SEMI-HOMOMORFISMA *BCK*-ALJABAR

Deffyana Prastya A.[1] dan Suryoto[2]
[1,2] Program Studi Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, SH, Semarang, 50275

Abstract. A *BCK*-algebra is one of the algebraic structure generated over an abelian group. So that, some concepts in group also can be found this structure, for instance, if at a group we have a homomorphism, then at the *BCK*-algebras we also have a homomorphism, exactly a homomorphism of *BCK*-algebras. In this paper we discussed a semi-homomorphism of *BCK*-algebara as generalization of a homomorphism of *BCK*-algebras. It can be shown every homomorphism of BCK-algebras is a semi-homomorphism of BCK-algebras, conversely not true. By utilizing concept of ideal of *BCK*-algebras can be proved a semi-homomorphism of BCK-algebras is a homomorphism of BCK-algebras.

Keywords : *BCK*-algebras, homomorphism of *BCK*-algebras, semi-homomorphism of *BCK* algebras, ideal of *BCK*-algebras.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu [1]. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah -aljabar.

Konsep *BCK*-aljabar pertama kali diperkenalkan oleh Y. Imai, K. Iseki dan S. Tanaka [3] pada tahun 1966. Pada perkembangannya, struktur *BCK*-aljabar ini telah diterapkan secara luas pada banyak cabang matematika seperti teori grup, analisis fungsional, teori probabilitas, topologi, dan sebagainya. Fenomena yang menarik dari *BCK*-aljabar adalah bahwa struktur aljabar ini mempunyai konsep-konsep yang hampir sama dengan konsep-konsep yang ada di dalam teori grup.Hal ini dikarenakan, struktur aljabar ini dikonstruksi dari sebuah grup komutatif yang dilengkapi dengan sebuah operasi biner baru.Jika pada grup dikenal konsep homomorfisma grup [2], maka pada *BCK*-aljabar juga dikenal konsep ini, yang dikenal dengan nama homomorfisma *BCK*-aljabar.

Dari konsep homomorfisma yang berlaku pada *BCK*-aljabar, ternyata dapat diturunkan suatu konsep yang lebih luas, yaitu konsep semi-homomorfisma *BCK*-aljabar. Konsekuensinya, sebagai bentuk yang lebih umum dari homomorfisma *BCK*-aljabar, dapat dilihat bahwa setiap homomorfisma BCK-aljabar merupakan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar, tetapi tidak berlaku sebaliknya [5].

Terkait dengan kenyataan tersebut, permasalahan yang muncul adalah bilamana suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar merupakan homomorfisma *BCK*-aljabar. Untuk menjawab pertanyaan ini, akan diperkenalkan konsep ideal pada BCK-aljabar, yang akan menjembatani hubungan kedua konsep tersebut.

2. SEMI-HOMOMORFISMA *BCK*-ALJABAR

Pada bagian ini akan dibahas mengenai *BCK*-aljabar dan konsep semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

2.1 *BCK*-Aljabar

Misalkan (,•) suatu grup komutatif dengan operasi biner • dan 0 sebagai unsur identitas dari . Kemudian pada dilengkapi dengan operasi biner yang didefinisikan dengan

• = (0) = , , .

Dari pendefinisian tersebut dengan mengambil = , diperoleh

= • , , … (1)

Operasi biner yang didefinisikan pada Persamaan (1) akan memegang peranan penting dalam pembahasan *BCK*-aljabar selanjutnya.

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari *BCK*-aljabar.

Definisi 2.1 [5] *Misalkan merupakan himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner dan 0 sebagai elemen khusus. Suatu aljabar* (, ,0) *tipe* (2,0) *disebut BCK-aljabar jika untuk setiap* , , *memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini :*

(BCK1) ( ) ( ) ( ) = 0,

(BCK2) ( ) = 0,

(BCK3) = 0,

(BCK4) 0 = 0,

(BCK5) = 0, = 0 = .

Contoh 2.1 Misalkan = {0, , , } dan didefinisikan operasi biner pada , sebagaimana diberikan oleh tabel *Cayley* berikutini :

Tabel 1. Pendefinisian operasi biner pada

*	0	a	B	C
0	0	0	0	0
a	A	0	0	0
b	B	a	0	A
c	C	c	C	0

Terlihat bahwa (, ,0) membentuk -aljabar. Hal ini dapat dilihat dari tabel bahwa aksioma BCK1 sampai BCK5 dipenuhi oleh .

Sebelum diberikan sifat-sifat yang berlaku pada *BCK*-aljabar, akan diberikan lemma berikut ini.

Lemma 2.2 [5] *Misalkan* (, ,0) *adalah suatu BCK-aljabar maka untuk setiap* , *berlaku* ( ) ( ) = .

Bukti :

( ) ( ) = (•) (•)
= (•) • (•)
= (•) • (•)
= (•) • (•)
= • (•) •
= • •
=

Berikut ini akan diberikan sifat-sifat yang berlaku pada *BCK*-aljabar.

Proposisi 2.3 [5, 6] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCK-aljabar, maka untuk setiap* , , *berlaku :*

1. 0 = ,
2. ( ) = ( ) ,
3. ( ) = ,
4. ( ) ( ) ( ) = 0,
5. = 0 ( ) ( ) = 0, ( ) ( ) = 0.

Bukti:

Diambil sebarang , , dan 0 sebagai elemen khusus dari , maka

1. 0 = ( )
= (•)
= • (•)
= • (•)
= •
=
2. ( ) = (•)
= (•) •
= • (•)
= • (•)
= (•) •
= ( )
3. ( ) = ((•))
= (• (•))
= (• (•))
= (• (•))
= (•) •
= (•)
=
4. Akan dibuktikan bahwa ( ) ( ) ( ) = 0.

