MODEL DINAMIS RANTAI MAKANAN TIGA SPESIES

Wiji Budi Pratikno dan Sunarsih
Program Studi Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, SH, Semarang, 50275

Abstract. Three species food chain models are model that express the interaction of three populations of *prey*, *first predator* and *second predator* populations. The models are derived from a combination of logistic growth model between *prey* population and *predator population.* Model that is used is a *Holling* type II functional response. The model consists of non linear differential equations with three dependent variables, there are $x_1(t)$ representing size of *prey* population at time t, $x_2(t)$ is size of *first predator* population at time t, and $x_3(t)$ is size of *second predator* population at time t. From the result of stability analysis conducted on the food chain model of three species are found six equilibrium points based on the value eigen, and six cases of different stability.

Keywords : Food chain, *prey*, *predator*, eigen values, equilibrium point.

1. PENDAHULUAN

Ekologi merupakan cabang ilmu dalam biologi yang mempelajari tentang hubungan makhluk hidup dengan habitatnya. Dalam ekologi, dikenal istilah rantai makanan. Rantai makanan merupakan lintasan konsumsi makanan yang terdiri dari beberapa spesies organisme [6]. Bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan berupa interaksi dua spesies yaitu interaksi antara spesies mangsa (*prey*) dengan pemangsa (*predator*). Model yang mendiskripsi kan interaksi dua spesies yang terdiri dari *prey* dan *predator* adalah model rantai makanan dua spesies. Kehadiran *predator* memberikan pengaruh pada jumlah *prey*. Pada interaksi tiga spesies, kehadiran *predator kedua* berpengaruh pada jumlah *predator pertama* dan *prey* sehingga dalam rantai makanan setiap komponennya saling memberikan pengaruh. Model yang mendiskripsikan interaksi tiga spesies yang terdiri dari *prey*, *predator pertama*, dan *predator kedua* adalah model rantai makanan tiga spesies. Untuk itu dari model rantai makanan tiga spesies ini akan dicari solusi kesetimbangan dan dianalisis perilaku dari sistem yang dapat ditentukan dengan menganalisis kestabilan dari solusi kesetimbangan.

2. TITIK KESTIMBANGAN

Diberikan sistem persamaan differensial non *linear* autonomous

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

Titik (x^*, y^*) dimana $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$ disebut titik kritis atau kesetimbangan dari sistem (1).[3]

3. KRITERIA KESTABILAN

Kriteria kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian. Untuk mengetahui perilaku kesetimbangan untuk matriks Jacobian berukuran $2x2$ dapat digunakan metode determinan-trace.

Misalkan matriks Jacobian $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ untuk persamaan karakteristik matriks J adalah

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \qquad (2)$$

Definisi 3.1 [1]

Trace matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *adalah*

$trJ = a + d$

Determinan dari matriks J adalah $\det J = ad - bc$

Persamaan karakteristik (2) dapat ditulis menjadi

$$\lambda^2 - trJ\lambda + \det J = 0 \qquad (3)$$

dari persamaan (3) didapat nilai eigen dari matriks yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{trJ \pm \sqrt{D}}{2} \qquad (4)$$

dengan $D = (trJ)^2 - 4\det J$.

4. MODEL PERTUMBUHAN EKSPONENSIAL

Laju perubahan populasi $\frac{dN}{dt}$ merupakan laju pertumbuhan R dikalikan dengan besar populasi N . Misalkan laju pertumbuhan konstan (R_0), maka pertumbuhan populasi adalah solusi dari persamaan differensial *linear* orde satu dengan koefisien konstan

$$\frac{dN}{dt} = R_0 N$$

Dimana R_0 konstan.

5. MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK

Model logistik didapat dengan cara memasukkan faktor daya dukung lingkungan (K) secara eksplisit. Jika dalam populasi ada N individu, maka lingkungan masih dapat mendukung $K - N$ individu. Jadi masih ada bagian lingkungan yang masih bisa diisi, sebesar $\frac{(K-N)}{K}$. Bagian inilah yang sebanding dengan pertumbuhan perkapita. Oleh karena itu $\frac{dN}{Ndt} = r\frac{(K-N)}{K}$ atau $\frac{dN}{dt} = rN\frac{(K-N)}{K}$.

