

# FUZZY CONTROLLER DESIGN FOR NONLINEAR SYSTEMS WITH CASE STUDY OF TORA SYSTEM

Priyo Sidik Sasongko  
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP  
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang.

**Abstract.** In this article is studied problem of Fuzzy Controller Design For Nonlinear Systems With Case Study Of TORA System. Fuzzy control for nonlinear systems is proposed on the framework from model of Takagi-Sugeno fuzzy model and PDC(paralel distributed compensation) controller. A Lyapunov-based stabilizing fuzzy control design for nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models is applied. The stability analysis and control design problems are reduced to linear of matrix inequality (LMI) problems. So that method of fuzzy controller design are solve a set of LMI. Approach of PDC, robust and optimal controller are applied to a nonlinear control benchmark problem with case study of TORA system. The designed fuzzy controllers are yield an asymptotic stable closed-loop system. The fuzzy controller Simulation results are given to illustrate the utility of the present fuzzy control.

**Keywords:** Takagi-Sugeno fuzzy model, PDC controller, robust controller, optimal controller, LMI, TORA system .

## 1. PENDAHULUAN

Konsep himpunan *fuzzy* pertama kali dikenalkan kepada publik oleh Lotfi Zadeh, dengan menggunakan suatu fungsi keanggotaan [11]. Sistem osilasi bertranslasi dengan aktuator berotasi (*Translational Oscillations with a Rotational Actuator* atau TORA) adalah masalah bench-mark nonlinear yang berhubungan dengan sistem fisik yang telah dibangun oleh [2] di Universitas Michigan.

Tujuan penulisan ini untuk mengkaji masalah pengontrol *fuzzy* untuk sistem nonlinear, merancang pengontrol *fuzzy* untuk sistem nonlinear, menganalisa kestabilan dan kinerja dari sistem lup tertutup dengan pengontrol *fuzzy* dan mensimulasikan serta menguji model rancangan *fuzzy* dengan menggunakan program Matlab untuk dapat membantu menyelesaikan masalah sistem TORA.

Aplikasi dari logika *fuzzy* ke masalah kontrol telah menjadi suatu isu penting pada masa lampau sejak makalah Zadeh berkembang. Pengontrol *fuzzy* pada umumnya ditandai dengan menggunakan tipe Mamdani dan tipe Takagi-Sugeno [10] telah mengusulkan bahwa pengontrol *fuzzy*

tipe Takagi-Sugeno dapat dirancang menggunakan informasi dari beberapa model yang dilinearisasi dari sistem yang ditentukan. PDC (*Paralel Distributed Compensator*) adalah suatu contoh usahanya. [9] mengusulkan formula linearisasi yang digunakan untuk menyusun model linear lokal *fuzzy*, yang menghasilkan aproksimasi sistem yang baik di sekitar titik operasi bahkan jika titik operasi bukan titik kesetimbangan. Dalam bidang kontrol *fuzzy*, [6] telah mengusulkan suatu dalil untuk menganalisa kestabilan model *fuzzy* Takagi-Sugeno. Mereka memberikan suatu syarat cukup untuk menjamin kestabilan asimptotik global dari model *fuzzy* Takagi-Sugeno, yaitu ditemukan suatu matriks definit positif  $P$  yang memenuhi pertidaksamaan Lyapunov. Masalah kestabilan adalah suatu masalah kelayakan standar dengan beberapa LMI sehingga gain umpan balik  $K_i$ ,  $i= 1, 2, \dots, r$ , diperoleh dan dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan suatu algoritma yang dinamai metoda titik interior yang diusulkan oleh [1]. [4] telah membuktikan bahwa metoda LMI sebagai perancangan suatu pengontrol *fuzzy*

Takagi-Sugeno untuk sistem TORA yang stabil. Perancangan *robustness* dari sistem dinamis nonlinear melalui pengontrol *fuzzy* dilakukan oleh [3]. Nilai performansi pengontrol *fuzzy* telah diusulkan [8].