   Dengan menggunakan Lemma 2.2 misalkan = dan = , maka = ( ) ( ) = .

   Dengan menggunakan aksioma BCK2 didapat

   ( ) ( ) ( ) = ( ) = 0.

   Sekarang akan dibuktikan bahwa = 0 ( ) ( ) = 0 dan ( ) ( ) = 0.

   Dari definisi operasi biner “ ” didapat

$(\quad) \quad (\quad) = (\ \bullet \quad) \quad (\ \bullet \quad)$
$= (\ \bullet \quad) \bullet$
$(\ \bullet \quad)$
$= (\ \bullet \quad) \bullet (\ \bullet \quad)$
$= \ \bullet (\quad \bullet \ ) \bullet$
$= \ \bullet \ \bullet$
$= \qquad = 0$

dan

$(\quad) \quad (\quad) = (\ \bullet \quad) \quad (\ \bullet \quad)$
$= (\ \bullet \quad) \bullet (\ \bullet \quad)$
$= (\ \bullet \quad) \bullet (\ \bullet \quad)$
$= \ \bullet (\quad \bullet \ ) \bullet$
$= \ \bullet \ \bullet$
$= \qquad = 0$

Berikut ini akan diberikan akibat dari Proposisi 2.3 No.2 sebagai berikut.

Akibat 2.4 [6] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCK-aljabar maka untuk setiap* , *berlaku* ( ) = 0.

Bukti :

Dari Proposisi 2.3 no. 2, misalkan diambil = , maka

( ) = ( )
= 0
= 0

Sebelumnya akan diperkenalkan terlebih dahulu tentang relasi " ≤ ", karena relasi tersebut akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya. Berikut ini akan diberikan definisi mengenai relasi " ≤ " pada *BCK*-aljabar.

Definisi 2.5 [5] *Misalkan* (, ,0) *adalah suatu BCK-aljabar. Didefinisikan relasi* " ≤ " *sebagai* ≤ *jika* = 0 *untuk setiap* , .

Relasi " ≤ "yang telah didefinisikan pada Definisi 2.5 di atas merupakan relasi terurut parsial seperti diberikan oleh proposisi berikut ini.

Proposisi 2.6 [5] *Misalkan* (, ,0)*adalah suatu BCK-aljabar. Jika pada didefinisikan relasi* " ≤ " *sebagaimana yang telah diberikan oleh Definisi 2.5 maka relasi* " ≤ " *merupakan relasi terurut parsial.*

Bukti :

Misalkan(, ,0)adalah suatu *BCK*-aljabar untuk setiap , , .Karena relasi " ≤ "pada bersifat refleksif, anti-simetris, dan transitif maka relasi " ≤ " merupakan relasi terurut parsial.

Contoh 2.2 Berdasarkan Contoh 2.1 diketahui = {0, , , } terhadap operasi biner yang didefinisikan melalui Tabel 1 merupakan *BCK*-aljabar sehingga pada berlaku relasi terurut parsial " ≤ "yaitu 0 ≤ 0, 0 ≤ , 0 ≤ , 0 ≤ , ≤ , ≤ , ≤ , ≤ dan ≤ .

Dengan memanfaatkan relasi terurut parsial ≤seperti telah diberikan oleh Definisi 2.5 dipunyai sifat berikut.

Proposisi 2.7 [5] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCK-aljabar. Jika* " ≤ " *suatu relasi terurut parsial pada* , *maka untuk setiap* , , *berlaku :*

(4')( ) ( ) ≤ ,

(5') ≤ ≤ , ≤ .

Selanjutnya dengan mengingat *BCK*-aljabar adalah sruktur aljabar yang dibangun atas sebuah grup komutatif, seperti halnya grup yang mempunyai konsep homomorfisma, struktur ini juga mempunyai konsep yang sama, yang dinamakan homomorfisma *BCK*-aljabar, sebagaimana diberikan definisi berikut.

Definisi 2.8 [5] *Misalkan* (, ,0) *dan* (, ,0) *merupakan BCK-aljabar. Suatu pemetaan f dari ke , dinotasikan dengan f* : → *disebut homomorfisma BCK-aljabar jika* ( ) = ( ) ( ), *untuk setiap* , .

Jika *f* : → adalah homomorfisma *BCK*-aljabar maka (0) = 0.

Contoh 2.3 Misalkan = {0, , , } dan = {0, , } dan didefinisikan suatu operasi biner pada dan , sebagaimana diberikan oleh tabel *Cayley* berikut:

Tabel 2. Operasi biner pada

	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	a	0	b
c	c	c	c	0

Tabel 3. Operasi biner pada

	0	x	y
0	0	0	0
x	X	0	0
y	Y	x	0

Dengan definisi operasi biner seperti pada table, dapat diperlihatkan (, ,0) dan (, ,0) merupakan *BCK*-aljabar.

Selanjutnya jika didefinisikan pemetaan *f* : → dengan (0) = 0, ( ) = , ( ) = , dan ( ) = 0, maka adalah homomorfisma *BCK*-aljabar.

Berikut akan diberikan definisi mengenai ideal dari *BCK*-aljabar.

Definisi 2.9 [5] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCK-aljabar dan himpunan bagian yang tidak kosong dari , disebut ideal dari jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :*
1. 0 ,
2.( )( )( ).