6. PEMBAHASAN

Rantai makanan dapat dimodelkan ke dalam suatu sistem persamaan differensial. Sistem ini memberikan laju perubahan biomassa dari pertumbuhan dan mortalitas pada setiap tingkatan trofik. Model perubahan biomassa tiap tingkatan trofik untuk spesies i dituliskan dalam persamaan:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i - m_i \,,\; i = 1, 2, \ldots N \qquad (5)$$

dengan,

x_i = jumlah populasi spesies *i*

g_i = laju pertumbuhan populasi spesies *i*

m_i = laju kematian populasi spesies *i*

Holling (1959) mengelompokkan tiga tipe respon fungsional predator yaitu tipe *linear* (*Holling* tipe I), tipe *hiperbolik* (*Holling* tipe II), dan tipe *sigmoidal* (*Holling* tipe III). Untuk laju pertumbuhan spesies dari ketiga tipe dapat dituliskan ke dalam persamaan yaitu:

Non Linear : $g_i = e_i a_i x_i x_{i-1}$

Hiperbolik: $g_i = e_i \frac{a_i x_i x_{i-1}}{b_i + x_{i-1}}$ (6)

Sigmoidal: $g_i = e_i \frac{a_i x_i x^2_{i-1}}{b_i^2 + x^2_{i-1}}$

dengan,

g_i = laju pertumbuhan populasi spesies *i*

e_i = efisiensi pemberian makanan dari pemangsaan untuk pembentukan *predator* yang baru.

a_i = rasio pemangsaan

b_i = konstanta setengah jenuh

Sedangkan untuk laju kematian spesies meliputi dua hal yaitu kematian alami dan kematian yang disebabkan oleh proses pemangsaan. Laju kematian dari ketiga tipe dapat dituliskan ke dalam persamaan:

Linear: $m_i = a_i x_i x_{i-1} + d_i x_i$

Hiperbolik: $m_i = \dfrac{a_{i+1} x_{i+1} x_i}{b_{i+1} + x_i} + d_i x_i$ (7)

Sigmoidal: $m_i = \dfrac{a_{i+1} x^2_{i+1} x_i}{b^2_{i+1} + x_i^2} + d_i x_i$

dengan,

m_i : laju kematian populasi spesies *i*

d_i : laju kematian konstan populasi spesies *i*

Model rantai makanan dipengaruhi oleh banyak faktor mulai dari banyaknya spesies yang terlibat maupun penentuan modelnya sehingga diperlukan asumsi-asumsi untuk membatasi pemodelan tentang rantai makanan. Asumsi yang digunakan dalam pembahasan antara lain:

1. Model rantai makanan yang digunakan adalah model rantai makanan tiga spesies yang terdiri dari spesies *prey*, *predator pertama*, dan *predator kedua* yang mana *prey* merupakan satu-satunya mangsa bagi *predator pertama* dan *predator pertama* merupakan satu-satunya mangsa bagi *predator kedua*.
2. Tidak terjadi siklus perulangan rantai makanan, dalam artian *prey* dimangsa *predator pertama*, *predator pertama* dimangsa *predator kedua*, dan tidak berlaku *predator kedua* dimangsa oleh *prey*.
3. Semua parameter dan variabel yang digunakan tidak negatif.
4. Tidak ada sumber makanan alternatif lainnya sehingga digunakan tipe *hiperbolik*.