## 2. METODE PENELITIAN

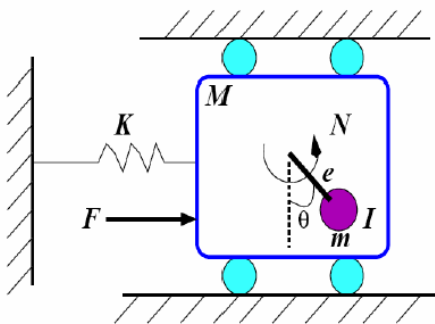
Metode penelitian yang dipakai di sini adalah studi literatur. Bahan atau materi yang digunakan dalam penelitian adalah karya-karya ilmiah berupa jurnal, laporan penelitian dan majalah ilmiah yang relevan. Selain itu juga digunakan buku-buku teks tentang pengontrol logika *fuzzy*.

Langkah pertama dalam prosedur perancangan pengontrol adalah mengkonstruksi dari model sebenarnya dari suatu proses dinamis yang dikontrol yaitu model berorde empat dari Sistem TORA, Gambar 1. Energi kinetik sistem adalah

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \quad (1)$$

Aktuator massa uji ini ditempatkan pada jarak  $r$  dari sumbu rotasinya, maka  $x_p = x_c + r \sin \theta$ ,  $y_p = -r \cos \theta$ , sehingga dengan menggunakan persamaan Lagrange diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_c} &= F - k x_c \text{ dan} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= N \end{aligned} \quad (2)$$



Gambar 1. Sistem TORA

dengan  $k$  adalah tetapan pegas, diperoleh persamaan gerak yang melukiskan perilaku mekanik dari sistem itu yaitu

$$(M + m) \ddot{x}_c + k x_c = -mr(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + F \quad (3)$$

$$(I + mr^2) \ddot{\theta} = -mr \dot{x}_c \cos \theta + N \quad (4)$$

dengan  $x_c$  adalah posisi translasi dari

pedati,  $\dot{x}_c$  adalah kecepatan translasi dari pedati,  $\theta$  adalah posisi angular dari massa

uji, dan  $\dot{\theta}$  adalah kecepatan angular dari massa uji.

Setelah dilakukan transformasi ternormalisasi yang cocok dalam variabel keadaan, input kontrol dan waktu, persamaan (3) dan (4) ditulis sebagai persamaan nonlinear ternormalisasi dari gerakan pedati, yaitu

$$\ddot{x}_d + x_d = \varepsilon (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + w \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} + \varepsilon \dot{x}_d \cos \theta = u \quad (6)$$

dengan  $\varepsilon$  adalah koefisien gesek,  $0 < \varepsilon < 1$  dan  $u$  adalah input kontrol.

Dengan mengambil  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$= (x_d, \dot{x}_d, \theta, \dot{\theta})^T$  maka persamaan (5) dan persamaan (6) menjadi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u + \mathbf{h}(\mathbf{x})w \quad (7)$$

$$\text{dengan } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-x_1 + \varepsilon x_4^2 \sin x_3}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{\varepsilon \cos x_3 (x_1 - \varepsilon x_4^2 \sin x_3)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\varepsilon \cos x_3}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3}{0} \\ -\varepsilon \cos x_3 \\ \frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix}.$$

Perlu dicatat bahwa  $u$  input kontrol adalah torkas ternormalisasi  $N$  dan  $w$  gangguan adalah gaya ternormalisasi  $F$ .