Contoh 2.4 Berdasarkan Contoh 2.1 terdahulu, diketahui = {0, , , } terhadap operasi biner yang didefinisikan melalui Tabel 1 merupakan *BCK*-aljabar. Misalkan diambil = {0, , } himpunan bagian dari *BCK*-aljabar (, ,0), maka merupakan ideal dari karena terpenuhinya aksioma-aksioma dari ideal *BCK*-aljabar (, ,0).

Dengan memanfaatkan relasi terurut parsial " ≤ " seperti diberikan oleh Definisi 2.5, diperoleh proposisi berikut.

Proposisi 2.10 [5] *Setiap ideal dari BCK-aljabar* (, ,0) *memenuhi*
( )( )(≤).

Bukti :
Diambil sebarang unsur , sedemikian hingga ≤ atau = 0, akan ditunjukkan . Dari = 0 dan 0 diperoleh = 0 , selanjutnya dengan mengingat bahwa , dan suatu ideal dari , dari hubungan diperoleh .

Misalkan himpunan bagian tidak kosong dari *BCK*-aljabar maka ideal yang dibangun oleh dinotasikan dengan . Jika = { } maka dinotasikan { } atau dituliskan dan ini merupakan ideal dari yang dibangun oleh .

Dengan memanfaatkan ideal dari *BCK*-aljabar yang dibangun oleh himpunan bagiannya yang berkardinalitas 1, seperti telah diberikan pada bagian sebelumnya dimiliki proposisi berikut ini.

Proposisi 2.11 [5] *Misalkan* (, ,0)*suatu BCK-aljabar dan* = { , ,..., } *himpunan bagian tidak kosong dari maka*

$$\langle A\rangle = \{x \in X \mid (\ldots((x * a_0) * a_1) * \ldots) * a_n = 0 \ldots\ldots \text{ untuk } a_0, a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

merupakan ideal dari yang dibangun oleh .

Bukti :
Misalkan(, ,0)suatu *BCK*-aljabar dan = { , ,..., } himpunan bagian tidak kosong dari .
Akan ditunjukkan merupakan ideal dari yang dibangun oleh dengan induksi matematika.

1. Basis induksi. Akan ditunjukkan proposisi benar untuk = 1, karena sebelumnya telah dibuktikan bahwa = { } = { | = 0}merupakan ideal dari yang dibangun oleh = { } dengan , maka basis induksi benar adanya.
2. Langkah induksi. Asumsikan bahwa proposisi benar untuk = dari = { , ,..., } dan merupakan ideal dari yang dibangun oleh .Selanjutnya akan ditunjukkan proposisi benar untuk = + 1 yaitu akan ditunjukkan untuk = { , ,..., } maka

$$\langle A\rangle = \left\{x \in X \,\middle|\, \left(\left(\ldots\left(\left(x * a_0\right) * a_1\right) * \ldots\right) * a_k\right) * a_{k+1} = 0 \ldots\ldots \; untuk\ a_0, a_1, \ldots, a_{k+1} \in A\right\}$$

merupakan ideal dari yang dibangun oleh .

Dari

$$\left(\left(\ldots\left(\left(x * a_0\right) * a_1\right) * \ldots\right) * a_k\right) * a_{k+1} = 0$$

dan mengingat hipotesa induksi maka diperoleh

$$\left(\left(\ldots\left(\left(x * a_0\right) * a_1\right) * \ldots\right) * a_k\right) * a_{k+1} = 0$$

Hal ini memperlihatkan bahwa adalah ideal dari yang dibangun oleh = { , ,..., }.

Karena proposisi juga benar untuk = + 1 maka proposisi benar untuk setiap bilangan bulat positif .

Contoh 2.5 Berdasarkan Contoh 2.1 diketahui = {0, , , } terhadap operasi biner seperti diberikan oleh Tabel 2.1 merupakan *BCK*-aljabar. Misalkan himpunan bagian tidak kosong dari , maka dapat dibentuk ideal-ideal dari yang dibangun oleh . Berikutbeberapa contoh ideal-ideal dari yang dibangun oleh , yaitu

1. Jika diambil himpunan bagian dari yang berkardinalitas 1.
   Misal = {0}, maka ideal dari yang dibangun oleh0, yaitu
   = { | 0 = 0} = {0}
2. Jika diambil himpunan bagian dari yang berkardinalitas 2.
   Misal = {*a*,*b*}, maka ideal dari yang dibangun oleh dan , yaitu
   = { |( ) = 0}
   = {0, *a*, *b*}
3. Jika diambil himpunan bagian dari yang berkardinalitas 3.
   Misal = {*a*,*b*,*c*}, maka ideal dari yang dibangun oleh , dan , yaitu
   = ( ) = 0
   = {0, *a*, *b*, *c*}
4. Jika diambil himpunan bagian dari yang berkardinalitas 4.
   Misal = {0,*a*,*b*,*c*}, maka ideal dari yang dibangun oleh 0, , dan , yaitu
   = (0) = 0
   = {0, *a*, *b*, *c*}

Himpunan semua ideal dari dinotasikan dengan ( ) atau dituliskan ( ) = { | ideal dari }.

Berikut akan diberikan definisi mengenai ideal tak tereduksi pada *BCK*-aljabar.

Definisi 2.12 [5] *Suatu ideal pada BCK-aljabar* (, ,0) *disebut tak tereduksi jika* , ( ) (= ∩ = =)
Dinotasikan II d ( ) himpunan semua ideal tak tereduksi dari .