Dengan demikian, model rantai makanan tiga spesies dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1\left(r\left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{a_2 x_2}{b_2 + x_1}\right) \quad (8.a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{e_2 a_2 x_1 x_2}{b_2 + x_1} - \frac{a_3 x_2 x_3}{b_3 + x_2} - d_2 x_2 \quad (8.b)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{e_3 a_3 x_2 x_3}{b_3 + x_2} - d_3 x_3 \quad (8.c)$$

dengan,

x_1 = jumlah populasi *prey*

r = laju pertumbuhan populasi *prey*

K =kapasitas daya tampung populasi *prey*

a_2 =rasio pemangsaan *predator pertama*

b_2 = konstanta setengah jenuh untuk *predator pertama*

x_2 = jumlah populasi *predator pertama*

e_2 = efisiensi pemberian makanan dari pemangsaan untuk pembentukan *predator pertama* yang baru

d_2 = laju kematian konstan *predator pertama*

e_3 = efisiensi pemberian makanan dari pemangsaan untuk pembentukan *predator kedua* yang baru

d_3 = laju kematian konstan *predator kedua*

a_3 = rasio pemangsaan *predator kedua*

b_3 = konstanta setengah jenuh untuk *predator kedua*

x_3 = jumlah populasi *predator kedua*

6.1 Titik Kesetimbangan

Solusi dari persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c) berada pada daerah G dimana $G = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \le x_1 \le K, 0 \le x_2, 0 \le x_3\}$ Misalkan (x_1^*, x_2^*, x_3^*) adalah solusi dari persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c). Solusi kesetimbangan akan terpenuhi jika $\frac{dx_1}{dt} = 0$, $\frac{dx_2}{dt} = 0$, dan $\frac{dx_3}{dt} = 0$, Dari persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c) didapat enam titik kesetimbangan yaitu:

$E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (K,0,0)$,

$E_2 = (0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $E_3 = (x_{1E}, x_{2E}, 0)$,

$E_4 = (\hat{x}_{1A}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3A})$ dan $E_5 = (\hat{x}_{1B}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3B})$

dimana $\bar{x}_2 = \dfrac{b_3 d_3}{e_3 a_3 - d_3}$, $\bar{x}_3 = \dfrac{d_2 (b_3 + \bar{x}_2)}{-a_3}$,

$$x_{1E} = \frac{b_2 d_2}{(e_2 a_2 - d_2)},$$

$$x_{2E} = \frac{r(K - x_{1E})(b_2 + x_{1E})}{K a_2}$$

$$\hat{x}_{1A} = \frac{1}{2}(K - b_2) + \frac{1}{2r}\sqrt{\left[r(K - b_2)\right]^2 + 4r\left(r b_2 K - K a_2 \hat{x}_2\right)}$$

$$\hat{x}_{1B} = \frac{1}{2}(K - b_2) - \frac{1}{2r}\sqrt{\left[r(K - b_2)\right]^2 + 4r\left(r b_2 K - K a_2 \hat{x}_2\right)}$$

$$,\ \hat{x}_2 = \frac{b_3 d_3}{e_3 a_3 - d_3},$$

$$\hat{x}_{3A} = \frac{\left(e_2 a_2 \hat{x}_{1A} - d_2\left(b_2 + \hat{x}_{1A}\right)\right)\left(b_3 + \hat{x}_2\right)}{a_3\left(b_2 + \hat{x}_{1A}\right)},$$

dan

$$\hat{x}_{3B} = \frac{\left(e_2 a_2 \hat{x}_{1B} - d_2\left(b_2 + \hat{x}_{1B}\right)\right)\left(b_3 + \hat{x}_2\right)}{a_3\left(b_2 + \hat{x}_{1B}\right)}.$$

6.2 Analisis Kestabilan

Persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c) adalah sistem persamaan differensial non *linear*, untuk menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan nya, terlebih dahulu dilakukan pelinieran terhadap persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c). Dari linierisasi, diperoleh matriks Jacobian pada titik kesetimbangan (x_1^*, x_2^*, x_3^*) yaitu:

$$J(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\frac{a_2 x_1^*}{b_2 + x_1^*} & 0 \\ \frac{e_2 a_2 x_2^* b_2}{\left(b_2 + x_1^*\right)^2} & a_{22} & -\frac{a_3 x_2^*}{b_3 + x_2^*} \\ 0 & \frac{e_3 a_3 x_3^* b_3}{\left(b_3 + x_2^*\right)^2} & \frac{e_3 a_3 x_2^*}{b_3 + x_2^*} - d_3 \end{bmatrix}$$

