# PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA *COMPLETE GRAPH* $K_n$ DENGAN *n* GANJIL

Novi Irawati[1] dan Robertus Heri[2]
[1,2] Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. Soedarto, Tembalang-Semarang, 50275.

**Abstract.** Let G be a graph consists of edges and vertex. A vertex-magic total labeling of a graph is a bijection map of union edges and vertex to the integers such that there exists a positive integer $k$ satisfying $\lambda(x) + \sum \lambda(xy) = k$, for every elements of vertex. Then k is called a magic constant and G is called vertex-magic total graph. In this article, we consider a vertex-magic labeling of complete graph $K_n$ for odd with use an algorithm which is composed of a modified construction magic square algorithm.

**Keywords**: vertex-magic total labeling, complete graph $K_n$, magic square

## 1. PENDAHULUAN

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang insiden terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970).

Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Ada banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan gracefull, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan juga desain circuit gabungan pada komponen elektronik.

Dalam perang di dunia modern ini penggunaan peluru kendali sudah tidak asing lagi. Penggunaan peluru kendali ini mengurangi perang secara fisik dalam jarak dekat, karena peluru kendali dapat diluncurkan dari jarak jauh. Dalam peluncurannya perlu diperhitungkan secara matang agar tepat sasaran. Untuk mengantisipasi kedatangan peluru kendali dari pasukan musuh, peluru kendali ini dapat di deteksi dengan menggunakan pendeteksi sinyal radar, sehingga dapat dilakukan antisipasi secepat mungkin. Selain untuk mendeteksi keberadaan peluru kendali baik yang akan diluncurkan ataupun yang datang dari musuh, deteksi sinyal radar ini juga digunakan untuk deteksi keberadaan pesawat tempur. Desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali ini ekuivalen dengan pelabelan pada *complete graph*, dimana setiap titik yang ada dihubungkan dengan satu sisi yang mempunyai label yang selalu berbeda. Label sisi ini menggambarkan jarak antar titik, sedangkan label titiknya merupakan posisi pada saat sinyal dikirimkan.

Pada artikel ini, penulis melakukan kajian pelabelan total titik ajaib (*vertex magic total labeling*) pada salah satu subkelas graf reguler yaitu *complete graph* $K_n$, dimana salah satu aplikasinya digunakan dalam desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali.

## 2. MASALAH

Permasalahan yang akan dibahas dalam artikel ini adalah bagaimana memberikan pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* $K_n$, untuk n ganjil, dengan dasar penyusunan persegi ajaib.

## 3. PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA *COMPLETE GRAPH* $K_n$ DENGAN *n* GANJIL

Pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_n$ dimana *n* ganjil, hampir sama dengan konstruksi persegi ajaib orde $n$. Persegi ajaib orde $n$ adalah susunan bilangan dari 1 hingga $n^2$, biasanya merupakan bilangan bulat yang berbeda dalam sebuah persegi, sedemikian sehingga bilangan $n$ di semua baris, semua kolom, dan kedua diogalnya mempunyai jumlah konstan yang sama. Persegi ajaib yang normal berisi bilangan bulat dari 1 hingga $n^2$. Konstanta untuk satu persegi ajaib senantiasa tunggal (unik).

Perbedaan yang terjadi antara konstruksi persegi ajaib orde *n* dengan konstruksi pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_n$, dimana $n$ ganjil terletak pada banyaknya bilangan yang akan mengisi elemen tabel. Jika dalam persegi ajaib bilangannya berupa 1 sampai $n^2$ maka dalam pemberian label *complete graph* $K_n$ dimana $n$ ganjil menggunakan bilangan1 sampai $+\frac{n(n-1)}{2}$.

**Theorema 3.1 [6]** *Terdapat pelabelan total titik ajaib pada complete graph $K_n$ dimana $n$ ganjil dan berlaku untuk semua $n$ ganjil.*

**Bukti** :

Diberikan tabel $M_{ij} = n \times n$ untuk *complete graph* $K_n$ dengan $i, j$ berturut-turut untuk baris dan kolom. Cara pemberian label pada *complete graph* dengan $n$ ganjil dapat menggunakan salah satu cara pembuatan persegi ajaib dengan orde $n$. Perbedaan yang akan terjadi terletak pada banyaknya bilangan yang akan mengisi elemen tabel, jika persegi ajaib bilangannya berupa 1 sampai $n^2$ maka dalam pemberikan label *complete graph* dengan *n* ganjil menggunakan bilangan1 sampai $n + \frac{n(n-1)}{2}$.