Contoh 2.6 Misalka X= $X = \{0, a, b, c, d\}$ adalah *BCK*-aljabar sebagaimana diberikan oleh tabel *Cayley* berikut:

Tabel 4 Pendefinisian operasi biner pada

	0	*a*	*b*	*c*	*d*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
a	*a*	*0*	*a*	*0*	*0*
b	*b*	*b*	*0*	*0*	*b*
c	*c*	*b*	*a*	*0*	*b*
d	*d*	*d*	*d*	*d*	*0*

Ideal-ideal dari adalah {0}, {0, }, {0, }, {0, , }dan {0, , , , }. Jika diambil = {0, }dan = {0, , }, maka = ∩ juga merupakan ideal, lebih jauh merupakan ideal tak tereduksi dari , yaitu
= ∩ = {0, } ∩ {0, , } = {0, }.
Karena = , maka juga merupakan ideal tak tereduksi dari .Dengan cara yang sama, dapat diperlihatkan contoh ideal tak tereduksi dari yang lain yaitu {0, } dan {0, , }.

Berikut akan diberikan definisi mengenai sistem order pada *BCK*-aljabar.

Definisi 2.13 [4] *Suatu himpunan bagian dari BCK-aljabar disebut sistem order dari jika memenuhi*

1. merupakan himpunan pengatas, yaitu memenuhi
( )( )(≤),

2. (,)( )($\le$, $\le$).
Selanjutnya himpunan semua sistem order dari dinotasikan dengan *Os*( ).

Contoh 2.7 Berdasarkan Contoh 2.1 misalkan diambil = { , , } suatu himpunan bagian dari *BCK*-aljabar (, ,0), maka adalah sistem order dari karena terpenuhinya aksioma-aksioma sistem order.

2.2 Semi-homomorfisma *BCK*-aljabar

Selain konsep homomorfisma, -aljabar mempunyai konsep semi-homomorfisma, yang tak lain merupakan perumuman dari konsep homomorfisma ini. Berikut akan diberikan definisi mengenai semi-homomorfisma -aljabar.

Definisi 2.14 [5] *Misalkan dan suatu -aljabar dan : $\rightarrow$ suatu pemetaan, pemetaan disebut semi-homomorfisma -aljabar jika memenuhi :*

1. (0) = 0,
2. (,)(( ) ( ) $\le$ ( )).

Contoh 2.8 Pemetaan pada Contoh 2.3 merupakan semi-homomorfisma -aljabar.

Berikut akan diberikan hubungan antara homomorfisma *BCK*-aljabar dengan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Proposisi 2.15 [5] *Setiap homomorfisma BCK-aljabar adalah semi-homomorfisma BCK-aljabar*.

Bukti :

Misalkan (, ,0) dan (, ,0) merupakan *BCK*-aljabar dan pemetaan *f* : *X*$\rightarrow$ *Y* adalah homomorfisma *BCK*-aljabar. Akan diperlihatkan bahwa homomorfisma *BCK*-aljabar memenuhi aksioma-aksioma pada semi-homomorfisma *BCK*-aljabar sebagai berikut :

1. Akan ditunjukkan (0) = 0. Hal ini benar, karena pada homomorfisma *BCK*-aljabar juga berlaku (0) = 0.
2. Akan ditunjukkan (,)(( ) ( ) $\le$ ( )).

   Berdasarkan definisi " $\le$ ", untuk membuktikan aksioma di atas cukup dibuktikan bahwa

   ( ) ( ) ( ) = 0 untuk semua , .

   Diambil sebarang , , karena *f* : $\rightarrow$ suatu homomorfisma*BCK*-aljabar, maka dan ( ), ( ), ( ) , sehingga

   ( ) ( ) ( ) = 0

Karena aksioma-aksioma pada semi-homomorfisma *BCK*-aljabar juga berlaku pada homomorfisma *BCK*-aljabar, maka terbukti bahwa setiap homomorfisma *BCK*-aljabar adalah semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Kebalikan dari proposisi di atas tidak berlaku, hal ini dapat dilihat pada contoh berikut ini.

Contoh 2.9 Misalkan = {0, , , , } adalah *BCK*-aljabar , dengan operasi biner “ ” sebagaimana diberikan oleh tabel Cayley berikut :

Tabel 5. Pendefinisian operasi biner pada

	0	*a*	*b*	*c*	*d*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
a	*a*	*0*	*0*	*0*	*0*
b	*b*	*a*	*0*	*0*	*0*
c	*c*	*a*	*a*	*0*	*0*
d	*d*	*a*	*a*	*a*	*0*

Didefinisikan pemetaan *f* : $\rightarrow$ dengan (0) = 0, ( ) = , ( ) = , ( ) = dan ( ) = , maka merupakan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar, tetapi bukan homomorfisma *BCK*-aljabar karena

( ) = $\neq$ = ( ) ( ).

Berikut akan diberikan definisi pemetaan kiri dan pemetaan kanan pada *BCK*-aljabar.

Definisi 2.16 [5] *Misalkan suatuBCK-aljabar. Untuk suatu elemen , didefinisikan sebuah pemetaan : $\rightarrow$ dengan ( ) = , untuk setiap x X dan kemudian disebut pemetaan kanan pada . Selain itu, pemetaan kiri pada* *didefinisikan analog dan dilambangkan dengan L_a.*

Dalam hal ini terdapat 2 kondisi terkait dengan dan L_a yaitu kondisi = 0 dan ≠ 0. Untuk kondisi = 0 diberikan teorema berikut.

Teorema 2.17 [5] *Misalkan* (, ,0) *adalah suatu BCK-aljabar. Jika dan masing-masing merupakan pemetaan kanan dan pemetaan kiri pada maka dan adalah homomorfisma BCK-aljabar dan sekaligus juga merupakan semi-homomorfisma BCK-aljabar.*

Bukti :

Akan ditunjukkan dan adalah homomorfisma *BCK*-aljabar.