… (9)

dengan:

$$a_{11} = r - \frac{2r x_1^*}{K} - \frac{a_2 x_2^* b_2}{\left(b_2 + x_1^*\right)^2}$$

$$a_{22} = \frac{e_2 a_2 x_1^*}{b_2 + x_1^*} - \frac{a_3 x_3^* b_3}{\left(b_3 + x_2^*\right)^2} - d_2$$

Selanjutnya akan dianalisis perilaku kestabilan dari persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c) dengan cara mensubstitusi nilai dari masing-masing titik kesetimbangan ke dalam matriks (9) sebagai berikut.

Titik 1: $E_0 = (0,0,0)$

Dengan mensubstitusikan titik $E_0 = (0,0,0)$ ke dalam matriks (9) diperoleh nilai eigen:

$\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = -d_2$, dan $\lambda_3 = -d_3$

Titik 2: $E_1 = (K,0,0)$

Dengan mensubstitusikan titik $E_1 = (K,0,0)$ ke dalam matriks (9) diperoleh nilai eigen:

$\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = \frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2$, dan $\lambda_3 = -d_3$

Titik 3: $E_2 = (0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$

Dengan mensubstitusikan titik $E_2 = (0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ke dalam matriks (9) diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = r - \frac{a_2 b_3 d_3}{b_2\left(e_3 a_3 - d_3\right)},$$

dan

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\frac{d_2 d_3}{e_3 a_3} \pm \sqrt{\left(\frac{d_2 d_3}{e_3 a_3}\right)^2 - 4\left(-\frac{d_2 d_3}{e_3 a_3}\left(e_3 a_3 - d_3\right)\right)}}{2}$$

Titik 4: $E_3 = (x_{1E}, x_{2E}, 0)$

Dengan mensubstitusikan titik $E_3 = (x_{1E}, x_{2E}, 0)$ ke dalam matriks (9) diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = \frac{a_3 b_2 e_2 e_3 r\left(K\left(e_2 a_2 - d_2\right) - b_2 d_2\right)}{b_3 K\left(e_2 a_2 - d_2\right)^2 + b_2 e_2 r\left(K\left(e_2 a_2 - d_2\right) - b_2 d_2\right)} - d_3$$

, dan

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\frac{r d_2\left(K\left(e_2 a_2 - d_2\right) - b_2\left(e_2 a_2 + d_2\right)\right)}{K e_2 a_2\left(e_2 a_2 - d_2\right)}$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r d_2\left(K\left(e_2 a_2 - d_2\right) - b_2\left(e_2 a_2 + d_2\right)\right)}{K e_2 a_2\left(e_2 a_2 - d_2\right)}\right)^2 - 4\left(\frac{r d_2}{e_2 a_2 K}\left(K\left(e_2 a_2 - d_2\right) - b_2 d_2\right)\right)}$$

Titik 5: $E_4 = (\hat{x}_{1A}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3A})$ dan **Titik 6:** $E_5 = (\hat{x}_{1B}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3B})$

Untuk titik 5: $E_4 = (\hat{x}_{1A}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3A})$ dan titik 6: $E_5 = (\hat{x}_{1B}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3B})$ dianalisis dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurtwirtz.*

