ALGORITMA MENENTUKAN HIMPUNAN TERBESAR DARI SUATU MATRIKS INTERVAL DALAM ALJABAR MAX-PLUS

Ratna Novitasari
Program Studi Matematika FMIPA UNDIP
Jl.Prof.Soedarto, S.H Semarang 50275

Abstract. This research discussed about how to obtained largest set from an interval matrix if given a possible eigen vector. For obtained the largest set, we would doing some iteration and then determined the best algorithm.

Keywords: Eigen Vectors, Interval Matrix, Largest set, Maxplus Algebra

1. PENDAHULUAN

Pada beberapa permasalahan, matriks digunakan untuk memodelkan suatu sistem dan sistem tersebut diselesaikan sehingga didapatkan solusinya. Untuk mendapatkan penyelesaian analitis dari sistem ini adakalanya menemui kesulitan dan lebih mudah menggunakan komputasi. Tetapi nilai komputasi dari matriks tersebut tidak tepat seperti keadaan yang sebenarnya. Hal ini menyebabkan adanya interval nilai dari sebuah matriks dalam komputasi dibandingkan dengan matriks dengan nilai sesuai keadaan yang sebenarnya. Sebuah matriks yang mempunyai interval data seperti ini dinamakan matriks interval. Pentingnya masalah matriks interval ini telah diketahui dan dipelajari dalam Aljabar biasa dan dicari penyelesaiannya [2].

Aljabar Max-Plus pertama kali dikenalkan oleh [1] dan terus dikembangkan hingga saat ini. Aljabar max-plus sering digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan seperti transportasi, manufakturing, penjadwalan, sistem antrian, lalu lintas dan lain sebagainya [3]. Seperti halnya pada aljabar biasa, untuk menyelesaikan model tersebut muncul permasalahan adanya interval nilai yang menyebabkan adanya matriks interval. Karena itu, diperlukan analisis mengenai matriks interval untuk mendapatkan penyelesaiannya.

Pada penelitian sebelumnya [4] telah dibahas mengenai generator-generator dari *possible eigenvector*. Beberapa *possible eigenvector* inilah yang akan digunakan untuk mendapatkan himpunan terbesar dari matriks interval dalam Aljabar Max-Plus. Untuk memudahkan perhitungan, digunakan toolbox Aljabar Max-Plus dengan program Scilab–4.1.2.

2. MATRIKS INTERVAL DALAM ALJABAR MAX-PLUS

Untuk setiap a, b $\in$ $\mathrm{R}_{\mathrm{maks}}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ adalah $a \oplus b \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{maks}(a,b)$ dan $a \otimes b \stackrel{\mathrm{def}}{=} a+b$. Sehingga untuk setiap $a \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}$ dan ε, didapatkan $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ dan $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$. Himpunan $\mathrm{R}_{\mathrm{maks}}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut Aljabar Max-Plus dan dinyatakan R = ($\mathrm{R}_{\mathrm{maks}}$, $\oplus$, $\otimes$, ε, e).

Matriks interval adalah himpunan semua matriks yang mempunyai interval nilai dan ditulis dalam bentuk **A** $= \left[\underline{A}, \overline{A} \right]$, dimana $\underline{A}, \overline{A} \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n \times n}$ dan $\underline{A} \leq \overline{A}$. Matriks interval seperti dalam matriks biasa juga mempunyai *eigenvalue* dan *eigenvector*.

Matriks A^* merupakan matriks yang terletak diantara matriks interval bawah dan matriks interval atas. Jika memenuhi persamaan $\underline{A} \otimes x \leq A^* \otimes x \leq \overline{A} \otimes x$ maka x disebut dengan *possible eigenvector*.