Misalkan : → , suatu pemetaan kanan dengan ( ) = 0 dan : → , suatu pemetaan kiri dengan ( ) = 0 , untuk semua *x* .

Diambil sebarang *x, y* , maka *x y* dan

( ) = ( ) 0
= (0)
= (0) (0)
= ( ) ( )

serta

( ) = 0 ( )
= 0 (•)
= 0 • (•)
= 0 • (( ) •)
= 0 • (• $^{-1}$)
= 0 • ($^{-1}$•)
= (0 • $^{-1}$) •
= (0 • $^{-1}$)• (0)
= (0) • (• 0^{-1})
= (0) • ((• 0^{-1}) $^{-1}$) $^{-1}$
= (0) (• 0^{-1}) $^{-1}$
= (0) (0 • $^{-1}$)
= (0) (0)
= ( ) ( )

Jadi terbukti dan L_0 adalah homomorfisma *BCK*-aljabar.

Karena dan L_0 suatu homomorfisma *BCK*-aljabar maka berdasarkan Proposisi 2.16, dan L_0 juga merupakan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa L_a untuk ≠ 0 bukan merupakan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar, sebab (0) = 0 = ≠ 0. Sedangkan kondisi pada R_a untuk ≠ 0,pada umumnya bukan merupakan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Contoh 2.10 Berdasarkan Contoh 2.1 diketahui = {0, , , } terhadap operasi biner yang didefinisikan melalui Tabel 1 merupakan *BCK*-aljabar. Untuk suatu*x* *X*, misalkan R_x adalah pemetaan kanan pada . Maka R_0 dan R_b merupakan homomorfisma *BCK*-aljabar dan juga semi-homomorfisma *BCK*-aljabar. Akan tetapi R_a dan R_c bukan merupakan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar karena jika diambil ( ) ( ) = 0 = ( ) dan ( ) ( ) = 0 = ( ). Hal ini juga mengakibatkan R_a dan R_c bukan merupakan homomorfisma *BCK*-aljabar.

Contoh 2.11 Berdasarkan Contoh 2.6 diketahui = {0, , , , } terhadap operasi biner yang didefinisikan melalui Tabel 2.4 merupakan *BCK*-aljabar. Untuk suatu*x* *X*, misalkan R_x adalah pemetaan kanan pada . Maka setiap pemetaan kanan pada yaitu , , , ,dan adalah homomorfisma *BCK*-aljabar dan juga semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Berikut ini diberikan proposisi mengenai pemetaan kanan pada *BCK*-aljabar, sebagai berikut.

Proposisi 2.18 [5] *Misalkan adalah pemetaan kanan pada maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen :*

( ) *suatu semi-homomorfisma BCK-aljabar,*

( ) *suatu homomorfisma BCK-aljabar,*

( ) = .

Bukti :

( ) ( )

Misalkan adalah suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar maka untuk setiap *x,y* *X* berlaku

( ) ( ) ≤ ( ) ... (1)

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa adalah suatu homomorfisma *BCK*-aljabar.

Dengan menggunakan BCK4, yaitu 0 = 0 diperoleh 0 ≤ .

Ambil sebarang *y* *X*, maka

0 ≤ ≤ 0

≤

Selanjutnya ambil sebarang *x,y* *X*, maka

( ) = ( )

= ( )

Dengan menggunakan ≤ dan Proposisi 2.3 no.5 diperoleh

( ) = ( )

≤ ( ) ( )

= ( ) ( ) … (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh ( ) = ( ) ( ).

Jadi terbukti bahwa adalah suatu homomorfisma *BCK*-aljabar.

( ) ( )

Misalkan adalah suatu homomorfisma *BCK*-aljabar. Akan ditunjukkan untuk setiap *x* *X*, berlaku = .

Ambil sebarang *x* *X*, maka

( ) = ( )

= ( )

= ( ) ( )

= ( ) ( )

= ( ) 0

= ( )

Jadi terbukti bahwa = .

( ) ( )

Misalkan = . Akan ditunjukkan untuk setiap *x,y* berlaku adalah suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Ambil sebarang *x,y* , maka

( ) ( )= ( ) ( )

= ( ) ( )

= ( ) ( )

≤ ( )

= ( )

Jadi terbukti adalah suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Misalkan *f* : → adalah homomorfisma *BCK*-aljabar maka didalam *f* berlaku kernel dengan ( ):={ | ( ) = 0}. Begitu juga kernel juga berlaku pada semi-homomorfisma *BCK*-aljabar. Berikut ini diberikan teorema mengenai kernel pada semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Teorema 2.19 [5] *Jika f : → adalah semi-homomorfisma BCK-aljabar, maka ker (f) adalah ideal dari .*

Bukti :

Diketahui dan adalah *BCK*-aljabar dan*f* : → adalah semi-homomorfisma *BCK*-aljabar. Misalkan diambil = 0berlaku (0) = 0, maka0 ( ) dengan kata lain ( ) ≠ .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ( ) adalah ideal dari , yaitu akan ditunjukkan ( ) memenuhi Definisi 2.10.

1. Dari pembahasan di atas terlihat bahwa 0 ( ).
2. Akan ditunjukkan bahwa ( ) ( ) ( ) ( ) .

   Diambil sebarang unsur ( )dan , maka dan ( ) = 0.

   Misalkan ( ) atau ( ) = 0.

   Kemudian akan ditunjukkan ( ) = 0, maka

   ( ) = ( ) 0

   = ( ) ( )

   ≤ ( )

   = 0

   Sehingga ( ) ≤ 0 jika dan hanya jika ( ) 0 = 0 atau ( ) = 0, dengan demikian ( ).