Prosedur rancangan untuk sistem nonlinear dengan model fuzzy Takagi-Sugeno. Model dinamis fuzzy kontinu, yang diusulkan memenuhi bentuk :

Plant

Rule  $i$  : IF  $x_1(t)$  is  $F_1^i$  AND...AND  $x_n(t)$  is  $F_n^i$

THEN  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)$  (8)

dengan  $F_j^i, j = 1, 2, \dots, n$ , adalah himpunan fuzzy ke- $j$  dari aturan ke- $i$ . Ambil fungsi keanggotaan  $\mu_j^i(x_j)$  dari himpunan fuzzy

$F_j^i$  dan ambil  $w^i = w^i(x) = \prod_{j=1}^n \mu_j^i(x_j)$ ,

vektor keadaan  $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$ , input kontrol  $\mathbf{u}(t) \in \mathfrak{R}^m$ , dan matriks  $\mathbf{A}_i$  dan  $\mathbf{B}_i$  dengan dimensi yang sesuai. Maka jika diberikan pasangan  $(x(t), u(t))$ , dengan menggunakan fuzzifikasi *singleton*, inferensi *max-product* dan defuzzifikasi *center overage*, dapat ditulis model fuzzy Takagi-Sugeno terkumpul sebagai

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (9)$$

didefinisikan  $\alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$  (10)

sehingga persamaan (9) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)), \quad (11)$$

dengan  $\alpha_i > 0$  dan  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$  dan

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T \in [0, 1]^r$$

Gagasan PDC adalah mengasosiasi-kan kompensator untuk tiap-tiap aturan dari model fuzzy itu yang digunakan untuk mendisain pengontrol fuzzy. Hasil keseluruhan pengontrol fuzzy adalah suatu cam-puran fuzzy dari tiap-tiap individu pengontrol linier individu. Pengontrol PDC biasanya mengambil bentuk:

Rule  $i$  : IF  $z_1(t)$  is  $F_1^i$  AND...AND  $z_n(t)$  is  $F_n^i$   
THEN  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t), i = 1, 2, 3, \dots, r$  (12)

sehingga pengontrol fuzzy adalah

$$\mathbf{u}(t) = \frac{-\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

$$= -\sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) \mathbf{K}_j \mathbf{x}(t) \quad (13)$$

Mensubstitusikan persamaan (13) ke persamaan (11), diperoleh persamaan untuk sistem lup tertutup yang berbentuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x} \quad (14)$$

Selanjutnya disajikan syarat cukup untuk kestabilan asimtotik dalam sistem yang besar dari model fuzzy yang diberikan oleh (11), dengan menggunakan hukum kontrol umpan balik keadaan fuzzy

$$\mathbf{u} = -\sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{K}_j \mathbf{x} \quad (15)$$

**Kontrol PDC menggunakan LMI**

**Teorema 1.** [10] Sistem fuzzy lup tertutup (14) adalah stabil asimtotik global jika terdapat matriks definit positif  $\mathbf{P}$  yang memenuhi pertidaksamaan Lyapunov berikut :

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i) < 0, \quad (16)$$

$i = 1, \dots, r$

$$\mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij} < 0, \quad j < i \leq r \quad (17)$$

$$\mathbf{P} > 0 \quad (18)$$

dengan  $G_{ij}$  didefinisikan sebagai

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i \quad (19)$$

**Teorema 2.** [10][6] *Sistem kontrol fuzzy dari model Takagi-Sugeno (11) menggunakan Kontrol PDC (15) adalah stabil jika terdapat  $Q > 0$  dan  $Y_i, i = 1, 2, \dots, r$  sedemikian sehingga memenuhi kondisi LMI berikut:*

$$QA_i^T + A_i Q - B_i Y_i - Y_i^T B_i^T < 0, \quad (20)$$

$i = 1, 2, \dots, r$

$$QA_i^T + A_i Q + QA_j^T + A_j Q - B_i Y_j - Y_j^T B_i^T - B_j Y_i - Y_i^T B_j^T < 0, \quad (21)$$

$i < j < r$

dan Pengontrol PDC diberikan oleh

$$K_i = Y_i * Q^{-1} \quad (22)$$

fungsi Lyapunov diberikan oleh

$$V = x^T Q^{-1} x \quad (23)$$

dengan  $Q_i = Q_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  dan memenuhi sifat kombinasi konveks.

