_j; m + 4 \leq j \leq m + n + 3\}$

$$f(v_2) + f(v_2v_j) + f(v_j) = 3m + 3n + 10 = k_2$$
- Untuk semua sisi pada $E_3 = \{v_1v_3, v_3v_2\}$

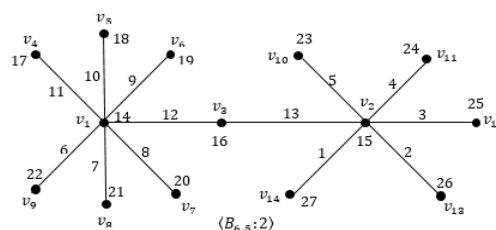
$$f(v_1) + f(v_1v_3) + f(v_3) = 3m + 3n + 9 = k_1$$

$$f(v_3) + f(v_3v_2) + f(v_2) = 3m + 3n + 11 = k_3$$

Keterurutan label titik terlihat dari pendefinisian $f(v_i) = m + n + 2 + i$,

$1 \leq i \leq m + n + 3$ sehingga diperoleh $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{m + n + 3, m + n + 4, \dots, 2m + 2n + 5\}$. Oleh karena terdapat tiga konstanta k_1, k_2 dan k_3 sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_iv_j \in E(\langle B_{m,n}:2 \rangle)$ berlaku $f(v_i) + f(v_iv_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$, jadi terbukti bahwa graf $\langle B_{m,n}:2 \rangle$ merupakan graf dengan pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a untuk $m, n \geq 1$ dengan $a = m + n + 2$. ■

Contoh 2.1.



Gambar 1 Graf dengan pelabelan total Pada Gambar 1, graf $\langle B_{6,5}:2 \rangle$ merupakan graf dengan pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a dengan nilai $k_1 = 42, k_2 = 43$ dan $k_3 = 44$.

Definisi 2.4. [5] *Graf $\langle K_{1,n}:2 \rangle$ adalah graf yang diperoleh dari graf $B_{n,n}$ dengan menambahkan sebuah titik baru pada sisi yang menghubungkan titik-titik pusat graf $K_{1,n}$. Graf $\langle K_{1,n}:2 \rangle$ memiliki $(2n + 3)$ titik dan $(2n + 2)$ sisi. Graf $\langle K_{1,n}:3 \rangle$ adalah graf yang diperoleh dari $\langle K_{1,n}:2 \rangle$ dengan menambahkan sebuah graf bintang $K_{1,n}$ dan menghubungkan titik pusat graf $K_{1,n}$ dan graf $K_{1,n}$ dari $\langle K_{1,n}:2 \rangle$ dengan sebuah sisi kemudian menambahkan sebuah titik baru pada sisi tersebut. Graf $\langle K_{1,n}:3 \rangle$ memiliki $(3n + 5)$ titik dan $(3n + 4)$ sisi.*

Teorema 2.2. [5] *Graf $\langle K_{1,n}:3 \rangle$ merupakan graf dengan pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a untuk $n \geq 3$.*

Bukti :

Misalkan graf $\langle K_{1,n}; 3 \rangle$ untuk $n \geq 3$ dengan $V(\langle K_{1,n}; 3 \rangle) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n}, v_{3n+1}, \dots, v_{3n+5}\}$ dan $E(\langle K_{1,n}; 3 \rangle) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$ dimana $E_1 = \{v_1v_i; 6 \leq i \leq n+5\}$, $E_2 = \{v_2v_j; n+6 \leq j \leq 2n+5\}$, $E_3 = \{v_3v_k; 2n+6 \leq k \leq 3n+5\}$, $E_4 = \{v_1v_4, v_4v_2\}$, dan $E_5 = \{v_2v_5, v_5v_3\}$. Didefinisikan pelabelan titik dan pelabelan sisi untuk graf $\langle K_{1,n}; 3 \rangle$ dengan $f(v_i) = 3n+4+i$, $1 \leq i \leq 3n+5$, $f(v_1v_i) = 3n+6-i$, $6 \leq i \leq n+5$, $f(v_2v_j) = 3n+6-j$, $n+6 \leq j \leq 2n+5$, $f(v_3v_k) = 3n+6-k$, $2n+6 \leq k \leq 3n+5$, $f(v_1v_4) = 3n+4$, $f(v_4v_2) = 3n+3$, $f(v_2v_5) = 3n+2$ dan $f(v_5v_3) = 3n+1$.

