Graf Fuzzy Produk

Fery Firmansyah[1] dan Bayu Surarso[2]
[1.2]Program Studi Matematika FMIPA UNDIP
Jl.Prof.Soedarto, S.H Semarang 50275

Abstract. Fuzzy graph is a graph which is consists of a pairs of vertex and edge that have degree contained on closed interval of real number [0,1] on each edge and vertex. Product fuzzy graph was defined by Dr. V. Ramaswamy and Poornima B by replacing "infimum" in definition of fuzzy graph by "product". In this paper we study product fuzzy graph complete, in connection complement of produk fuzzy graph, join of produk fuzzy graph and multiplication of produk fuzzy graph. We show that complement of the multiplication of two product fuzzy graphs complete is a multiplication of its complement, in which this disposition produces nil graph.

Keywords : product fuzzy graphs, product fuzzy graphs complete

1. PENDAHULUAN

Konsep Graf fuzzy diperkenalkan pertama kali oleh Rosenfeld pada tahun 1975. Graf fuzzy didefinikan sebagai suatu graf yang terdiri dari pasangan himpunan titik dan himpunan garis , dengan dan berturut-turut merupakan suatu fungsi $\rightarrow [0,1]$ dan $\times \rightarrow [0,1]$ yang memenuhi sifat ( ) ≤ ( ) dan ( ) ≤ ( )untuk setiap , . (Lihat [2])

Penelitian tentang graf fuzzy tersebut terus berkembang baik secara teoritis maupun aplikasi (Lihat antara lain [1], [2], [3], [4] dan [5]). Pada [5] Ramaswamy dan Poornima memodifasi graph fuzzy, dimana ketentuan ( ) ≤ ( ) dan ( ) ≤ ( ) pada definisi graf fuzzy yang digantikan dengan sifat ( ) ≤ ( ) × ( ). Hasilnya merupakan jenis graf fuzzy baru yang kemudian disebut graf fuzzy produk. Tulisan ini membahas dan melengkapi konsep-konsep berkaitan dengan graf fuzzy produk yang disampaikan pada [5], terutama tentang graf fuzzy produk komplit.

2. PEMBAHASAN

Berlatar belakang pengembangan konsep himpunan tegas ke himpunan fuzzy, Rosenfeld mengembangkan konsep graf dan mendefinisikan suatu graf berbobot yang disebut graf fuzzy sebagai berikut.

Definisi 2.1 [2] *Misalkan adalah himpunan berhingga. Suatu graf fuzzy yang adalah graf yang terdiri dari pasangan himpunan titik dan himpunan garis dengan dan berturut-turut merupakan suatu fungsi* $\rightarrow [0,1]$ *dan* $\times \rightarrow [0,1]$ *yang memenuhi* ( ) ≤ ( ) ( ) *untuk setiap* , .

Dengan mempertimbangkan sifat bahwa hasil kali dua bilangan real yang nilainya antara 0 dan 1, merupakan bilangan real yang nilainya juga antara 0 dan 1, Ramaswamy dan Poornima memodifikasi konsep tersebut menjadi menjadi graf fuzzy produk sebagai berikut:

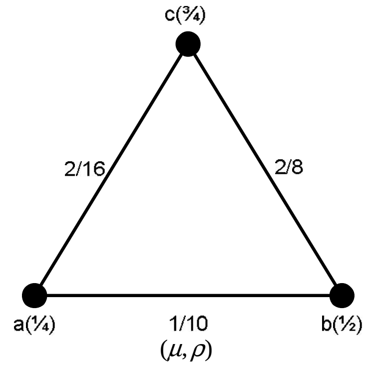
Definisi 2.2 [5] *Suatu graf fuzzy produk yang dinotasikan dengan* (,) *adalah graf yang terdiri dari pasangan himpunan titik dan himpunan garis dengan,*

i. : $\rightarrow [0,1]$

ii. : $\times \rightarrow [0,1]$

yang memenuhi ( ) ≤ ( ) × ( ) *untuk setiap* , .

Sebagai contoh, dapat dicek bahwa graf pada gambar berikut memenuhi ketentuan sebagi graf fuzzy produk.