### Kontrol Robust Fuzzy Menggunakan LMI

Pandang Sistem fuzzy Takagi-Sugeno (11) dan hukum kontrol umpan balik keadaan fuzzy (15) dengan sistem lup tertutup (14).

**Lemma 1** [4][6] *Prosedur-S:*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0 \text{ ekuivalen dengan } R < 0 \text{ dan } Q - SR^{-1}S^T < 0.$$

**Teorema 3.**[4] *Sistem lup tertutup (14) adalah stabil asimtotik global jika terdapat  $P$  matriks definit positif yang memenuhi pertidaksamaan Lyapunov berikut:*

$$(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) < 0, \quad (24)$$

$i, j = 1, 2, \dots, r$

Selanjutnya dengan mengambil  $Y = P^{-1}$  dan  $X_i = K_i Y$ , maka persamaan (24) dapat ditulis sebagai LMI berikut:

$$Y A_i^T + A_i Y - M_{ij}^T - M_{ij} < 0, \quad (25)$$

$i, j = 1, 2, \dots, r$

dengan  $M_{ij}$  dapat didefinisikan sebagai  $M_{ij} = B_i X_j$  dan didefinisikan

$$N_{ij} = Y A_i^T + A_i Y - M_{ij} - M_{ij}^T \quad (26)$$

Jika LMI persamaan (25) adalah fisibel, maka dapat dicapai nilai untuk  $K_i$  dan  $P$  yaitu  $P = Y^{-1}$  dan  $K_i = X_i Y^{-1}$ , dengan  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Hasil yang telah diketahui dari Ogata K. dengan teori LQR-nya bahwa masalah meminimalkan batas atas pada pengukuran performansi kuadratik linear

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (27)$$

dengan kendala sistem LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad u(t) = -Kx(t) \quad (28)$$

dapat ditransformasi ke masalah optimasi, dengan kendala sekumpulan pertidaksamaan matriks:

$$\min x_0^T P x_0 \text{ kendala :}$$

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T R K < 0$$

$$P > 0 \quad (29)$$

Untuk menghindari ketergantungan nilai fungsi sistem dari kondisi awal, diasumsikan bahwa kondisi awal random dengan mean nol dan covarian identitas, ekuivalen dengan

$$E\{x(0)\} = 0 \text{ dan } E\{x(0)x(0)^T\} = I \quad (30)$$

Sehingga tujuan untuk meminimalkan  $J$  dapat ditulis sebagai  $J = \text{trace}(P)$  dan  $P$  memenuhi pertidaksamaan Lyapunov:

$$(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + Q + \sum_{i=1}^r K_i^T R K_i < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (31)$$

diketahui juga bahwa

$$\left( \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) R \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i^T \right) < \sum_{i=1}^r K_i^T R K_i \quad (32)$$

maka persamaan (31) dapat diubah menjadi LMI berikut:

$$\begin{bmatrix} N_{ij} & YQ^{1/2} & X_i^T R^{1/2} & \dots & X_r^T R^{1/2} \\ Q^{1/2} Y & -I_n & 0 & \dots & 0 \\ R^{1/2} X_i^T & 0 & -I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{1/2} X_r^T & 0 & 0 & \dots & -I_m \end{bmatrix} < 0$$

$i, j = 1, 2, \dots, r \quad (33)$

dengan  $N_{ij}$  didefinisikan seperti pada persamaan (26). Sehingga, jika dimisalkan  $Z$  sebagai batas atas dari  $Y^{-1}$  maka masalah dapat disajikan dalam bentuk berikut:

**Min trace (Z) Kendala:** LMI dalam persamaan (33), dan

$$\begin{bmatrix} Z & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (34)$$

Jika LMI di atas fisibel, maka gain controller dapat dihitung dengan  $K_i = X_i Y^{-1}$ .