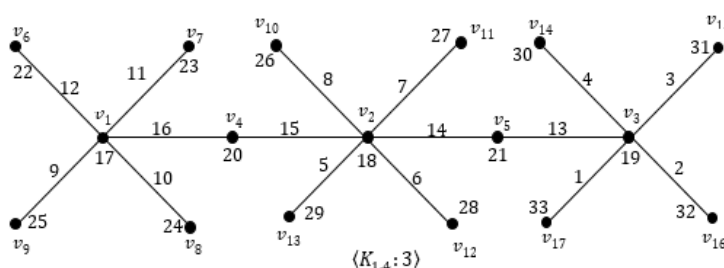
Dibuktikan bahwa pelabelan ini adalah pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a.

- Untuk semua sisi pada $E_1 = \{v_1v_i; 6 \leq i \leq n+5\}$
 $f(v_1) + f(v_1v_i) + f(v_i) = 9n+15 = k_1$
- Untuk semua sisi pada $E_2 = \{v_2v_j; n+6 \leq j \leq 2n+5\}$
 $f(v_2) + f(v_2v_j) + f(v_j) = 9n+16 = k_2$

- Untuk semua sisi pada $E_3 = \{v_3v_k; 2n+6 \leq k \leq 3n+5\}$
 $f(v_3) + f(v_3v_k) + f(v_k) = 9n+17 = k_3$
- Untuk semua sisi pada $E_4 = \{v_1v_4, v_4v_2\}$
 $f(v_1) + f(v_1v_4) + f(v_4) = 9n+17 = k_3$ dan
 $f(v_4) + f(v_4v_2) + f(v_2) = 9n+17 = k_3$
- Untuk semua sisi pada $E_5 = \{v_2v_5, v_5v_3\}$
 $f(v_2) + f(v_2v_5) + f(v_5) = 9n+17 = k_3$ dan
 $f(v_5) + f(v_5v_3) + f(v_3) = 9n+17 = k_3$

Keterurutan label titik terlihat dari pendefinisian $f(v_i) = 3n+4+i$, $1 \leq i \leq 3n+5$ sehingga diperoleh $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{3n+5, 3n+6, \dots, 6n+9\}$. Oleh karena terdapat tiga konstanta k_1, k_2 dan k_3 sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_iv_j \in E(\langle K_{1,n}; 3 \rangle)$ berlaku $f(v_i) + f(v_iv_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p+q)-3\}$, jadi terbukti bahwa graf $\langle K_{1,n}; 3 \rangle$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a untuk $n \geq 3$ dengan $a = 3n+4$. ■

Contoh 2.2.



Gambar 2 Graf dengan pelabelan total

Pada Gambar 2, graf $\langle K_{1,4}; 3 \rangle$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a dengan nilai $k_1 = 51, k_2 = 52$ dan $k_3 = 53$.

Definisi 2.5. [5] Graf Mahkota $C_n \odot K_1$ adalah graf yang diperoleh dari graf Cycle C_n dengan menambahkan n salinan

graf K_1 dan menghubungkan titik pada salinan ke i graf K_1 dengan sebuah sisi pada titik ke i dalam cycle. Graf Mahkota $C_n \odot K_1$ memiliki $2n$ titik dan $2n$ sisi.

Teorema 2.3. [5] Graf Mahkota $C_n \odot K_1$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a.