6.3 Simulasi Model

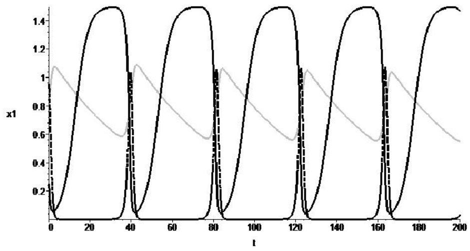
Untuk lebih memperjelas mengenai pembahasan model dilakukan simulasi model untuk contoh penerapan di atas. Berdasarkan perhitungan nilai eigen pada pembahasan sebelumnya didapat beberapa faktor yang mempengaruhi kestabilan masing-masing titik kesetimbangan yaitu $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2$, $e_2 a_2 - d_2$ dan $e_3 a_3 - d_3$. Didapat enam kemungkinan nilai yaitu $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 > 0$, $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$, $e_2 a_2 - d_2 > 0$, $e_2 a_2 - d_2 < 0$, $e_3 a_3 - d_3 > 0$ dan $e_3 a_3 - d_3 < 0$. Dengan melakukan kombinasi didapat enam kasus yang berbeda yaitu:

Kasus 1 :

Untuk kasus 1 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 > 0$, $e_3 a_3 - d_3 > 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 > 0$ menggunakan nilai parameternya $r = 0.32$, $K = 1.5$, $a_2 = 1.6$, $b_2 = 0.65$, $d_2 = 0.84$, $e_2 = 2.1$, $a_3 = 0.5$, $b_3 = 0.39$, $d_3 = 0.02$ dan $e_3 = 0.5$ [5], dengan nilai awal $x_1(0) = 0.45$, $x_2(0) = 0.35$ dan $x_3(0) = 0.25$

Dari nilai parameter yang diberikan, didapat titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$ tidak stabil, titik $E_1 = (1.5, 0, 0)$ tidak stabil, $E_2 = (0, 0.034, -0.712)$ tidak stabil, $E_3 = (0.2167, 0.1483, 0)$ tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada Kasus 1.



Gambar 1. Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 1

Keterangan :

: Populasi *prey*

: Populasi *predator pertama*

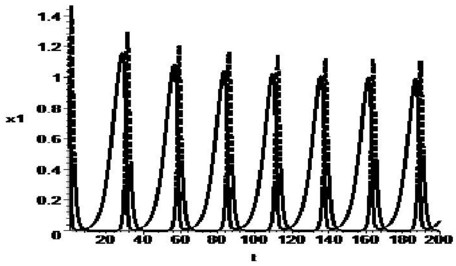
: Populasi *predator kedua*

Kasus 2 :

Untuk kasus 2 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 > 0$, $e_3 a_3 - d_3 < 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 > 0$ menggunakan nilai parameternya $r = 0.32$, $K = 1.5$, $a_2 = 1.6$, $b_2 = 0.65$, $d_2 = 0.84$, $e_2 = 2.1$, $a_3 = 2.1$, $b_3 = 2.3$, $d_3 = 3.9$ dan $e_3 = 0.2$ [5], dengan nilai awal $x_1(0) = 0.45$, $x_2(0) = 0.35$ dan $x_3(0) = 0.25$

Dari nilai parameter yang diberikan, didapat titik kesetim-bangan $E_0 = (0, 0, 0)$ tidak stabil, titik $E_1 = (1.5, 0, 0)$ tidak stabil, titik $E_2 = (0, -2.578, 0.111)$ tidak stabil, titik $E_3 = (0.2167, 0.1483, 0)$ tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 2.



Gambar 2. Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 2

Keterangan :

: Populasi *prey*

: Populasi *predator pertama*

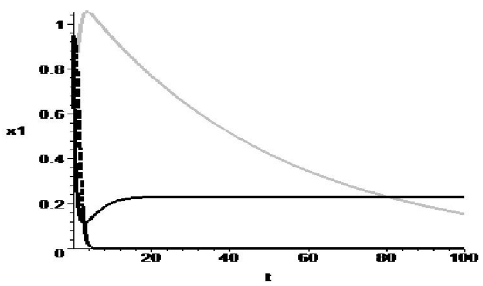
: Populasi *predator kedua*

Kasus 3 :