Karena aksioma-aksioma pada Definisi 2.10 terpenuhi maka terbukti bahwa ( ) adalah ideal dari .

Selanjutnya diberikan beberapa sifat-sifat penting terkait dengan semi-homomorfisma *BCK*-aljabar ini, namun sebelumnya akan diberikan terlebih dahulu lemma berikut.

Lemma 2.20[5] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCK-aljabar. Jika adalah ideal dari dan maka terdapat ideal tak tereduksi dari sedemikian hingga dan*

Bukti :

Misalkan suatu *BCK*-aljabar. Diketahui adalah ideal dari dan . Dari ,dibentuk himpunan

= { | ( ) = 0}.

Misalkan diambil = 0 dan berlaku (0) = = 0, maka0 dengan kata lain ≠ . Kemudian akan ditunjukkan adalah ideal dari .

1. Dari pembahasan di atas terlihat bahwa 0 .
2. Akan ditunjukkan ( )( )( ).

   Diambil sebarang unsur dan sedemikian sehingga maka ( ) = 0 dan (( )) = 0. Oleh karena itu atau ( ) = 0.

   Karena semua aksioma dari Definisi 2.10 terpenuhi maka terbukti adalah ideal dari .

   Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ideal tak tereduksi dari . Diketahui = ∩ . Misalkan ≠ artinya atau . Andaikan , maka (∩) bertentangan dengan (∩) . Pengandaian salah jadi yang berlaku yaitu . Selanjutnya akan ditunjukkan = . Karena diketahui = ∩ dan , maka diperoleh . Misalkan artinya atau = . Andaikan , maka dari dan , diperoleh (∩) (∩) = (∩) Hal ini bertentangan dengan = ∩ . Jadi pengandaian salah dan yang berlaku adalah = . Sampai disini terbukti bahwa ideal tak tereduksi dari . Selanjutnya akan ditunjukkan , yaitu akan ditunjukkan ( ). Diambil sebarang unsur . Akan ditunjukkan , yaitu akan ditunjukkan ( ) = 0. Andaikan ( ) ≠ 0, dari ( ) dan mengingat , dan ideal dari maka . Kemudian dimisalkan ( ) = , dengan , maka didapat ( ) = , dengan , dan ideal dari oleh karena itu dan . Hal ini bertentangan dengan . Pengandaian salah dan yang berlaku haruslah ( ) = 0 artinya . Karena ini berlaku untuk maka terbukti bahwa . Selanjutnya akan ditunjukkan .Ambil sebarang , maka ( ) = ≠ 0. Hal ini berarti bahwa .

Proposisi 2.21[5] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCK-aljabar. Jika , dan , maka adalah suatu ideal dari dengan* .

Bukti :

Diketahui artinya ≠ 0. Dari unsur dapat dibentuk suatu himpunan = { | = 0} dan pada pembahasan sebelumnya telah diperlihatkan bahwa adalah ideal dari yang dibangun oleh . Selanjutnya karena artinya ≠ 0, maka .

Akibat 2.22 [6] *Jika pada BCK-aljabar* (, ,0) *maka terdapat suatu ideal yang tak tereduksi sedemikian sehingga dan* .

Bukti :

Misalkan diambil = dengan = { | = 0}. Pada pembahasan sebelumnya telah dibuktikan bahwa adalah ideal dari dan karena = maka juga merupakan ideal dari . Dengan cara serupa dengan pembuktian pada Lemma 2.21, terlihat bahwa ideal tak tereduksi dari . Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa . Misalkan diambil = , maka = = 0. Karena = , jadi

. Selanjutnya akan ditunjukkan . Dari pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa .
Karena = , jadi .

Teorema 2.23 [5] *Misalkan dan suatu BCK-aljabar dan f: → suatu pemetaan merupakan semi-homomorfisma BCK-aljabar jika dan hanya jika memenuhi*
( )(( ) ( ) ( ))

Bukti :

( )

Akan ditunjukkan ( ) ( ). Berdasarkan definisi ( ) maka ( ) = { | ( ) = , untuksuatu }.
Karena suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar maka berlaku (0) = 0 artinya 0 ( ). Hal ini mengakibatkan ( ) ≠ . Selanjutnya akan ditunjukkan ( ) adalah ideal dari .

1. Dari pembahasan di atas dapat dilihat bahwa 0 ( ).
2. Akan ditunjukkan ( ) ( ) ( ) ( ) . Ambil sebarang ( ) dan sedemikian sehingga ( ). Karena ( ) maka ( ) dan karena ( )maka ( ) . Akan ditunjukkan ( ). Karena suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar maka berlaku ( ) ( ) ≤ ( ) dan dengan mengingat Proposisi 2.11 diperoleh ( ) ( ) serta dari Definisi 2.10 no.2 maka diperoleh ( ) . Hal ini mengakibatkan ( ) dengan . Oleh karena itu ( ) ( ).