**Kontrol Optimal Fuzzy Menggunakan LMI**

Pandang Sistem fuzzy Takagi-Sugeno (11) dan hukum kontrol umpan balik keadaan fuzzy (15) dengan sistem loop tertutup (14)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(x(t))(A_i - B_i K_i)x(t) + \sum_{i < j}^r \alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t))G_{ij}x(t) \quad (35)$$

dengan  $G_{ij} = A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i$ .

**Proposisi 1** [8][6] *Sistem fuzzy Takagi-Sugeno (11), hukum kontrol fuzzy (15) dan nilai performansi (27) dipikirkan nilai terjaminnya. Jika terdapat matriks definit positif Y dan matriks  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  dengan dimensi yang bersesuaian yang memenuhi*

$$Q \geq 0; \quad R \succ 0; \quad Y \succ 0 \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} Y A_i^T + A_i Y - B_i X_i - X_i^T B_i^T & Y Q^2 & X_i^T R^{1/2} & \dots & X_i^T R^{1/2} \\ Q^2 Y & -I_n & 0 & \dots & 0 \\ R^{1/2} X_i^T & 0 & -I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{1/2} X_i^T & 0 & 0 & \dots & -I_m \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} Y(A_i + A_j)^T + (A_i + A_j)Y - M_{ij} - M_{ij}^T & Y Q^2 & X_i^T R^{1/2} & \dots & X_j^T R^{1/2} \\ Q^2 Y & -I_n & 0 & \dots & 0 \\ R^{1/2} X_i^T & 0 & -I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{1/2} X_j^T & 0 & 0 & \dots & -I_m \end{bmatrix} < 0 \quad (38)$$

dengan  $Y = P^{-1}$  dan  $X_i = K_i Y$ , maka hukum kontrol fuzzy (15) dengan  $K_i = X_i Y$  adalah memenuhi hukum kontrol terjamin dan nilai diberikan oleh  $\delta = x_0^T Y^{-1} x_0$  adalah nilai terjamin.

**Algoritma Kontrol**

1. Mendefinisikan parameter pengontrol yang digunakan dalam perhitungan selanjutnya.
2. Menggunakan model TORA, Model fuzzy Takagi-Sugeno dipikirkan dan disusun dua model linear lokal yang melukiskan plant dinamis:

Aturan 1: IF  $|x_3(t)|$  mendekati 0,  
THEN  $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

Aturan 2: IF  $|x_3(t)|$  mendekati  $\frac{\pi}{2}$ ,  
THEN  $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$

3. Menyusun Matrik Ruang Keadaan Model Fuzzy. Model Linear disusun menggunakan prosedur yang dilukiskan oleh [9] untuk menentukan  $A_i, B_i$  dari model lokal yang berhubungan dengan aturan ke- $i$ .

4. Menggunakan fungsi membership sebagai berikut:

$$\mu_1 = 1 - \frac{2}{\pi} |x_3| \quad \text{dan} \quad \mu_2 = \frac{2}{\pi} |x_3|$$

5. Membangun suatu pengontrol yang stabil dalam bentuk (14) sedemikian sehingga sistem lup tertutup adalah stabil asimtotik.

- 5.1. Algoritma subroutine 1 :  
Metode Kontrol Fuzzy PDC
- 5.2. Algoritma subroutine 2 :  
Metode Kontrol Fuzzy Robust
- 5.3. Algoritma subroutine 3 :  
Metode Kontrol Fuzzy Optimal.

6. Menentukan indeks pencapaian.
7. Memeriksa bahwa syarat cukup yang diberikan oleh masing-masing pengontrol fuzzy untuk stabilitas asimtotik dalam sistem lup tertutup (14) dipenuhi.

**3. HASIL DAN PEMBAHASAN**

Hasil simulasi dari sistem lup tertutup dengan pengontrol fuzzy untuk sistem TORA ditunjukkan tingkat pencapaian untuk suatu kelas sistem nonlinear yang menggunakan pengontrol logika fuzzy dengan menggunakan tiga metode dengan asumsi : spesifikasi perancangan adalah : maksimum overshoot : 15 % dan 1.5 %

*settling time* : 15 detik,  $u_{\max} = 2$  dan diberikan  $x_0 = [0 \ 0 \ \pi/4 \ 0]'$ .