Untuk kasus 3 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$, $e_3 a_3 - d_3 > 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 > 0$ menggunakan nilai parameternya $r = 0.32$, $a_2 = 1.6$, $d_2 = 0.84$, dan $e_2 = 2.1$ [5], sedangkan untuk $K = 0.23$, $b_2 = 1$, $a_3 = 0.5$, $b_3 = 0.39$, $d_3 = 0.02$ dan $e_3 = 0.5$, dicari melalui perhitungan dengan mempertimbangkan nilai $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$, $e_3 a_3 - d_3 > 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 > 0$ dengan nilai awal $x_1(0) = 0.95$, $x_2(0) = 0.85$ dan $x_3(0) = 0.75$

Dari nilai parameter yang diberikan didapat titik kesetim-bangan $E_0 = (0,0,0)$ tidak stabil, titik $E_1 = (0.23,0,0)$ stabil, titik $E_2 = (0,0.034,0.712)$ tidak stabil, titik $E_3 = (0.33,0.12,0)$ tidak stabil..

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 3.



Gambar 3. Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 3

Keterangan :

: Populasi *prey*

: Populasi *predator pertama*

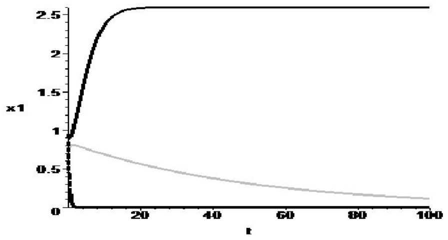
: Populasi *predator kedua*

Kasus 4 :

Untuk kasus 4 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$, $e_3 a_3 - d_3 > 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 < 0$ menggunakan nilai parameternya $r = 0.32$, $K = 2.6$, $a_2 = 1.5$, $b_2 = 1.4$, $d_2 = 2.9$ dan $e_2 = 1.5$ [5], sedangkan untuk $a_3 = 0.5$, $b_3 = 0.39$, $d_3 = 0.02$ dan $e_3 = 0.5$, dicari melalui perhitungan dengan mempertimbangkan nilai $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$, $e_3 a_3 - d_3 > 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 < 0$ dengan nilai awal $x_1(0) = 0.95$, $x_2(0) = 0.85$ dan $x_3(0) = 0.75$

Dari nilai parameter yang diberikan didapat titik kesetim-bangan $E_0 = (0,0,0)$ tidak stabil, titik $E_1 = (2.6,0,0)$ stabil, titik $E_2 = (0,0.034,2.459)$ tidak stabil, titik $E_3 = (6.246,3.518,0)$ tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 4.



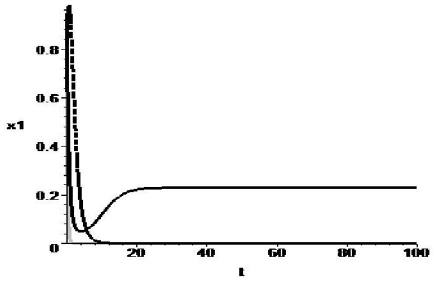
Gambar 4. Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 4

Keterangan :
: Populasi *prey*
: Populasi *predator pertama*
: Populasi *predator kedua*

Kasus 5 :
Untuk kasus 5 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu $\frac{e_2 a_2 K}{b_2+K} - d_2 < 0$, $e_3 a_3 - d_3 < 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 > 0$ menggunakan nilai parameternya $r = 0.32$, $a_2 = 1.6$, $d_2 = 0.84$, $e_2 = 2.1$, $a_3 = 2.1$, $b_3 = 2.3$, $d_3 = 3.9$ dan $e_3 = 0.2$ [5], sedangkan untuk $K = 0.23$ dan $b_2 = 1$, dicari melalui perhitungan dengan mempertimbangkan nilai $\frac{e_2 a_2 K}{b_2+K} - d_2 < 0$, $e_3 a_3 - d_3 < 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 > 0$ dengan nilai awal $x_1(0) = 0.95$, $x_2(0) = 0.85$ dan $x_3(0) = 0.75$

Dari nilai parameter yang diberikan didapat titik kesetimbangan $E_0 = (0,0,0)$ tidak stabil, titik $E_1 = (0.23,0,0)$ stabil, titik $E_2 = (0,-2.578,0.111)$ tidak stabil, titik $E_3 = (0.333,-0.12,0)$ tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 5.