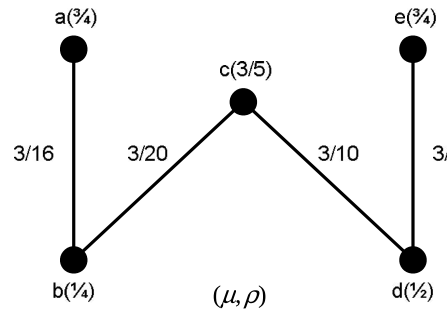
Gambar 1. Gambar Graf Fuzzy Produk

Sebagai cacatan, jika (,) adalah graf fuzzy produk, maka untuk setiap , didapatkan ( ) ≤ ( ) × ( ) ≤ ( ) ( ) yang mengakibatkan bahwa (,) adalah graf fuzzy, jadi setiap graf fuzzy produk adalah graf fuzzy.

Seperti pada konsep graf fuzzy, pada konsep graf fuzzy produk dapat didefinisikan beberapa terminologi seperti berikut.

Definisi 2.3 [5] *Suatu graf fuzzy produk (,) adalah graf fuzzy produk komplit jika memenuhi ( ) = ( ) × ( ) untuk setiap , .*

Contoh 2.4 Misalkan diberikan graf tegas = (,) pada Gambar 3.3 dimana = { , , , , } dan = { , , , } dengan derajat keanggotaan titiknya adalah ( ) = –, ( ) = –, ( ) = –, ( ) = –, ( ) = – dan derajat keanggotaan sisinya adalah ( ) = —, ( ) = —, ( ) = —, dan ( ) = –maka graf fuzzy (,) yang digambarkan seperti di bawah ini adalah graf fuzzy produk komplit:



Gambar 2. Gambar Graf Fuzzy Produk komplit

Definisi 2.5 [5] *Misalkan (,) adalah graf fuzzy produk, maka komplemen dari (,) adalah graf fuzzy, dinotasikan (,), yang memenuhi = dan* ( ) = ( ) × ( ) − ( ) = ( ) × ( ) − ( )Dari Definisi 2.4, dikarenakan sifat ( ) ≤ ( ) × ( ) dengan ( ) × ( ) selalu positif maka ( ) = ( ) × ( ) − ( ) ≤ ( ) × ( ) = ( ) × ( ) sehingga ( ) ≤ ( ) × ( ), yang berarti bahwa (,) adalah graf fuzzy produk.

Definisi 2.6 [5] *Misalkan* (,) *dan* (,) *berturut-turut adalah graf fuzzy produk dari = (,) dan = (,), dimana adalah himpunan semua garis yang menghubungkan titik-titik dari dan dan diasumsikan bahwa ∩ = , maka join dari* (,) *dan* (,) *yang dinotasikan* (+ , +) *didefinisikan sebagai berikut:*

(+)( ) = ( ) *jika*

= ( ) *jika*

(+)( ) = ( ) *jika*

= ( ) *jika*

= ( ) × ( )

Jika (( ) , ( )) = (+ , +)

Definisi 2.6 [5] *Misalkan* (,) *dan* (,) *berturut-turut adalah graf fuzzy produk dari = (,) dan = (,), maka perkalian dari* (,) *dan* (,) *yang dinotasikan* (× , ×) *didefinisikan sebagai berikut :*

(×)(,) = ( ) × ( ) *jika dan*

(×) (,)(,) = ( ) × ( ) *untuk setiap , dan untuk setiap , dimana*

i. × × → [0,1]

ii. × (×) × (×) → [0,1]

Dari beberapa pengertian di atas, diperoleh beberapa sifat sebagai berikut.

Lemma 2.7 [5] *Misalkan (,) adalah graf fuzzy produk, maka (,) merupakan graf fuzzy tanpa garis.*

Teorema 2.8 [5] *Misalkan* (,) *dan* (,) *berturut-turut adalah graf fuzzy produk dari* = (,) *dan* = (,), *maka* (+ , +) *adalah graf fuzzy produk dari* = (,) *dimana* = *dan* = .

