SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY

Beta Noranita
Program Studi Ilmu Komputer
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang Semarang
Email : beth2nice@yahoo.com

Abstract. Let AU = V be fuzzy system of linear equations. The fuzzy system of linear equations consist of n variables and n equations.We rearrange the fuzzy system of linear equations became 2n variables and 2n equations. The new system was devoted by BX* = V*. In this paper, we show that solution of BX* = V* can be used to find AU = V fuzzy system of linear equations, whenever B^{-1} is non-negative.

Keywords: Fuzzy numbers, system of linear equations, and non-negative matrix.

1. PENDAHULUAN

Problem-problem di bidang rekayasa dan sains dapat dimodelkan menggunakan persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial. Pada umumnya, menentukan solusi eksak persamaan diferensial biasa/persamaan diferensial parsial tidak dapat ditemukan dengan mudah. Sistem persamaan linear (SPL) memegang peranan penting dalam menentukan solusi pendekatan persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial [5]. Oleh karenanya, peranan matriks untuk menentukan solusi pendekatan persamaan diferensial sangat besar. Pengertian sifat-sifat matriks yang digunakan dalam makalah ini merujuk pada [4] & [6].

Teori *fuzzy* dapat digunakan dalam bidang teori kontrol, teori keputusan, dan beberapa bagian dalam managemen sains [3] & [7]. Bidang-bidang tersebut memerlukan sistem persamaan berbasis teori *fuzzy* sebagai model matematikanya. Friedman et. al. merumuskan lebih tegas mengenai solusi sistem linear *fuzzy*, khususnya daerah fisibel dari permasalahan sistem linear tersebut [1]. Lebih lanjut, bilangan *fuzzy* yang digunakan hanya bilangan *fuzzy* yang disusun oleh fungsi-fungsi linear.

Dalam makalah ini, notasi R menyatakan himpunan semua bilangan real. Bilangan *fuzzy* yang dimaksud adalah bilangan *fuzzy* yang disusun oleh fungsi dengan domain dan kodomainnya di R. Dalam makalah ini, dibuktikan syarat perlu dan cukup agar solusi sistem persamaan linear dapat digunakan menjadi solusi sistem persamaan linear *fuzzy*. Matriks koefisien dari sistem persamaan baru haruslah bersifat non-negatif.

2. BILANGAN *FUZZY*

Bilangan *fuzzy* u dalam R didefinisikan sebagai pasangan fungsi $(\underline{u}, \overline{u})$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) fungsi $\underline{u}$ monoton naik, terbatas, dan kontinu kiri pada [0, 1],

(b) fungsi $\overline{u}$ monoton turun, terbatas, dan kontinu kanan pada [0, 1], dan

(c) $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$ untuk setiap r dalam [0, 1].

Untuk definisi bentuk lain bilangan *fuzzy* dapat dilihar secara detail dalam [3] & [7]. Himpunan bilangan-bilangan *fuzzy* dinyatakan dengan F. Untuk selanjutnya, setiap bilangan *fuzzy* $u \in F$ ditulis dalam bentuk parameter $u = (\underline{u}, \overline{u})$.

Operasi aljabar bilangan *fuzzy* menggunakan definisi seperti dalam [1] & [2]. Untuk setiap u, $v \in F$ dan bilangan real α didefinisikan :

(d) $u = v$ jika dan hanya jika $\underline{u} = \underline{v}$ dan $\overline{u} = \overline{v}$.

(e) $u + v = (\underline{u} + \underline{v}, \overline{u} + \overline{v})$

(f) $\alpha u = (\alpha \underline{u}, \alpha \overline{u})$ untuk $\alpha \geq 0$

(g) $\alpha u = (\alpha \overline{u}, \alpha \underline{u})$ untuk $\alpha < 0$

3. SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY*

Diberikan sistem persamaan linear n variabel dan n persamaan dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$Ax = y \qquad (1)$$

dengan A matriks persegi yang entri-entriya bilangan real, dan x, y adalah vektor-vektor di dalam R^n. Metode-metode untuk menyelesaikan persamaan (1) dapat dilihat dalam [4] & [5].