Untuk *complete graph* $K_n$ dengan $n = 1$ tidak diperlukan langkah-langkah untuk melabelinya, sementara untuk $n > 1$ diperlukan langkah-langkah sebagai berikut.

**Algoritma pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* $K_n$, dengan $n$ ganjil:**

**Langkah 1** : Mulai pelabelan dari elemen $a_{ij}$ =1, dengan $i = \frac{n+3}{2}$ dan $j = \frac{n+1}{2}$

**Langkah 2** : Pilih elemen tabel dengan pergerakan ke arah tenggara (yaitu, $i = (i + 1) \bmod n$ dan $j = (j + 1) \bmod n$) satu posisi dari elemen sebelumnya dan diberi nilai dengan penambahan 1 hingga elemen yang belum terlabeli tidak ditemukan.

**Langkah 3** : Jika arah tenggara dari elemen sebelumnya sudah terisi, maka pilih elemen dengan pergerakan **vertikal ke bawah dua kotak**, kemudian ulangi langkah 2 sampai angka pelabelan mencapai bilangan $n + \frac{n(n-1)}{2}$.

**Langkah 4** : Jika angka pelabelan sudah mencapai bilangan $+\frac{n(n-1)}{2}$ , pilih garis diagonal utama yang telah terisi penuh dan berikan label yang sama terhadap label yang telah ada sehingga terbentuk simetris terhadap garis diagonal utama yang telah terisi penuh tersebut. Dalam langkah ini bilangan yang mengisi diagonal utama merupakan label untuk titik dalam graf dan untuk mempermudah label untuk titik diletakkan dalam baris pertama tabel $n \times n$ yaitu dengan memindahkan nilai yang ada dalam diagonal utama ke baris pertama sedangkan untuk posisi yang diatasnya bergerak turun ke bawah.

**Lemma 3.2 [6]** *Pelabelan total titik ajaib dikatakan pelabelan total titik ajaib yang valid dari complete graph $K_n$, dimana $n$ adalah bilangan ganjil jika konstanta ajaibnya adalah $k = \frac{n^4+3n^2}{4n}$*

**Bukti:**

Perbedaan antara persegi ajaib dengan tabel pelabelan ini adalah dimana dalam persegi ajaib range angkanya dari 1 sampai $n^2$ , sedangkan dalam pelabelan angka yang digunakan adalah mulai dari 1 sampai $n + \frac{n(n-1)}{2}$ . Entri yang lain dapat dilihat jumlahnya berkurang sebanyak $\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right)$ . Dengan konstanta ajaib dari persegi ajaib adalah

$$M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n(n^2-1)$$

Dengan demikian akan diperoleh konstanta ajaib dari pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* $K_n$ , dimana $n$ adalah bilangan ganjil sebagai berikut.

$$k = \frac{1}{2}n(n^2-1) - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{n^3+n}{2} - \left(\frac{n^2-n}{2} + \frac{n(n^2-2n+1)}{4}\right)$$

$$= \frac{2n^3+2n-2n^2+2n-n^3+2n^2-n}{4} = \frac{n^3+3n}{4}$$

**Contoh 3.3.**

Sebagai ilustrasi diberikan diberikan contoh pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_3$ . Karena $n = 3$ berarti angka yang digunakan dalam pelabelan adalah dari angka 1 sampai $n + \frac{n(n-1)}{2} = 3 + \frac{3(2)}{2} = 6$ .