Metoda Kontrol *Fuzzy* PDC menggunakan suatu pendekatan LMI, dapat menuju suatu sistem yang stabil. Terlihat bahwa pengontrol *fuzzy* PDC menghasilkan respon yang baik. Hasil simulasi sistem kontrol *fuzzy* PDC menunjukkan bahwa Pengontrol *fuzzy* yang dirancang mempunyai Indeks Performansi sebesar 0.0472. Performansi terbaik sistem kontrol *fuzzy* PDC tercapai oleh respon sistem kontrol *fuzzy* dengan *settling time* (waktu penyelesaian) sebesar 2.12 detik, yang *overshoot* maksimumnya 5.78% dengan waktu mencapai puncak 11.52 detik. Gain umpan balik kontrol *fuzzy* PDC untuk model *fuzzy* Takagi-Sugeno dari sistem TORA adalah

$$F1 = [0.0387 \ -0.0378 \ 0.1937 \ 0.6049],$$

$F2 = [-0.1220 \ -0.1997 \ 0.1975 \ 0.6055]$  dan matriks Lyapunov

$$P = \begin{bmatrix} 0.2421 & -0.0042 & -0.0195 & -0.0365 \\ -0.0042 & 0.2369 & 0.0201 & 0.0211 \\ -0.0195 & 0.0201 & 0.0765 & 0.0740 \\ -0.0365 & 0.0211 & 0.0740 & 0.1280 \end{bmatrix}$$

adalah matriks definit positif. Sehingga dapat dicek bahwa syarat stabil asimtotik sistem dipenuhi. Pengontrol *fuzzy* PDC memberikan kestabilan asimtotik global untuk model rancangan.

Selanjutnya, Metoda Kontrol *Fuzzy* Robust menggunakan suatu pendekatan LMI, dapat menuju ke suatu sistem yang stabil. Hasil simulasi sistem kontrol *fuzzy* Robust menunjukkan bahwa Pengontrol *fuzzy* yang dirancang mempunyai Indeks Performansi sebesar 1.5512. Indeks Performansi sistem kontrol *fuzzy* Robust tercapai oleh respon sistem kontrol *fuzzy* dengan *settling time* sebesar 5.2 detik dengan *overshoot* sebesar 3.96% dengan waktu mencapai puncak 6.36 detik. Gain umpan balik kontrol *fuzzy* Robust untuk model *fuzzy* Takagi-Sugeno dari sistem TORA adalah

$$F1 = [-0.9689 \ -0.4934 \ 0.4648 \ 1.1647],$$

$F2 = [-0.9689 \ -0.4934 \ 0.4648 \ 1.1647]$  dan matriks Lyapunov

$$P = \begin{bmatrix} 66.4070 & -2.2740 & -1.4531 & -5.8958 \\ -2.2740 & 63.2255 & 2.3656 & 4.4901 \\ -1.4531 & 2.3656 & 2.5146 & 2.6604 \\ -5.8958 & 4.4901 & 2.6604 & 6.5071 \end{bmatrix}$$

adalah definit positif. Sehingga dapat dicek bahwa syarat stabil asimtotik sistem dipenuhi. Pengontrol *fuzzy* Robust memberikan kestabilan asimtotik global untuk model rancangan.

Metoda Kontrol *Fuzzy* Optimal menggunakan suatu pendekatan LMI, dapat membawa ke suatu sistem yang stabil. Hasil simulasi sistem kontrol *fuzzy* Optimal menunjukkan bahwa Pengontrol *fuzzy* yang dirancang mempunyai Indeks Performansi sebesar 1.5327. Indeks Performansi sistem kontrol *fuzzy* Optimal tercapai oleh respon sistem kontrol *fuzzy* dengan *settling time* sebesar 13 detik, *overshoot* maksimumnya 12.22 % dengan waktu mencapai puncak 7.58 detik. Gain umpan balik kontrol *fuzzy* Optimal untuk model *fuzzy* Takagi-Sugeno dari sistem TORA adalah