Teorema 2.9 [5] *Misalkan* (,) *dan* (,) *berturut-turut adalah graf fuzzy produk komplit dari* = (,) *dan* = (,), *maka* (+ , +) *adalah graf fuzzy produk komplit jika dan hanya jika* (,) *dan* (,) *keduanya adalah graf fuzzy produk komplit.*

Teorema 2.10 [5] *Misalkan* (,) *dan* (,) *berturut-turut adalah graf fuzzy produk dari* = (,) *dan* = (,), *maka sifat berikut terpenuhi :* ((+) ,(+)) = (,)

Teorema 2.11 [5] *Misalkan* (,) *dan* (,) *berturut-turut adalah graf fuzzy produk dari* = (,) *dan* = (,), *maka* (× , ×) *adalah graf fuzzy produk dari* × .

Teorema 2.12 [5] *Misalkan* (,) *dan* (,) *berturut-turut adalah graf fuzzy produk dari* = (,) *dan* = (,), *maka* (× , ×) *adalah graf fuzzy produk komplit jika dan hanya jika keduanya* (,) *dan* (,) *adalah graf fuzzy produk komplit.*

Pada tulisan dibuktikan bahwa sifat berikut.

Teorema 2.13 *Misalkan* (,) *dan* (,) *berturut-turut adalah graf fuzzy produk komplit dari* = (,) *dan* = (,), *maka berlaku*

((×) ,(×))

= (× , ×)

Bukti :

Jika , dan , maka

a) (×) (,) = (×)(,) = ( ) × ( )
= ( ) × ( )

b) (×) (,)(,) = (×)(,) × (×)(,) −
(×) (,)(,) = ( ) × ( ) × ( ) × ( ) − (( ) × ( )) = ( ) × ( ) × ( ) × ( ) − ( ) × ( ) × ( ) × ( ) = ( ) × ( ) × ( ) × ( ) − ( ) × ( ) × ( ) × ( )
= 0 = 0 × 0 = ( ) × ( ) − ( ) × ( ) × ( ) × ( ) − ( ) × ( ) = ( ) × ( ) − ( ) × ( ) × ( ) × ( ) − ( ) × ( ) = ( ) × ( ) − ( ) × ( ) × ( ) − ( ) = ( ) × ( ) = (×) (,)(,)

Dari (a) dan (b) terbukti bahwa ((×) ,(×)) = (× , ×) ■

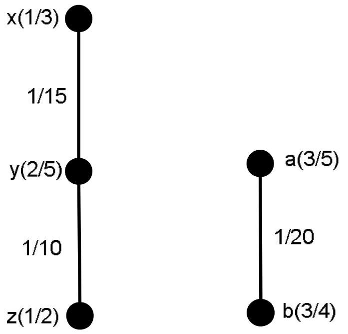
Catatan :

a. Berdasarkan hasil yang diperoleh maka Teorema 2.6 menghasilkan graf yang tidak memiliki sisi atau graf nol.

b. Misalkan (,) dan (,) berturut-turut adalah graf fuzzy produk dari = (,) dan = (,), maka tidak selalu berlaku ((×

) , (×)) = (× , ×).

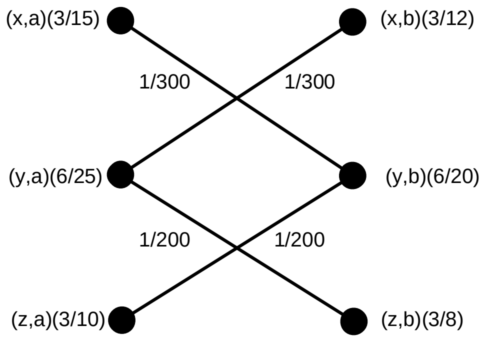
Contoh 2.14 Misalkan diberikan dua graf fuzzy produk seperti pada gambar berikut



(μ_1, ρ_1) (μ_2, ρ_2)

Gambar 3.