Diberikan definisi mengenai *eigenvalue* pada matriks interval adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1 [2] *Suatu bilangan riil* λ *adalah sebuah possible eigenvalue dari sebuah matriks interval* **A** *jika* λ

*merupakan eigenvalue dari minimal satu matriks $A \in$ **A**. Suatu bilangan riil λ adalah sebuah universal eigenvalue dari sebuah matriks interval **A** jika λ merupakan eigenvalue dari tiap matriks $A \in$ **A**.*

Sedangkan pengertian *eigenvector* pada matriks interval didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2 [2] *Suatu vektor $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n_{\text{maks}}$ adalah sebuah possible eigenvector dari sebuah matriks interval **A** jika ada $A \in$ **A** sehingga $A \otimes \mathbf{x} = \lambda(A) \otimes \mathbf{x}$. Suatu vektor $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n_{\text{maks}}$ adalah sebuah universal eigenvector dari sebuah matriks interval **A** jika $A \otimes \mathbf{x} = \lambda(A) \otimes \mathbf{x}$ untuk setiap matriks $A \in$ **A**.*

Contoh 2.3 Diberikan matriks interval

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3,8] & [2,4] & [6,9] \\ [4,6] & [3,5] & -\infty \\ [-\infty,5] & [2,8] & [3,7] \end{pmatrix}.$$

Dengan menggunakan algoritma maxalgol, matriks $\underline{A}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda(\underline{A}) = 4$ dan matriks $\overline{A}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda(\overline{A}) = 8$. Karena $\lambda(\underline{A}) \neq \lambda(\overline{A})$, berarti matriks interval **A** tidak mempunyai *universal eigenvalue* hanya mempunyai *possible eigenvalue* yaitu $4 \le \lambda \le 8$.

Jika di ambil suatu vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, maka diperoleh $\underline{A} \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ dengan nilai $\lambda = \underset{i}{\text{maks}}(\underline{A} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x})_i = 8$. Selanjutnya didapatkan nilai dari $A^* \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes x = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ dan $\overline{A} \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$. Terlihat bahwa pada baris kedua dan ketiga, nilai $A^* \otimes x > \overline{A} \otimes x$ padahal seharusnya $\underline{A} \otimes x \le A^* \otimes x \le \overline{A} \otimes x$.

Jadi, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bukan merupakan *possible eigenvector* untuk matriks interval **A**.

Jika di ambil suatu vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka $\underline{A} \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ dengan nilai $\lambda = \underset{i}{\text{maks}}(\underline{A} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x})_i = 4$. Selanjutnya didapatkan nilai dari $A^* \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $\overline{A} \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$. Terlihat bahwa pada setiap baris memenuhi $\underline{A} \otimes x \le A^* \otimes x \le \overline{A} \otimes x$. Adapun nilai dari A^* diberikan oleh $a^*_{ij} = \min\{\overline{a}_{ij}, \lambda(\mathbf{x}) + x_i - x_j\}$.

sehingga didapatkan $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & -\infty \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Karena $\underline{A} \le A^* \le \overline{A}$ dan $A^* \otimes \mathbf{x} = 4 \otimes \mathbf{x}$, maka $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah *possible eigenvector* untuk matriks interval **A** dengan $\lambda = 4$.

Contoh 2.4 Diberikan matriks interval $\mathbf{A} = \{A(c); c \in [-4,-3]\}$, dimana $A(c) = \begin{pmatrix} -\infty & c & -\infty \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$. Dengan menggunakan algoritma maxalgol, didapatkan *eigenvalue* dari $\underline{A(c)}$ dan $\overline{A(c)}$ adalah sama dengan nol. Jadi, matriks A mempunyai *universal eigenvalue* $\lambda(A(c)) = 0$ untuk semua $c \in [-4,-3]$. Dan *eigenvector* dari $A(c)$ adalah $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dimana *eigenvector* dari matriks $\underline{A}(c)$ adalah $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sedangkan *eigenvector* dari matriks $\overline{A}(c)$ adalah $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Jadi, matriks interval $A(c)$ tidak mempunyai *universal eigenvector*.