( )

Misalkan memenuhi ( )(( ) ( ) ( )).
Akan ditunjukkan suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

1. Karena ( ) adalah ideal dari maka 0 ( ). Dengan demikian dari pendefinisian ( ) maka berlaku (0) = 0.
2. Selanjutnya akan ditunjukkan ( ) ( ) ≤ ( ), , .
Andaikan ( ) ( ) ( ), untuk suatu , maka berdasarkan Akibat 2.23 bahwa terdapat ideal yang tak tereduksi dari sehingga ( ) dan ( ) ( ) .
Berdasarkan Contoh 2.5 no. 4 bahwa suatu ideal dapat dibangun oleh ideal tak sejati maka terdapat adalah ideal dari yang dibangun oleh = { , , … , } dengan adalah ideal tak sejati dari , sehingga

$$\langle B\rangle = \{z \in Y \mid (\dots((z*b_1)*b_2)*\dots)*a_n = 0 \dots\dots \quad untuk\ b_1, b_2, \dots, b_n \in b\}$$

Kemudian bilamana { ( )} = { ( ), , , … , } maka dapat dibentuk suatu ideal dari yaitu

$$\langle B\cup\{f(y)\}\rangle = \{z \in Y \mid (\dots(z*f(y)*b_1)*\dots)*b_n = 0 \dots\dots \quad untuk\ f(y), b_1, b_2, \dots, b_n \in B\cup\{f(y)\}\}$$

Dapat ditunjukkan { ( )} adalah suatu ideal dari yang dibangun oleh { ( )}. Selanjutnya akan ditunjukkan ( ) { ( )} . Andaikan ( ) { ( )} , maka … ( ) ( ) … = 0
untuk setiap , , … , . Karena adalah ideal dari , berdasarkan Definisi 2.10 no.2 maka ( ) ( ) . Hal ini bertentangan dengan ( ) ( ) . Jadi pengandaian ( ) { ( )} salah, yang benar adalah ( ) { ( )} . Karena { ( )} adalah ideal dari dan ( ) { ( )} , maka dengan menggunakan Lemma 2.21, terdapat suatu ideal yang tak tereduksi dari sedemikian sehingga { ( )} dan ( ) . Dengan mengingat { ( )} maka adalah ideal dari maka dan { ( )} .
Kemudian karena { ( )} maka ( ) , ini artinya ( )dan karena ( ) maka ( ). Telah diketahui bahwa .
Ambil sebarang ( ) ( )

dengan . Karena dan maka mengakibatkan ( ) ( ). Dengan demikian ( ) ( ).

Kemudian karena ( ) maka ( ) dan mengingat ( ) ( ) maka ( ), berdasarkan Definisi 2.10 no.2 bahwa ( ) artinya ( ) .

Hal ini bertentangan dengan ( ) , sehingga pengandaian ( ) ( ) ( )salah, sehingga yang benar adalah ( ) ( ) ≤ ( ).

Karena semua aksioma pada Definisi 2.15 terpenuhi maka merupakan suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar.

Lemma 2.24 [5] *Misalkan f : X → suatu homomorfisma BCK-aljabar. Jika* ( ), *maka*

(\ ) { | ( ) ≤ *untuk suatu* \ }

merupakan sistem order dari .

Bukti :

Diambil sebarang dan (\ ) sedemikian sehingga berlaku ≤ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (\ ) . Dari pendefinisian (\ ) terdapat \ sehingga ( ) ≤ . Berdasarkan sifat transitif dari suatu relasi " ≤ "karena ( ) ≤ dan ≤ maka ( ) ≤ mengakibatkan (\ ) . Sehingga Definisi 2.14 no.1 berlaku. Selanjutnya misalkan diambil sebarang , (\ ) , maka dari pendefinisian (\ ) terdapat , \ sedemikian sehingga berlaku ( ) ≤ dan ( ) ≤ . Hal ini mengakibatkan ( ), ( ) (\ ) , sehingga Definisi 2.14 no.2 berlaku.

Contoh 2.12 Berdasarkan Contoh 2.3 diketahui bahwa = {0, , , } dan = {0, , } terhadap operasi biner yang didefinisikan melalui Tabel 2 dan Tabel 3 merupakan *BCK*-aljabar. Didefinisikan pemetaan *f* : → dengan (0) = 0, ( ) = , ( ) = ,dan ( ) = 0, maka ideal-ideal dari adalah {0}, {0, , }, {0, } dan {0, , , } serta ideal-ideal tak tereduksinya adalah {0, } dan {0, , }.

Selanjutnya akan ditunjukkan (\ ) adalah sistem order dari .

Misalkan diambil ( ) yaitu {0, , }. Kemudian dari = {0, , , }dan = {0, , } maka diperoleh \ = { } atau \ .

Dengan demikian berdasarkan definisi dari (\ ) maka diperoleh (\ ) = {0, , }. Jadi sistem order dari untuk = {0, , } ( ) adalah {0, , }.

Sedangkan jika diambil ( ) yaitu {0, }. Kemudian dari = {0, , , }dan = {0, } maka diperoleh \ = { , } atau , \ .

Dengan demikian berdasarkan definisi dari (\ ) maka diperoleh (\ ) = { }. Jadi sistem order dari untuk = {0, } ( ) adalah { }.

Lemma 2.25 [4] *Misalkan* ( ) *dan* ( ). *Jika dan saling asing, maka terdapat ideal tak tereduksi dari sehingga dan* ∩ = .

Bukti :

Misalkan ideal dari , dan ∩ = . Diambil sebarang tetapi , dibentuk himpunan

= { | ( ) = 0},

maka ideal tak tereduksi dari , dan . Selanjutnya akan ditunjukkan ∩ = . Andaikan ∩ ≠ artinya terdapat ∩ , khususnya untuk maka berlaku ( ) = 0. Dengan memandang , karena , dan ideal dari maka . Kemudian dimisalkan = dengan , maka diperoleh ( ) = = 0 atau . Selanjutnya karena , dan ideal dari maka . Hal ini bertentangan dengan , jadi pengandaian ∩ ≠ salah dan haruslah ∩ = .

Berikut ini diberikan syaratsemi-homomorfisma *BCK*-aljabar agar menjadi homomorfisma *BCK*-aljabar.