Bukti :

Misalkan graf $C_n \odot K_1$ dengan $V(C_n \odot K_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$ dan $E(C_n \odot K_1) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ dimana $E_1 = \{v_i v_{i+n}; 1 \leq i \leq n\}$, $E_2 = \{v_j v_{j+1}; 1 \leq j \leq n-1\}$, dan $E_3 = \{v_n v_1\}$

Didefinisikan pelabelan titik dan pelabelan sisi untuk graf $C_n \odot K_1$ dengan $f(v_i) = 2n + i, 1 \leq i \leq$

$$2n, f(v_i v_{i+n}) = 2n - 2i + 2, 1 \leq i \leq$$

$$n, f(v_j v_{j+1}) = 2n - 2j + 1, 1 \leq j \leq$$

$$n - 1 \text{ dan } f(v_n v_1) = 1$$

Dibuktikan bahwa pelabelan ini adalah pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a.

- Untuk semua sisi pada $E_1 = \{v_i v_{i+n}; 1 \leq i \leq n\}$

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+n}) + f(v_{i+n}) = 7n + 2 = k_1$$

- Untuk semua sisi pada $E_2 = \{v_j v_{j+1}; 1 \leq j \leq n-1\}$

$$f(v_j) + f(v_j v_{j+1}) + f(v_{j+1}) = 6n + 2 = k_2$$

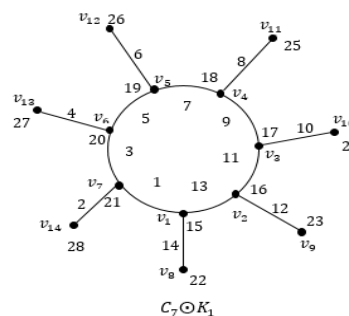
- Untuk semua sisi pada $E_3 = v_n v_1$

$$f(v_n) + f(v_n v_1) + f(v_1) = 5n + 2 = k_3$$

Keterurutan label titik terlihat dari pendefinisian $f(v_i) = 2n + i, 1 \leq i \leq 2n$ sehingga diperoleh $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{2n + 1, 2n + 2, \dots, 4n\}$. Oleh karena terdapat tiga konstanta k_1, k_2 dan k_3 sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_i v_j \in E(C_n \odot K_1)$ berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$, jadi terbukti bahwa graf $C_n \odot K_1$ merupakan graf dengan pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a dengan $a = 2n$.



Contoh 2.3.



Gambar 3 Graf dengan pelabelan total
 Pada Gambar 3, graf $C_7 \odot K_1$ merupakan graf dengan pelabelan total trimagic sisi terurut titik-adengan nilai $k_1 = 51, k_2 = 44$ dan $k_3 = 37$.

Definisi 2.6. [5] Graf Bintang Ganda $G\langle v; nP_3 \rangle$ adalah graf yang diperoleh dari graf $\langle K_{1,1}; 2 \rangle$ dengan menambahkan $(n-2)$ salinan graf P_3 pada titik pusat graf $\langle K_{1,1}; 2 \rangle$. Graf Bintang Ganda $G\langle v; nP_3 \rangle$ memiliki $2n + 1$ titik dan $2n$ sisi.

Teorema 2.4. [5] Graf Bintang Ganda $G\langle v; nP_3 \rangle$ merupakan graf dengan pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a untuk n genap.

Bukti :

Misalkan graf $G\langle v; nP_3 \rangle$ untuk n genap dengan $V(G\langle v; nP_3 \rangle) =$

$\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}\}$ dan $E(G\langle v; nP_3 \rangle) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ dimana $E_1 = \{v_1 v_{i+1}; 1 \leq i \leq n -$

$1 \text{ dan } i \text{ ganjil}\}, E_2 = \{v_1 v_{i+1}; 2 \leq i \leq n \text{ dan } i \text{ genap}\}$, dan $E_3 = \{v_j v_{j+n}; 2 \leq j \leq n + 1$.

Didefinisikan pelabelan titik dan pelabelan sisi untuk graf $G\langle v; nP_3 \rangle$ dengan $f(v_i) = 2n + i, 1 \leq i \leq 2n + 1,$ $f(v_1 v_{i+1}) = 2n - i + 1, 1 \leq i \leq n - 1$ dan i ganjil, $f(v_1 v_{i+1}) = n - i + 2, 2 \leq i \leq n$ dan i genap dan $f(v_j v_{j+n}) = 2n - 2j + 3, 2 \leq j \leq n + 1$

Dibuktikan bahwa pelabelan ini adalah pelabelan total trimagic sisi terurut titik-a.