Diberikan matriks interval $\mathbf{B}=\{B(c); c\in[-4,-3]\}$, dimana $A(c)=\begin{pmatrix} -\infty & c & 0 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$ dengan matriks interval bawah $\underline{A}(c)=\begin{pmatrix} -\infty & -4 & 0 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$ dan matriks interval atas $\overline{A}(c)=\begin{pmatrix} -\infty & -3 & 0 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$.

Didapatkan *eigenvalue* dari $\underline{B}(c)$ dan $\overline{B}(c)$ adalah sama dengan nol. Jadi, matriks B mempunyai *universal eigenvalue* $\lambda(B(c))=0$ untuk semua $c\in[-4,-3]$. Sedangkan *eigenvector* dari $B(c)$ adalah $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dimana *eigenvector* dari matriks $\underline{A}(c)$ dan *eigenvector* dari matriks $\overline{A}(c)$ adalah $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Jadi, matriks interval $B(c)$ mempunyai *universal eigenvector*.

Untuk proses perhitungan besarnya nilai *eigenvalue* dan *eigenvector* digunakan Algoritma Power [5] dalam bentuk program Scilab 4.1.2 [6].

3. ALGORITMA MENENTUKAN HIMPUNAN TERBESAR DARI MATRIKS INTERVAL

Untuk mendapatkan himpunan terbesar di suatu matriks interval apabila diberikan suatu *possible eigenvector* akan dilakukan dengan cara iterasi. Matriks A^* pasti terletak di antara matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$. Kemudian matriks $\underline{A}$ digantikan oleh matriks A^* dan seterusnya hingga nilai dari matriks $\underline{A}$ semakin naik hingga mencapai nilai terbesarnya dan berhenti. Matriks merupakan matriks yang terletak antara matriks interval bawah dan matriks interval atas pada iterasi ke-*n*.

Contoh 3.1 Matriks interval diberikan pada Contoh 2.3. Dari keempat macam A^* yang telah didapatkan, diambil A^* dengan nilai terbesar, yaitu jika diberikan vektor yang merupakan eigenvector dari c, yaitu $A^*=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. Dengan menggunakan algoritma maxalgol, didapatkan matriks A^* mempunyai $\lambda=6$ dan $v=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Kemudian di ambil A^* sebagai $\underline{A}^1$, sehingga matriks interval berubah menjadi $\begin{pmatrix} [6,8] & 4 & [8,9] \\ [4,6] & 5 & -\infty \\ [4,5] & [6,8] & [6,7] \end{pmatrix}$. Jika diberikan x adalah *eigenvector* dari $\underline{A}^1$ yaitu $x=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka didapatkan $A_1^{2*}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ yang sama dengan A^* = $\underline{A}^1$. Jika diberikan x adalah *eigenvector* dari $\overline{A}$ yaitu $x=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka didapatkan $A_2^{2*}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. Jika diberikan x adalah nilai maksimum dari rata-rata matriks interval, yaitu $x=\begin{pmatrix} 8.5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, maka didapatkan bahwa x bukan merupakan *possible eigenvector*.

Jadi, himpunan terbesar dari matriks interval **A** jika diberikan keempat macam *possible eigenvector* kemudian di ambil nilai A^* yang terbesar dan dilakukan secara iterasi adalah $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Adapun algoritma untuk menentukan himpunan terbesar dalam suatu matriks interval adalah

Input : matriks interval **A** = $[\underline{A},\overline{A}]$ dan vektor **x**

Output : himpunan terbesar dari matriks interval **A**

A*=maks {$\underline{A}\times$ **x**, $\overline{A}\times$ **x**, $A_{maks}\times$ **x**}

While A* maksimum ($A^* \leq \overline{A}$)

$\underline{A} = A^*$

$A^* = \underline{A}\times$ **x**

end

Berikut ini diberikan contoh untuk matriks interval dengan ukuran 2×2.