Model permasalahan sistem persamaan linear *fuzzy* dijelaskan sebagai berikut :

Diberikan $u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n \in F$ dan $a_{i,j} \in R$ untuk $1 \leq i, j \leq n$.

Sistem persamaan

$$\begin{aligned} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \cdots + a_{1,n}u_n &= v_1 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \cdots + a_{2,n}u_n &= v_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \\ a_{n,1}u_1 + a_{n,2}u_2 + \cdots + a_{n,n}u_n &= v_n \end{aligned} \qquad (2)$$

dinamakan sistem persamaan linear *fuzzy* (SPL-*fuzzy*).

Sistem persamaan (2) dapat ditulis dalam bentuk matriks $AU = V$ dengan $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$,

$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ dan

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Model sistem persamaan linear (2) mempunyai solusi *fuzzy* jika terdapat vektor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ di dalam F^n sedemikian sehingga $\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{j,k}x_j} = \overline{v}_j$ dan $\sum_{k=1}^{n} \underline{a_{j,k}x_j} = \underline{v}_j$, untuk setiap $j = 1, 2, \cdots, n$.

Mengingat operasi aljabar pada bilangan *fuzzy* (aksioma (d)-(g)), fungsi-fungsi $\overline{v}_j$ dan $\underline{v}_j$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\overline{x}_j$ dan $\underline{x}_j$. Sistem persamaan (2) diubah ke bentuk $(2n)$ variabel dan $(2n)$ persamaan menjadi

$$BX^* = V^* \qquad (3)$$

dengan $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,2n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & b_{2n,2} & \cdots & b_{2n,2n} \end{bmatrix}$,

$X^* = \left[\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_n, -\overline{x}_1, \cdots, -\overline{x}_n\right]^T$ dan

$V^* = \left[\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n, -\overline{v}_1, \cdots, -\overline{v}_n\right]^T$.

Entri-entri $b_{i,j}$ ditentukan sebagai berikut:

- jika $a_{i,j} \geq 0$ maka $b_{i,j} = a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{i,j}$
- jika $a_{i,j} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{i,j}$
- $b_{i,j} = 0$ untuk lainnya.

Persamaan (3) bukan sistem persamaan linear *fuzzy*. Persamaan (3) merupakan persamaan linear biasa yang nilai variabelnya berada dalam ruang fungsi. Dengan menggunakan persamaan (3), dimungkinkan sistem persamaan linear *fuzzy* dapat diselesaikan melalui penyelesaian sistem persamaan linear biasa. Lebih lanjut, matriks B pada persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk matriks blok

$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$, sehingga matriks koefesien A pada persamaan (2) adalah $A = B_1 - B_2$.

Contoh 1

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy*

$$x_1 - x_2 = v_1$$
$$x_1 + x_2 = v_2$$

Matriks A seperti dalam persamaan (2) adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, matriks B seperti dalam persamaan (3) adalah

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy*

$$x_1 - x_2 = v_1$$
$$x_1 + 3x_2 = v_2$$

Jika sistem persamaan ini diubah menjadi persamaan (3), maka

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 \quad\quad + (-\overline{x}_2) &= \underline{v}_1 \\ \underline{x}_1 + 3\underline{x}_2 \quad\quad &= \underline{v}_2 \\ \underline{x}_2 + (-\overline{x}_1) \quad &= -\overline{v}_1 \\ (-\overline{x}_1) + 3(\overline{x}_2) &= -\overline{v}_2 \end{aligned}$$

Teorema 1

Diberikan $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ *adalah matriks koefesien pada persamaan (3). Matriks B tak-singular jika dan hanya jika matriks-matriks* $A = B_1 - B_2$ *dan* $B_1 + B_2$ *keduanya tak-singular.*

Bukti :

($\Rightarrow$) Dengan menggunakan operasi elementer baris/kolom pada matriks $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$, didapat matriks $C = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & B_1 + B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$. Jika matriks C dikenai operasi elementer jumlahan dua kolom, didapat $D = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 - B_2 \end{bmatrix}$.

Matriks C adalah matriks yang dihasilkan dari operasi elementer jumlahan dua baris/kolom dari matriks B. Sedangkan matriks D adalah matriks yang dihasilkan dari operasi elementer jumlahan dua baris/kolom dari matriks C.