- Untuk semua sisi pada $E_1 = \{v_1v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1 \text{ dan } i \text{ ganjil}\}$

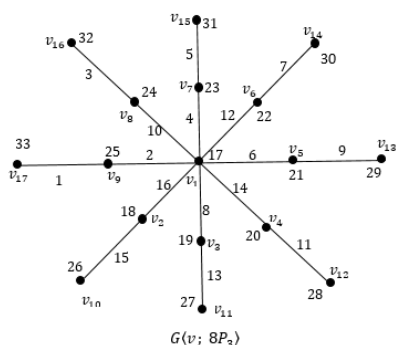
$$f(v_1) + f(v_1v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = 6n + 3 = k_2$$
- Untuk semua sisi pada $E_2 = \{v_1v_{i+1}; 2 \leq i \leq n \text{ dan } i \text{ genap}\}$

$$f(v_1) + f(v_1v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = 5n + 4 = k_2$$
- Untuk semua sisi pada $E_3 = \{v_jv_{j+n}; 2 \leq j \leq n+1\}$

$$f(v_j) + f(v_jv_{j+n}) + f(v_{j+n}) = 7n + 3 = k_3$$

Keterurutan label titik terlihat dari pendefinisian $f(v_i) = 2n + i, 1 \leq i \leq 2n + 1$ sehingga diperoleh $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{2n + 1, 2n + 2, \dots, 4n + 1\}$. Oleh karena terdapat tiga konstanta k_1, k_2 dan k_3 sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_iv_j \in E(G(v; nP_3))$ berlaku $f(v_i) + f(v_iv_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$, jadi terbukti bahwa graf $G(v; nP_3)$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a untuk n genap dengan $a = 2n$. ■

Contoh 2.4.



Gambar 4 Graf dengan pelabelan total
 Pada Gambar 4, graf $G(v; 8P_3)$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a dengan nilai $k_1 = 51, k_2 = 44$ dan $k_3 = 59$.

Definisi 2.7. [5] Graf $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$ adalah graf yang diperoleh dari gabungan graf bintang yang saling lepas

$K_{1,p}, K_{1,q}$, dan $K_{1,r}$ dengan nilai p, q dan r berbeda. Graf $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$ memiliki $(p + q + r + 3)$ titik dan $(p + q + r)$ sisi.

Teorema 2.5. [5] Graf $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a.

Bukti :

Misalkan graf $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$ dengan $V(K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}) = \{v_1, v_2, \dots, v_p, \dots, v_{p+q}, \dots, v_{p+q+r}, \dots, v_{p+q+r+3}\}$ dan $E(K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ dimana $E_1 = \{v_1v_i; 4 \leq i \leq p + 3\}$, $E_2 = \{v_2v_j; p + 4 \leq j \leq p + q + 3\}$, dan $E_3 = \{v_3v_k; p + q + 4 \leq k \leq p + q + r + 3\}$.

Didefinisikan pelabelan titik dan pelabelan sisi untuk graf $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$ dengan $f(v_i) = p + q + r + i, 1 \leq i \leq p + q + r + 3, f(v_1v_i) = p - i + 4, 4 \leq i \leq p + 3, f(v_2v_j) = 2p + q - j + 4, p + 4 \leq j \leq p + q + 3$ dan $f(v_3v_k) = 2p + 2q + r - k + 4, 2p + 4 \leq k \leq p + q + r + 3$

Dibuktikan bahwa pelabelan ini adalah pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a.