Dengan memulai dengan elemen $a_{3,2}$ pada tabel $3 \times 3$ dan dengan menggunakan langkah berikutnya diperoleh,

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | 1 | |
| i/j | 1 | 2 | 3 |

**Gambar 1.** Hasil tabel setelah langkah 1

| | | |
|---|---|---|
| | | 2 |
| 3 | | |
| | 1 | |

**Gambar 2.** Hasil tabel setelah langkah 2

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | 2 |
| 3 | 5 | |
| | 1 | 6 |

**Gambar 3.** Hasil tabel setelah langkah 3

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 |
| 3 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 1 |
| 2 | 1 | 6 |

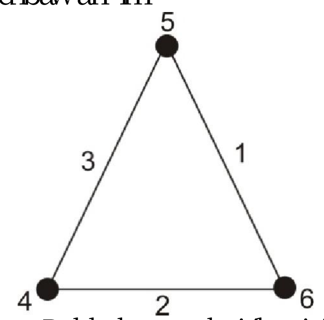
**Gambar 4.** Hasil tabel setelah langkah 4

| Label titik | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| Label sisi | 3 | 3 | 2 |
| | 2 | 1 | 1 |

**Gambar 5.** Tabel pelabelan total titik ajaib untuk $K_3$ .

Jumlah bilangan perkolom yang merupakan konstanta ajaib untuk pelabelan *complete graph* orde 3 ($K_3$ ) adalah konstan yang sama, yaitu berjumlah 9.

Penggambaran pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_3$ diberikan pada gambar dibawah ini




**Gambar 6.** Pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_3$

Pelabelan total titik ajaib untuk $K_3$ mempunyai konstanta ajaib ($k$ ) = 9, yang merupakan penjumlahan dari sebuah tititk dan dua sisi yang insiden terhadap titik tersebut. Pada Gambar 3.10 dapat dilihat bahwa nilai $k = 9$ .

Sebagaimana dengan persegi ajaib orde $n$ , pelabelan total titik ajaib juga mempunyai beberapa algoritma untuk menyusunnya. Algoritma lain adalah sebagaimana algoritma penyusunan persegi ajaib yang telah disesuaikan . Namun dari algoritma penyusunan persegi ajaib yang ada hanya ada beberapa metode penyusunan persegi ajaib orde *n* yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* $K_n$ dimana $n$ ganjil. Metode tersebut adalah Metode 2 dan 3 yang telah disesuaikan.



**3.1 Metode 2**

Metode 2 yang digunakan untuk menyusun sebuah persegi ajaib dapat digunakan untuk menyusun pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_n$ dimana $n$ ganjil. Namun sebelumnya algoritma tersebut perlu disesuaikan. Yaitu angka yang digunakan adalah 1 sampai $+\frac{n(n-1)}{2}$ , sehingga metode ini dapat diuraikan ke dalam langkah-langkah berikut.

**Langkah 1** : Mulai pelabelan dengan angka 1 pada kotak tepat di atas kotak pusat.

**Langkah 2** : Gerakan dasar untuk mengisi kotak-kotak tersebut yaitu **timur laut ( ),** satu langkah pada satu waktu. Untuk elemen yang terpilih selanjutnya, berikan nilai dengan penambahan 1 dari label sebelumnya.

**Langkah 3** : Jika kotak yang akan diisi sudah terisi maka, bergerak satu vertikal **ke atas dua kotak,** kemudian terus seperti sebelumnya sampai angka pelabelan mencapai bilangan $+\frac{n(n-1)}{2}$ .

**Langkah 4** : Jika angka pelabelan sudah mencapai bilangan $+\frac{n(n-1)}{2}$ , Pilih garis diagonal utama yang telah terisi penuh dan berikan label yang sama terhadap label yang telah ada sehingga terbentuk simetris terhadap garis diagonal utama ang telah terisi penuh tersebut. Dalam langkah ini bilangan yang mengisi diagonal utama merupakan label untuk titik dalam graf dan untuk mempermudah label untuk titik diletakkan dalam table baris pertama yaitu denganmemindahkan nilai yang ada dalam diagonal utama ke baris pertama sedangkan untuk posisi yang diatasnya bergerak turun ke bawah.