Hal ini berakibat,

$$\det(B) = \det(C) = \det(D),$$

sehingga $\det(B) = \det(D)$

$$= \det(B_1 + B_2).\det(B_1 - B_2)$$

Karena B tak-singular maka $\det(B) \neq 0$ dan $\det(B_1 + B_2).\det(B_1 - B_2) = \det(B) \neq 0$. Hal ini mengakibatkan $\det(B_1 + B_2) \neq 0$ dan $\det(B_1 - B_2) \neq 0$. Jadi matriks $A = B_1 - B_2$ dan $B_1 + B_2$ keduanya tak-singular.

($\Leftarrow$) Diketahui matriks $A = B_1 - B_2$ dan $B_1 + B_2$ keduanya tak-singular. Jadi $\det(B_1 + B_2) \neq 0$ dan $\det(B_1 - B_2) \neq 0$.

Dengan cara serupa seperti pada bagian sebelumnya, didapat

$$\det(B) = \det(C) = \det(D)$$

dengan $C = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & B_1 + B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 - B_2 \end{bmatrix}$.

Hal ini berakibat

$\det(B) = \det(D)$

$$= \det(B_1 + B_2) \cdot \det(B_1 - B_2) \neq 0,$$

karena nilai $\det(B_1 + B_2) \neq 0$ dan nilai $\det(B_1 - B_2) \neq 0$. Sehingga B adalah matriks tak-singular. Bukti selesai.

Teorema 2

Diberikan $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ *adalah matriks koefesien pada persamaan (3). Jika invers matriks B ada, maka inversnya berbentuk* $B^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}$.

Bukti :

Misalkan $b_{i,j}$ dan $b^*{}_{i,j}$ berturut-turut menyatakan entri matriks B dan B^{-1} pada baris ke-i dan kolom ke-j. Karena $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} adj(B)$, maka

$$b^*{}_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}\det(B_{j,i})}{\det(B)} \qquad (4)$$

dengan $B_{j,i}$ sub matriks yang diperoleh dengan cara mengeliminasi baris ke-j dan kolom ke-i dari matriks B.

Perhatikan sub matriks $B_{j+n,i}$ dan $B_{j,i+n}$. Matriks $B_{j+n,i}$ dapat diperoleh melalui operasi elementer pertukaran baris dan kolom dari $B_{j,i+n}$ sebanyak p kali, dengan p bilangan genap. Oleh karenanya, det($B_{j+n,i}$) = (-1)^{p} det($B_{j,i+n}$) = det($B_{j,i+n}$).

Dari persamaan (4) dan mengingat det($B_{j+n,i}$) = det($B_{j,i+n}$), maka

$$b^*{}_{i+n,j} = \frac{(-1)^{i+n+j}\det(B_{j,i+n})}{\det(B)}$$

$$= \frac{(-1)^{i+n+j}\det(B_{j+n,i})}{\det(B)} = b^*{}_{i,j+n}$$

untuk setiap $1 \le i, j \le n$. Sampai di sini, didapat $B^{-1} = \begin{bmatrix} * & N \\ N & * \end{bmatrix}$

Perhatikan juga sub matriks $B_{j,i}$ dan $B_{j+n,i+n}$, untuk $1 \le i, j \le n$.

Karena $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ maka $B_{j+n,i+n}$ dapat diperoleh menggunakan operasi elementer pertukaran baris dan kolom dari $B_{j,i}$ sebanyak q kali, dengan q bilangan genap. Oleh karenanya,

det($B_{j,i}$) = (-1)^{q} det($B_{j+n,i+n}$)

= det($B_{j+n,i+n}$).

Hal ini berakibat

$$b^*{}_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}\det(B_{j,i})}{\det(B)}$$

$$= \frac{(-1)^{i+j}(-1)^{2n}\det(B_{j+n,i+n})}{\det(B)}$$

$$= \frac{(-1)^{(i+n)+(j+n)}\det(B_{j+n,i+n})}{\det(B)}$$

$$= b^*{}_{i+n,j+n}$$

untuk setiap $1 \le i, j \le n$.

Terbukti bahwa $B^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}$.