$$F1 = [-0.3122 \ 0.2140 \ 0.2292 \ 0.5580],$$

$F2 = [-0.4625 \ -0.7434 \ 0.2013 \ 0.5102]$  dan matriks Lyapunov

$$P = \begin{bmatrix} 64.3659 & -2.2705 & -1.3824 & -5.6757 \\ -2.2705 & 61.3917 & 2.3580 & 4.4705 \\ -1.3824 & 2.3580 & 2.4848 & 2.5858 \\ -5.6757 & 4.4705 & 2.5858 & 6.2522 \end{bmatrix}$$

adalah definit positif. Sehingga dapat dicek bahwa syarat stabil asimtotik sistem dipenuhi. Pengontrol *fuzzy* Robust memberikan kestabilan asimtotik global untuk model rancangan.

Dibandingkan dengan prosedur kontrol linear yang diusulkan [5]  $u = -c_1x_3 - c_2x_4$  dengan  $c_1 = 0.76817$  dan  $c_2 = 0.40362$ . Indeks performasinya adalah 49.14555, maka metode pengontrol *fuzzy* PDC, metode pengontrol *fuzzy* Robust dan metode pengontrol Optimal jauh lebih baik.

Selain itu sistem *fuzzy* TORA dapat dipandang sebagai pengaproksimasi sistem nonlinear TORA dengan pengontrol *fuzzy*

Takagi-Sugeno. Pendekatan yang pertama : metode pengontrol PDC dalam mengaproksimasi sistem nonlinear TORA diperoleh tingkat kesalahan untuk  $x_1$  : 0.0039,  $x_2$  : 0.0034,  $x_3$  : 0.0070 dan  $x_4$  = 0.0022 dan persentil variansi untuk  $x_1$  : 87.0005,  $x_2$  : 89.3247,  $x_3$  : 89.3247 dan  $x_4$  : 99.8803.

Pendekatan yang kedua : metode pengontrol Robust dalam mengaproksimasi sistem nonlinear TORA diperoleh tingkat kesalahan untuk  $x_1$  : 0.0052,  $x_2$  : 0.0044,  $x_3$  : 0.0077 dan  $x_4$  : 0.0061 dan persentil variansi untuk  $x_1$  : 99.8803,  $x_2$  : 90.8154,  $x_3$  : 99.9477 dan  $x_4$  : 99.2765.

Pendekatan yang ketiga : metode pengontrol Optimal dalam mengaproksimasi sistem nonlinear TORA diperoleh tingkat kesalahan untuk  $x_1$  : 0.0036,  $x_2$  : 0.0028,  $x_3$  : 0.0066 dan  $x_4$  : 0.0033 dan persentil variansi untuk  $x_1$  : 89.7247,  $x_2$  : 92.6420,  $x_3$  : 99.9797, dan  $x_4$  : 99.7896.

Sebagai perbandingan yang lainnya, yaitu menurut [6] bahwa indeks pencapaian untuk metode *Passivation Control* adalah 2.7957, untuk metode *PDC Control* adalah 3.5412 dan untuk metode *Fuzzy Optimal Control* adalah 1.6343. Selain itu menurut [7] bahwa indeks pencapaian untuk metode *optimal linear control* adalah 49.14555 dan metode *optimal fuzzy control* adalah 41.13903. Dengan demikian, ketiga pendekatan pengontrol *fuzzy* yang dibahas dalam tulisan ini memenuhi spesifikasi desain pengontrol *fuzzy* yang diinginkan dan lebih baik dibandingkan dengan [5], [6], dan [7].