- Untuk semua sisi pada $E_1 = \{v_1v_i; 4 \leq i \leq p + 3\}$

$$f(v_1) + f(v_1v_i) + f(v_i) = 3p + 2q + 2r + 5 = k_2$$
- Untuk semua sisi pada $E_2 = \{v_2v_j; p + 4 \leq j \leq p + q + 3\}$

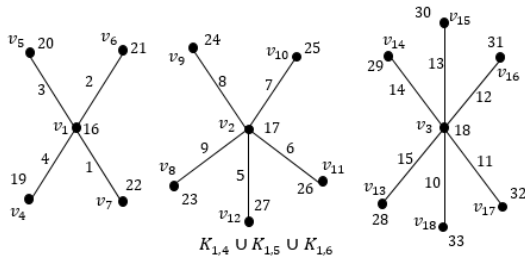
$$f(v_2) + f(v_{p+2}v_j) + f(v_j) = 4p + 3q + 2r + 6 = k_2$$
- Untuk semua sisi pada $E_3 = \{v_3v_k; p + q + 4 \leq k \leq p + q + r + 3\}$

$$f(v_3) + f(v_3v_k) + f(v_k) = 4p + 4q + 3r + 7 = k_3$$

Keterurutan label titik terlihat dari pendefinisian $f(v_i) = p + q + r + i, 1 \leq i \leq p + q + r + 3$ sehingga diperoleh

$f(V) = \{f(v)|v \in V\} = \{p + q + r + 1, p + q + r + 2, \dots, 2p + 2q + 2r + 3\}$.
 Oleh karena terdapat tiga konstanta k_1, k_2 dan k_3 sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_i v_j \in E(K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r})$ berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$, jadi terbukti bahwa graf $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a dengan $a = p + q + r$. ■

Contoh 2.5.



Gambar 5 Graf dengan pelabelan total
 Pada Gambar 5, graf $K_{1,4} \cup K_{1,5} \cup K_{1,6}$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-adengan nilai $k_1 = 39, k_2 = 49$ dan $k_3 = 61$.

Definisi 2.8. [4] Graf $P_3 \odot \bar{K}_n$ adalah graf yang diperoleh dari graf Path P_n dengan menambahkan n salinan graf \bar{K}_n dan menghubungkan setiap titik pada salinan ke i graf \bar{K}_n dengan sebuah sisi pada titik ke i dalam path. Graf $P_3 \odot \bar{K}_n$ memiliki $3n + 3$ titik dan $3n + 2$ sisi.

Teorema 2.6. [5] Graf $P_3 \odot \bar{K}_n$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a untuk n genap.

Bukti :

Misalkan graf $P_3 \odot \bar{K}_n$ untuk n genap dengan $V(P_3 \odot \bar{K}_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n}, v_{3n+1}, v_{3n+2}, v_{3n+3}\}$ dan $E(P_3 \odot \bar{K}_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ dimana $E_1 = \{v_1 v_i ; 4 \leq i \leq n + 3\}$, $E_2 = \{v_2 v_j ; n + 4 \leq j \leq 2n + 3\}$, $E_3 = \{v_3 v_k ; 2n + 4 \leq k \leq 3n + 3\}$, dan $E_4 = \{v_1 v_2, v_2 v_3\}$.

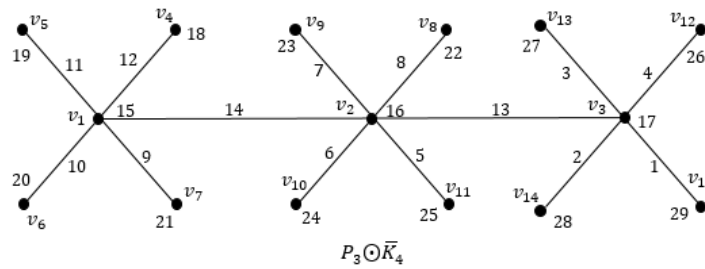
Didefinisikan pelabelan titik dan pelabelan sisi untuk graf $P_3 \odot \bar{K}_n$ dengan $f(v_i) = 3n + 2 + i, 1 \leq i \leq 3n + 3$, $f(v_1 v_i) = 3n + 4 - i, 4 \leq i \leq n + 3$, $f(v_2 v_j) = 3n + 4 - j, n + 4 \leq j \leq 2n + 3$, $f(v_3 v_k) = 3n + 4 - k, 2n + 4 \leq k \leq 3n + 3$, $f(v_1 v_2) = 3n + 2$, $f(v_2 v_3) = 3n + 1$

Dibuktikan bahwa pelabelan ini adalah pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a.