Persamaan (3) merupakan perubahan bentuk dari sistem persamaan linear *fuzzy*. Walaupun persamaan (3) mempunyai solusi tunggal, tidak berarti sistem persamaan linear *fuzzy* langsung dipeeroleh solusinya. Jika B dalam (3) tak-singular, tidak ada jaminan bahwa $X = B^{-1}V \in F$, untuk setiap $V \in F$. Contoh berikut memperlihatkan bahwa persamaan (3) mempunyai solusi tunggal tetapi permasalahan SPL-*fuzzy* tidak mempunyai solusi tunggal.

Contoh 3

Diberikan permasalahan SPL-*fuzzy*

$$x_1 + x_2 - x_3 = (r, 2-r)$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = (2+r, 3)$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = (-2, -1-r)$$

Jika diubah dalam bentuk persamaan (3), maka diperoleh matriks-matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} r \\ 2+r \\ -2 \\ r-2 \\ -3 \\ 1+r \end{bmatrix}.$$

dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mempunyai invers, sehingga solusi (penyelesaian) persamaan (3) adalah

$$X = [-2.31 + 3.62r, -0.62 - 0.77r, 1.08 - 2.15r, -4.69 + 3.38r, 1.62 - 0.32r, 2.92 - 1.85r]^T$$

Misalkan
$x_1 = [-2.31 + 3.62r, 4.69 - 3.38r]^T$,
$x_2 = [-0.62 - 0.77r, -1.62 + 0.23r]^T$ dan
$x_3 = [1.08 - 2.15r, -2.92 + 1.85r]^T$.
Vektor (x_1, x_2, x_3) bukan solusi SPL-*fuzzy* ini, karena x_1 dan x_2 bukan bilangan *fuzzy*.

Teorema berikut memperlihatkan syarat cukup dan syarat perlu agar solusi persamaan (3) juga menjadi solusi untuk SPL *fuzzy* semula. Sebelumnya, didefinisikan pengertian sifat ketak-negatifan yang dimiliki suatu matriks.

Matriks $Q = [q_{i,j}]$ dikatakan non-negatif jika untuk setiap i dan setiap j berlaku $q_{i,j} \geq 0$ [4] & [6]. Sebagai contoh, matriks koefisien pada persamaan (3) di atas adalah matriks non-negatif.

Toerema 3
Diberikan SPL-fuzzy $AU = V$ dengan n variable dan n persamaan. Persamaan $BX^* = V^*$ seperti persamaan (3), dengan B non-singular. Solusi $BX^* = V^*$ menjadi solusi SPL-fuzzy $AU = V$ jika dan hanya jika matriks B^{-1} non-negatif.

Bukti :
($\Rightarrow$) Misalkan $B^{-1} = [b^*_{i,j}]$ dan $X^* = [\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_n, -\overline{x}_1, \cdots, -\overline{x}_n]^T$.
Karena $X^* = B^{-1}V^*$, maka diperoleh

$$\underline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}\underline{v}_i - \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}\overline{v}_i \tag{5}$$

$$-\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b^*_{i+n,j}\underline{v}_i - \sum_{j=1}^{n} b^*_{i+n,j+n}\overline{v}_i \tag{6}$$

untuk $1 \leq i, j \leq n$.

Selanjutnya karena $B^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}$ maka persamaan (6) menjadi

$$-\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}\underline{v}_i - \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}\overline{v}_i, \quad \text{sehingga}$$

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}\overline{v}_i - \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}\underline{v}_i \tag{7}$$

Jika persamaan (7) dikurangi dengan persamaan (5), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\overline{x}_i - \underline{x}_i &= (\sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}\overline{v}_i - \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}\underline{v}_i) \\ &\quad - (\sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}\underline{v}_i - \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}\overline{v}_i) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}\overline{v}_i - \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}\underline{v}_i -) \\ &\quad + (\sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}\overline{v}_i - \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}\underline{v}_i) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}(\overline{v}_i - \underline{v}_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}(\overline{v}_i - \underline{v}_i))\end{aligned} \tag{8}$$

Diketahui $V \in F^n$ maka $v_1, v_2, \cdots, v_n \in F$, sehingga $(\overline{v}_i - \underline{v}_i) \geq 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$.
Diketahui pula bahwa $\overline{x}_i - \underline{x}_i \geq 0$. Hal ini berakibat $b^*_{i,j} \geq 0$ untuk setiap i dan j. Dengan kata lain matriks $B^{-1} = [b^*_{i,j}]$ non-negatif.