Contoh 3.2 Diberikan matriks interval seperti pada Contoh 3.1 dan akan di tentukan himpunan terbesarnya. Matriks interval $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1,3] & [2,5] \\ [3,4] & 4 \end{pmatrix}$. Jika di ambil *possible eigenvector* yang memberikan nilai $A^{\#}$ yang maksimum, yaitu *eigenvector* dari matriks $\overline{A}$ yaitu $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$, maka didapatkan $A^{\#} = \begin{pmatrix} 3 & 4.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$ yang mempunyai $\lambda = 4$ dan $v = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Kemudian $A^{\#}$ di ambil sebagai $\underline{A}^1$, sehingga matriks interval menjadi $\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} 3 & [4.5,5] \\ [3.5,4] & 4 \end{pmatrix}$.

Jika diberikan *eigenvector* dari $\underline{A}^1$, yaitu $x = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 4 \end{pmatrix}$ maka didapatkan $A_1^{1\#} = \begin{pmatrix} 3 & 4.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$

Jika diberikan *eigenvector* dari $\overline{A}$ yaitu $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$ maka didapatkan $A_2^{1\#} = \begin{pmatrix} 3 & 4.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$.

Jika di ambil rata-rata *eigenvector* dari $\underline{A}^1$ dan $\overline{A}$ yaitu $x = \begin{pmatrix} 4.75 \\ 4.25 \end{pmatrix}$ maka didapatkan $A_3^{1\#} = \begin{pmatrix} 3 & 4.5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$.

Jika di ambil maksimum dari rata-rata matriks interval, yaitu $x = \begin{pmatrix} 4.75 \\ 4 \end{pmatrix}$ maka didapatkan $A_4^{1\#} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$. *Possible eigenvector* ini juga merupakan *possible eigenvector* pada matriks interval **A**.

Kemudian $A_4^{1\#} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$ di ambil sebagai $\underline{A}^2$, sehingga matriks interval menjadi $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ [3.5,4] & 4 \end{pmatrix}$.

Jika diberikan *eigenvector* dari $\underline{A}^2$, yaitu $x = \begin{pmatrix} 9.25 \\ 8.5 \end{pmatrix}$ maka didapatkan $A_1^{2\#} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3.5 & 4 \end{pmatrix}$.

Jika diberikan *eigenvector* dari $\overline{A}$ yaitu $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$ maka didapatkan $A_2^{2\#} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Jika di ambil rata-rata *eigenvector* yaitu $x = \begin{pmatrix} 7.125 \\ 6.5 \end{pmatrix}$ ternyata tidak memberikan nilai $A^{\#}$.

Jika di ambil maksimum dari rata-rata matriks interval, yaitu $x = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ternyata tidak memberikan nilai $A^{\#}$.

Jadi, didapatkan himpunan maksimum jika diberikan suatu *possible eigenvector* adalah $A_2^{2\#} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ yang sama dengan besarnya matriks interval atas.

4. KESIMPULAN

Himpunan terbesar suatu matriks interval **A** apabila diberikan suatu *possible eigenvector* didapatkan dengan cara iterasi. Matriks A^* pasti terletak di antara matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$. Kemudian matriks $\underline{A}$ digantikan oleh matriks A^* dan seterusnya hingga nilai dari matriks $\underline{A}$ semakin naik hingga mencapai nilai terbesarnya dan berhenti.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. dan Quadrat, J.P., (1992), *Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley & Sons, New York.

[2] Cechlarova, K., (2005), *Eigenvectors of Interval Matrices over Max-Plus Algebra*, Journal of Discrete Applied Mathematics, vol. 150, hal. 2–15.

[3] Heidergott, B., Olsder, G.J. dan Woude, J. van der, (2006), *Max Plus at Work, Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press, New Jersey.

[4] Novitasari, R., Subiono, (2009), *Analisis Masalah Generator dari Possible dan Universal Eigenvector pada Matriks Interval dalam Aljabar Max Plus*, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[5] Subiono, Woude, J. van der, (2000), *Power Algorithm for (max, +) and Bipartite (min, max, +) Systems*, Journal of Discrete Event Dynamic Systems, vol. 10, hal. 369-389.

[6] Subiono, (2007), *Max-plus Algebra Toolbox*, ver. 1.0, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.