**Contoh 3.4.**

Sebagai ilustrasi diberikan diberikan contoh pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_5$ . Karena $n = 5$ berarti angka yang digunakan dalam pelabelan adalah dari angka 1 sampai

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = 5 + \frac{5(4)}{2} = 15 .$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | 1 | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

**Gambar 7.** Tabel hasil setelah langkah 1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 2 | |
| | | 1 | | |
| | 5 | | | |
| 4 | | | | |
| | | | | 3 |

**Gambar 8.** Tabel hasil setelah langkah 2

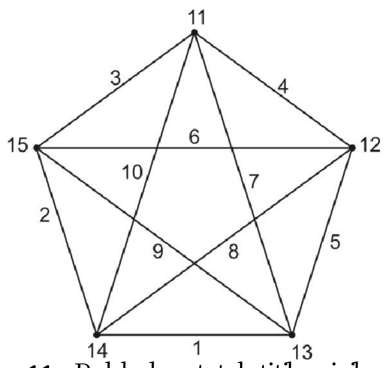
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | | 2 | |
| | | 1 | | |
| | 5 | | | |
| 4 | | | | |
| | | | | 3 |

**Gambar 9.** Tabel hasil setelah langkah 3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | | 2 | 15 |
| 10 | | 1 | 14 | |
| | 5 | 13 | | 9 |
| 4 | 12 | | 8 | |
| 11 | | 7 | | 3 |

| *Label titik* | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| *Label sisi* | 3 | 6 | 9 | 2 | 2 |
| | 10 | 8 | 1 | 1 | 9 |
| | 7 | 5 | 5 | 8 | 6 |
| | 4 | 4 | 7 | 10 | 3 |

**Gambar 10.** Tabel hasil setelah langkah 4




**Gambar 11** Pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_5$

Pelabelan total titik ajaib untuk $K_5$ dengan menggunakan metode 2 yang telah disesuaikan. Konstanta ajaib ($k$) = 35 yang diperoleh dari hasil penjumlahan label titik dan label sisi yang insiden dengan titik tersebut. Misalnya, $3+6+9+2+15=35$. Dan ini berlaku untuk semua titik.

**3.2 Metode 3**

Sama halnya dengan Metode 2, Metode 3 yang telah disesuaikan dalam penyusunan persegi ajaib juga dapat digunakan untuk menyusun pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_n$ dimana $n$ ganjil. Penyesuaian yang dimaksud adalah angka yang digunakan adalah 1 sampai $+\frac{n(n-1)}{2}$ .Metode 3 ini dapat diuraikan ke dalam langkah-langkah berikut.

**Langkah 1** : Mulai pelabelan dengan angka 1 pada kotak tepat di bawah kotak pusat.

**Langkah 2** : Gerakan dasar untuk mengisi kotak-kotak kemudian menjadi diagonal ke kanan bawah ( ), satu langkah pada satu waktu. Untuk elemen yang terpilih selanjutnya, berikan nilai dengan penambahan 1 dari label sebelumnya.

**Langkah 3** : Jika kotak yang akan diisi sudah terisi maka, bergerak satu vertikal ke bawah dua kotak, kemudian terus seperti sebelumnya sampai nilai angka pelabelan mencapai bilangan $+\frac{n(n-1)}{2}$ .

**Langkah 4** : Jika angka pelabelan sudah mencapai bilangan $+\frac{n(n-1)}{2}$ , Pilih garis diagonal utama yang telah terisi penuh dan berikan label yang sama terhadap label yang telah ada sehingga terbentuk simetris terhadap garis diagonal utama ang telah
terisi penuh tersebut. Dalam langkah ini bilangan yang mengisi diagonal utama merupakan label untuk titik dalam graf dan untuk mempermudah label untuk titik diletakkan dalam baris pertama tabel yaitu dengan memindahkan nilai yang ada dalam diagonal utama ke baris pertama sedangkan untuk posisi yang diatasnya bergerak turun ke bawah.