($\Leftarrow$) Misalkan $B^{-1} = [b^*_{i,j}]$ matriks non-negatif. Jadi $b^*_{i,j} \geq 0$ untuk setiap i dan j. Dengan cara yang serupa seperti pada bagian sebelumnya, didapat persamaan (8)

$$\begin{aligned}\overline{x}_i - \underline{x}_i &= (\sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}(\overline{v}_i - \underline{v}_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}(\overline{v}_i - \underline{v}_i)).\end{aligned}$$

Diketahui pula
$V^* = [\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n, -\overline{v}_1, \cdots, -\overline{v}_n]^T$
solusi persamaan (3) dan $v_1, v_2, \cdots, v_n \in F$, maka $(\overline{v}_i - \underline{v}_i) \geq 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$.
Akibatnya,

$$\begin{aligned}\overline{x}_i - \underline{x}_i &= (\sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j}(\overline{v}_i - \underline{v}_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} b^*_{i,j+n}(\overline{v}_i - \underline{v}_i)) \geq 0\end{aligned}$$

untuk $1 \leq i \leq n$.

Sehinngga $x_1, x_2, \cdots, x_n \in F$ atau $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \in F^n$. Dengan demikian, solusi ini menjadi solusi sistem persamaan linear *fuzzy*. Bukti selesai.

Dalam contoh 3, matriks B adalah matriks non-negatif. Tetapi invers matriks B, yakni B^{-1} adalah

$$\begin{bmatrix} 2.7692 & -0.8462 & -0.4615 & 2.2308 & -1.1538 & -0.5385 \\ -0.4615 & 0.3077 & 0.0769 & -0.5385 & 0.6923 & -0.0769 \\ -1.6923 & 0.4615 & 0.6154 & -1.3077 & 0.5385 & 0.3846 \\ 2.2308 & -1.1538 & -0.5385 & 2.7692 & -0.8462 & -0.4615 \\ -0.5385 & 0.6923 & -0.0769 & -0.4615 & 0.3077 & 0.0769 \\ -1.3077 & 0.5385 & 0.3846 & -1.6923 & 0.4615 & 0.6154 \end{bmatrix}$$

jelas bukan matriks non-negatif. Sebab terdapat entri matriks B^{-1} yang bernilai negatif. Mengingat teorema 3, solusi persamaan linearnya tidak langsung menjadi solusi persamaan linear *fuzzy*.

4. KESIMPULAN

Sistem persamaan linear *fuzzy* (SPL-*fuzzy*) dapat diubah menjadi bentuk sistem persamaan linear biasa. Dari sistem *n* variabel dan *n* persamaan diubah menjadi sistem *2n* variabel dan *2n* persamaan. Solusi sistem persamaan baru, tidak secara langsung menjadi solusi sistem persamaan semula. Contoh 3 memperlihatkan bahwa solusi sistem persamaan baru, tidak menjadi sistem persamaan semula. Jika matriks koefisien dari sistem persamaan bersifat non-negatif, maka solusinya menjadi sistem persamaan semula. Hal ini ditulis dalam Teorema 2.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Friedman, M, Ma Ming, and A Kandel, (1998), *Fuzzy linear system*, Fuzzy Set and System, No. 96, 201-209.

[2]. Kajani, M.T., Asady, B., and Vencheh, A.H., (2005), *An Iterative Method for Solving Dual Fuzzy Nonlinear Equations*, AMC, No. 167, 316-323.

[3]. Kwang F Lee, (2005), *First course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer, Germany.

[4]. Lukeplod, H., (1996), *Handbook of Matrices*, John Wiley & Sons, England.

[5]. Saad, Y., (1996), *Iterative Methods for Sparse Linear System*, PWS Publishing Company, a Division of International Thomson Publishing Inc., VSA.

[6]. Sire, D., (2002), *Matrices : Theory and Applications*, Springer, Germany

[7]. Sivanandam, S.N., Sumanthi, S., and Deepa, S.N., (2007), *Introduction to Fuzzy Logic using Matlab*, Springer, Berlin-Germany.