- Untuk semua sisi pada $E_1 = \{v_1 v_i ; 4 \leq i \leq n + 3\}$
 $f(v_1) + f(v_1 v_i) + f(v_i) = 9n + 9 = k_1$
- Untuk semua sisi pada $E_2 = \{v_2 v_j ; n + 4 \leq j \leq 2n + 3\}$
 $f(v_2) + f(v_2 v_j) + f(v_j) = 9n + 10 = k_2$
- Untuk semua sisi pada $E_3 = \{v_3 v_k ; 2n + 4 \leq k \leq 3n + 3\}$
 $f(v_3) + f(v_3 v_k) + f(v_k) = 9n + 11 = k_3$
- Untuk semua sisi pada $E_4 = \{v_1 v_2, v_2 v_3\}$
 $f(v_1) + f(v_1 v_2) + f(v_2) = 9n + 9 = k_1$ dan
 $f(v_2) + f(v_2 v_3) + f(v_3) = 9n + 10 = k_2$

Keterurutan label titik terlihat dari pendefinisian $f(v_i) = 3n + 2 + i, 1 \leq i \leq 3n + 3$ sehingga diperoleh $f(V) = \{f(v)|v \in V\} = \{3n + 2 + 1, 3n + 2 + 2, \dots, 6n + 5\}$. Oleh karena terdapat tiga konstanta yang berbeda k_1, k_2 dan k_3 sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_i v_j \in E(P_3 \odot \bar{K}_n)$ berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$, jadi terbukti bahwa graf $P_3 \odot \bar{K}_n$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a untuk n genap dengan $a = 3n + 2$. ■

Contoh 2.6.



Gambar 6 Graf dengan pelabelan total

Pada Gambar 6, graf $P_3 \odot \bar{K}_4$ merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-adengan nilai $k_1 = 45, k_2 = 46$ dan $k_3 = 47$.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan definisi-definisi yang telah diberikan pada pembahasan bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa menentukan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a dengan memberikan label yang memenuhi pelabelan total *trimagic* sisi dimana himpunan label titiknya dapat dinyatakan dengan $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{a + 1, a + 2, \dots, a + p\}$ dimana $0 \leq a \leq q$. Beberapa graf yang merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a, diantaranya yaitu graf $\langle B_{m,n}; 2 \rangle$ untuk $m, n \geq 1, \langle K_{1,n}; 3 \rangle$ untuk $n \geq 3, C_n \odot K_1, G\langle v; nP_3 \rangle$ untuk n genap, $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$, dan $P_3 \odot \bar{K}_n$ untuk n genap.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] C. Jayasekaran, M. Regees and C. Davidraj. 2013. Edge Trimagic Labeling of Some Graph. *Internasional Journal of Combinatorial Graph Theory and Applications*. Vol. 6. PP. 175-186.

[2] Garry Chartrand and Ortrud R. Oellermann. 1993. *Applied and*

Algorithmic Graph Theory. Singapore : McGraw Hill.

[3] Frank Harry. 1969. *Graph Theory*. Boston : Addison Wesley.

[4] M. Regees and C. Jayasekaran. 2013. Super Edge Trimagic Total Labeling of Graphs. *Internasional Journal of Mathematical Archive*. 4(12). PP. 156-164.

[5] M. Regees and C. Jayasekaran. 2014. A-Vertex Consecutive Edge Trimagic Total Labeling of Graphs. *Internasional Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 34. PP. 1413-1419.

[6] M. Regees and C. Jayasekaran. 2014. Edge Trimagic Total Labeling for Disconnected Graphs. *Internasional Journal of Mathematics Trends and Technology*. Vol. 6. PP. 44-53.

[7] Rosen, Kenneth H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications 6th Edition*. New York : Mc Graw Hill.

[8] Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. New York : Springer Science.

[9] Wilson, Robin J. and John J. Watkins. 1990. *Graphs An Introductory Approach*. New York : John Wiley & Sons, Inc.