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa perancangan pengontrol *fuzzy* untuk sistem nonlinear dengan studi kasus sistem TORA untuk menemukan  $P$  matriks definit positif yang menjamin kestabilan asimtotik

global sistem *fuzzy* Takagi-Sugeno. Pengontrol *fuzzy* dirancang untuk menyelesaikan masalah optimalisasi menghasilkan sistem lup tertutup yang stabil asimtotik global. Tingkat performansi yang ditunjukkan sistem nonlinear yang menggunakan pengontrol logika *fuzzy* memenuhi asumsi spesifikasi perancangan yang ditetapkan dan lebih baik daripada tingkat performansi yang didapatkan oleh dengan [5], [6], dan [7]. Hasil simulasi sistem TORA dengan pengontrol *fuzzy* dapat menunjukkan stabilitas yang terjamin dan keefektifan pendekatan metodologi yang dilakukan.

#### 5. SARAN

Dalam tulisan ini perancangan pengontrol *fuzzy* dalam Model *fuzzy* Takagi-Sugeno untuk sistem nonlinear dengan studi kasus sistem TORA tipe waktu kontinu. Penelitian lebih lanjut disarankan untuk melakukan perancangan pengontrol *fuzzy* dengan tipe waktu diskrit dan lebih jauh lagi bisa dilakukan perancangan pengobservasi *fuzzy*, serta dapat dilakukan berbagai perancangan pengontrol *fuzzy* dengan tipe waktu kontinu maupun diskrit dengan pendekatan non LMI. Karena pendekatan dengan LMI per-lu banyak iterasi untuk mendapatkan hasil yang diinginkan, terutama penjaminan stabilitas dan keefektifan penyelesaian.

#### 6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boyd S., Balakrishnan V., Feron E, Ghaoui L.E.(1993), *Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities*, In Proc. American Control Conference, San Diego, CA, pp. 2147 – 2154.
- [2] Bupp R.T., Bernstein D.S., and Coppola V.T. (1998), *Experimental Implementation Of Integrator Backstepping And Passive Nonlinear Controllers On The RTAC Testbed*, International Journal Of Robust And Nonlinear Control, Int. J. Robust Nonlinear Control Vol.8 : 435 – 457.

- [3] Chen B.S., Tseng C.S., and Uang J.C., Oct.(1999), *Robustness Design of Nonlinear Dynamic Systems via Fuzzy Linear Control*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.7, No.5 : 571 – 585.
  - [4] Jadbabaie A., Titli A., Jamshidi M., and Dorato P. (1998), *Guaranteed-Cost Control of the Nonlinear Benchmark Problem Using Model-Based Fuzzy Systems*, CCA Conference.
  - [5] Jankovic M., Fontaine D., dan Kokotovic P.V. (1996), *TORA Example : Cascade and Passivity-based Control Designs*, IEEE Trans. Control Systems Technology, Vol.4, No.3 : 292 – 297.
  - [6] Li J., Wang H.O., Bushnell L., Hong Y. dan Tanaka K. (2000), *A Fuzzy Logic Approach to Optimal Control of Nonlinear Systems*, International Journal of Fuzzy Systems, Vol. 2, No. 3.
  - [7] Margaliot M., and Langholz G. (2001), *Fuzzy Control of a Benchmark Problem : A Computing with Words Approach*, Joint 9th IFSA word Conference and 20th NAFIPS International Conference, Vancouver, Canada.
  - [8] Natache S.D., Arrifano and Oliveira V.A. (2005), *Guaranteed Cost Fuzzy Controllers for a Class of Uncertain Nonlinear Dynamic Systems*, Computational & Applied Mathematics.
  - [9]. Teixeira M.C.M., and Zak S.H. (1999), *Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.7, No.2 : 133 – 142.
  - [10].Wang H.O., Li J., Niemann D, Tanaka K. (2000), *T-S Fuzzy Model With Linear Rule Consequence And PDC Controller : A Universal Framework For Nonlinear Control Systems*, in Proc. 9th IEEE Int. Conf. On Fuzzy Systems.
  - [11].Zadeh, L.A. (1965), *Fuzzy Sets*, Information and Control, Vol 8, No.3 : 338 – 353.
-