**Contoh 3.5.** Sebagai ilustrasi diberikan diberikan contoh pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_7$ . Karena $n = 7$ berarti angka yang digunakan dalam pelabelan adalah dari angka 1 sampai

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | 1 | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

**Gambar 12 .** Tabel hasil setelah langkah 1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 4 |
| 5 | | | | | | |
| | 6 | | | | | |
| | | 7 | | | | |
| | | | 1 | | | |
| | | | | 2 | | |
| | | | | | 3 | |

**Gambar 13 Tabel setelah langkah 2**

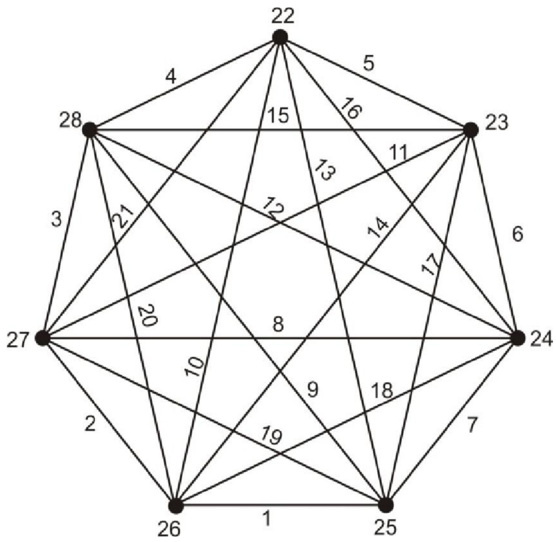
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 4 |
| 5 | | | | | | |
| | 6 | | | | | |
| | | 7 | | | | |
| | | | 1 | | | |
| | | 8 | | 2 | | |
| | | | | | 3 | |

**Gambar 14.** Tabel hasil setelah langkah 3

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | | 16 | | 10 | | 4 |
| 5 | 23 | | 17 | | 11 | |
| | 6 | 24 | | 18 | | 12 |
| 13 | | 7 | 25 | | 19 | |
| | 14 | | 1 | 26 | | 20 |
| 21 | | 8 | | 2 | 27 | |
| | 15 | | 9 | | 3 | 28 |

| *Label titik* | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Label sisi* | 5 | 5 | 16 | 13 | 10 | 21 | 4 |
| | 16 | 6 | 6 | 17 | 14 | 11 | 15 |
| | 13 | 17 | 7 | 7 | 18 | 8 | 12 |
| | 10 | 14 | 18 | 1 | 1 | 19 | 9 |
| | 21 | 11 | 8 | 19 | 2 | 2 | 20 |
| | 4 | 15 | 12 | 9 | 20 | 3 | 3 |

**Gambar 15.** Tabel hasil setelah langkah 5




**Gambar 16.** Pelabelan total titik ajaib *complete graph* $K_7$

## 4. PENUTUP

Artikel ini memaparkan tentang pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* $K_n$. Pembahasannya meliputi algoritma pelabelan dan pencarian konstanta ajaib dari pelabelan total titik ajaib pada *compete graph* $K_n$ untuk $n$ ganjil dan genap. Algoritma pelabelan total titik ajaib untuk *compete graph* $K_n$, untuk $n$ bilangan ganjil disusun berdasarkan algoritma penyusunan persegi ajaib yang telah dimodifikasi.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Abussakir, diakses tanggal 3 November 2008, *Graph Labeling*, Abussakir's Blog. http://abussakir.wordpress.com/

[2]. Gallian, JA., (2008), "A Dynamic Survey of Graph Labeling". *The Electronic Journal of Combinatorics 15*. Minnesota. United State Of America.

[3]. Harju, Tero., (2007), *Lecture Notes On Graph Theory*. Finland: Department of mathematics University Of Turki.

[4]. Hendry Dext, diakses tanggal 3 Januari 2010, *Mengenal Magic Square*, Everything About Math Blog. http://hendrydext.blogspot.com/

[5]. Lipschutz, Seymour and Lipson, Marc lars., (1992), "*2000 Solved Problem in Discrete Mathematic*". McGraw Hill, Inc. Singapore.

[6]. McDougall, Miller, Slamin, and Wallis, (2002),. *Vertex Magic Total Labeling of Graphs*, Util. Math., 61(2002) 3-21.

[7]. Robin J.Wilson and John J.Watkins, (1990), *Graph An Introductory Approach*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

[8]. Slamin et al., (2006), "Vertex-Magic Total Labelings of Disconnected Graphs". *Journal of Prime Research in Mathematics Vol. 2(2006), 147-156.*

[9]. Stinson, Robert., (1992), *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys.* John Wiley & Sons, Inc. New York.