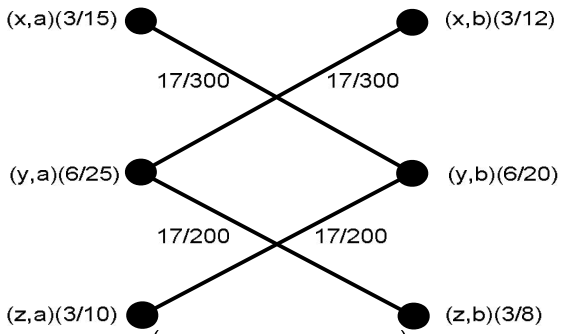
Perkalian graf fuzzy produk (× , ×) kedua graf fuzzy produk menghasilkaqn ngraf fuzzy produk sebagai berikut :



$(\mu_1 \times \mu_2, \rho_1 \times \rho_2)$

Gambar 4.

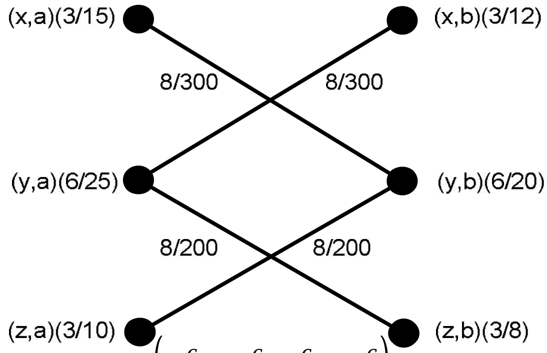
Graf fuzzy ((×) , (×)) akan berbentuk



$\left((\mu_1 \times \mu_2)^c, (\rho_1 \times \rho_2)^c\right)$

Gambar 5.

Disisi yang lain (× , ×) akan dapat digambarkan sebagai berikut



$\left(\mu_1^c \times \mu_2^c, \rho_1^c \times \rho_2^c\right)$

Gambar 6.

3. PENUTUP

Pada [5] diperoleh beberapa sifat pada graf fuzzy produk sebagai berikut; komplemen dari graf fuzzy produk adalah graf fuzzy, join dari graf fuzzy produk adalah graf fuzzy produk dan join dari graf fuzzy produk komplit jika dan hanya jika keduanya adalah graf fuzzy produk komplit, komplemen dari join dua buah graf fuzzy produk adalah gabungan dari komplemennya dan komplemen dari gabungan dua buah graf fuzzy produk adalah join dari komplemennya, sedangkan untuk operasi perkalian dari graf fuzzy produk didapatkan bahwa perkalian dari graf fuzzy produk adalah graf fuzzy produk dan perkalian dari graf fuzzy produk komplit jika dan hanya jika keduanya adalah graf fuzzy produk komplit. Pembahasan dimuka melengkapi sifat-sifat yang telah diperoleh tersebut dengan beberapa sifat sebagai berikut: produk dan komplemen dari graf fuzzy produk komplet merupakan graf fuzzy produk tanpa garis, komplemen dari perkalian dua buah graf fuzzy produk komplit merupakan perkalian dari komplemennya dan lebih lanjut lagi hasilnya merupakan graf fuzzy produk tanpa garis, dilain pihak komplemen dari perkalian dua buah graf fuzzy produk belum tentu merupakan perkalian dari komplemennya.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bhutani K. R., J. Monderson, and A. Rosenfeld, 2004, *On Degrees of End Nodes and Cut Nodes in Fuzzy Graphs*, Iranian Journal of Fuzzy System, Volume 1, Number 1: 53-60.

[2] Mordeson John N., and Premchand S. Nair, 2000, *Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs*, Physica - Verlag, Heidelberg.

[3] Nagoor Gani A., and Radha K., 2009, *The Degree of Vertex in Some Fuzzy Graphs*, IJACM, Volume 2, Number 3: 107-116.

[4] Nagoor Gani A., and S. Shajitha Begum., 2010, *Degree, Order, and Size in Intuitionistic Fuzzy Graphs*, IJACM, Volume 3, Number 3: 11-16.

[5] Ramaswamy W., and Poornima B. 2009. *Product Fuzzy Graphs*. *IJCSNS*, Volume 9, Number 1: 114-118.