Teorema 2.26 [5] *Misalkan f : X → suatu semi-homomorfisma BCK-aljabar maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen :*
(i) f suatu homomorfisma BCK-aljabar
(ii) Untuk setiap ( ) dan ( ), ( ) ( ) (, ( ) =)

Bukti :
(i) (ii)
Misalkan dan adalah *BCK*-aljabar dan *f* : *X* → adalah homomorfisma *BCK*-aljabar. Ambil ( ) dan ( ) sedemikian sehingga ( ) . Mengingat ( ) ideal dari yang dibangun oleh ( ) dan dari Lemma 2.25, yaitu (\ ) sistem order dari , sehingga berdasarkan Lemma 2.26 akan ditunjukkan bahwa ( ) dan (\ ) saling asing.
Andaikan ( ) dan (\ ) tidak saling asing, maka terdapat ( ) ∩ (\ ) dan berlaku ( ) ≤ , untuk suatu \ serta
... ( ) ( ) ... ( )
untuk setiap $_1$, $_2$, ..., .
Dengan menggunakan Proposisi 2.3 No. 5 diperoleh
... ( ) ( ) ( ) ... ( )
≤ ... ( ) ( ) ... ( ).
Karena adalah ideal dari , berdasarkan Proposisi2.11 berlaku
... ( ) ( ) ( ) ... ( )
dan karena *f* adalah suatu homomorfisma *BCK*-aljabar, diperoleh
(... (( )) ...)
sehingga
(... (( )) ...) ( ) .
Berdasarkan Definisi 2.10 no.2 maka didapat , bertentangan dengan yang diketahui, jadi haruslah keduanya saling asing. Kemudian menggunakan Lemma 2.26, terdapat ideal tak tereduksi dari sehingga berlaku ( ) dan ∩ (\ ) = .
Karena ( ) dan adalah ideal dari maka dan ( ) sedemikian sehingga ( ) .
Kemudian misalkan ( ) maka ( ) .
Karena ∩ (\ ) = maka ( ) (\ ) dan juga .
Oleh karena itu ( ) = .
Jadi terbukti bahwa jika ( ) makaterdapat ( ) sedemikian sehingga berlaku dan ( ) = .
(ii) (i)
Misalkan dan adalah *BCK*-aljabar dan *f* : *X* → adalah semi-homomorfisma *BCK*-aljabar. Diambil , sedemikian hingga ( ) ( ) ( ), maka terdapat ideal tak tereduksi dari sedemikian hingga ( ) ( ) dan ( ). Karena adalah suatu semi-homomorfisma *BCK*-aljabar maka berdasarkan Teorema 2.24 berlaku ( ) ( ). Mengingat ( ) {b} ideal dari yang dibangun oleh ( ) {b}. Maka ( ) {b} . Karena jika tidak maka ( ), hal ini bertentangan dengan ( ).
Kemudian dengan menggunakan Lemma 2.21, terdapat ( ) sehingga ( ) {b} dan , sehingga diperoleh ( ) , dan . Berdasarkan Teorema 2.27 no (ii) maka terdapat ( ) sedemikian sehingga berlaku dan ( ) = . Kemudian karena ( ) ( ) dan ( ) ( ) maka dipunyai ( ) dengan menggunakan Definisi 2.10 no.2 dimana hal ini kontradiksi.Oleh karena itu merupakan homomorfisma *BCK*-aljabar.

3. PENUTUP

3.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya diperoleh beberapa hal, yaitu

1. *BCK*-aljabar sebagai suatu struktur aljabar yang dibangun atas grup mempunyai konsep-konsep yang hampir

sama dengan grup, salah satunya yaitu homomorfisma grup.
2. Semi-homomorfisma *BCK*-aljabar merupakan generalisasi dari homomorfisma *BCK*-aljabar sehingga setiap homomorfisma *BCK*-aljabar adalah semi-homomorfisma *BCK*-aljabar akan tetapi tidak berlaku sebaliknya.
3. Konsep-konsep yang berlaku di dalam homomorfisma *BCK*-aljabar seperti kernel, berlaku juga pada semi-homomorfisma *BCK*-aljabar

3.2 Saran

BCK-aljabar yang merupakan suatu struktur aljabar yang dibangun oleh grup komutatif memuat banyak hal dapat dikaji dari struktur ini, salah satunya mengenai semi-homomorfisma *BCK*-aljabar sehingga masih terbuka kemungkinan untuk mengkaji konsep dari *BCK*-aljabar yang lain seperti pseudo *BCK*-aljabar, *BCK*-aljabar yang komutatif, ideal implikatif positif dari *BCK*-aljabar dan sebagainya.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Grillet, Pierre Antoine., (1999), *Algebra*, John Wiley & Sons, Inc, New York.
[2] Howie, J.M., (1976), *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London.
[3] Iseki, K., S. Tanaka., (1976), *Ideal Theory of BCK-Algebra*, Math. Japon. **21** : 351 - 366
[4] Jun, Young Bae, Kyoung Ja Lee and Chul Hwan Park., (2007), *A Method to Make BCK-algebras*, Commun. Korean Math. Soc.,**22**(4) : 503–508. http://www.mathnet.or.kr/mathnet/thesis_file/03_C07-058.pdf (16 Maret 2010)
[5] Lee, Kyoung Ja and Young Bae Jun., (2009), *Semi-homomorphisms of BCK-algebras*, Journal of The Chungcheong Mathematical Society, **22**(2) : 131–139. http://www.ccms.or.kr/data/pdfpaper/jcms22_2/22_2_131.pdf (7 September 2009)
[6] Meng, J., (1993), *A Problem on The Variety of BCK-algebras*, SEA Bull.Math.**17**(2) : 167–171.