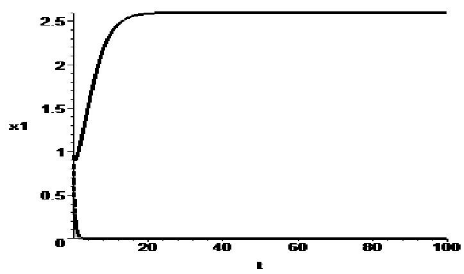
Gambar 5. Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 5

Keterangan :
: Populasi *prey*
: Populasi *predator pertama*
: Populasi *predator kedua*

Kasus 6 :
Untuk kasus 6 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu $\frac{e_2 a_2 K}{b_2+K} - d_2 < 0$, $e_3 a_3 - d_3 < 0$ dan $e_2 a_2 - d_2 < 0$ menggunakan nilai parameternya $r = 0.32$, $K = 2.6$, $a_2 = 1.5$, $b_2 = 1.4$, $d_2 = 2.9$, $e_2 = 1.5$, $a_3 = 2.1$, $b_3 = 2.3$, $d_3 = 3.9$ dan $e_3 = 0.2$ [5], dengan nilai awal $x_1(0) = 0.95$, $x_2(0) = 0.85$ dan $x_3(0) = 0.75$

Dari nilai parameter yang diberikan didapat titik kesetim-bangan $E_0 = (0,0,0)$ tidak stabil, titik $E_1 = (2.6,0,0)$ stabil, titik $E_2 = (0,2.578,0.383)$ tidak stabil, titik $E_3 = (6.246,3.518,0)$ tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik peru-bahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 6.



Gambar 6. Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 6

7. PENUTUP

Pengaruh kehadiran *predator kedua* pada model rantai makanan tiga spesies untuk kasus pertama didapat dua hasil yaitu populasi *prey*, *predator pertama* dan *predator kedua* bertahan hidup secara periodik untuk waktu yang tak terbatas dan hasil kedua yaitu populasi *prey* dan *predator pertama* bertahan hidup secara periodik untuk waktu tak terbatas dan populasi *predator kedua* mengalami kepunahan.

Untuk kasus kedua didapat hasil yaitu populasi *prey* bertahan hidup dengan jumlah tertentu sampai waktu tak terbatas, sedangkan populasi *predator pertama* dan *predator kedua* mengalami kepunahan.

Untuk kasus ketiga didapat hasil yaitu populasi *prey* meningkat dan bertahan pada batas kapasitas daya tampung (*carrying capacity*), sedangkan populasi *predator pertama* dan *predator kedua* mengalami kepunahan.

8. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard, (1988), *Aljabar Linier Elementer Edisi kelima*. Erlangga: Jakarta.

[2] Dwidjoseputro, D., (1991), *Ekologi Manusia dengan Lingkungannya*. Erlangga: Jakarta.

[3] Glenn, Ledder, (2005), *Differen-tial Equation: A Modeling Approach*: McGraw-Hill Com-panies, Inc: New York.

[4] Gwaltney, C. Ryan, et al., (2004), *Reliable Computation of Equilibrium States and Bifurcations in Food Chain Models.* University of Norre Dame: USA.

[5] Khedhairi.Al. , (2009), *The Chaos Con-trol of Chain Model Using Non Linier Feedback.* Applied Mathematics Sciences Journal. *Volume* 3 (2009), No. 12, 591-602.

[6] Kimball, J.W., (1993), *Biologi Edisi Kelima Jilid Tiga*. Erlangga: Jakarta.

[7] Zulfaedah, U.S., (2009), *Dinamika Sistem Mangsa - Pemangsa Fitoplankton-Zooplankton dengan Mangsa Fitoplankton yang Terinfeksi Virus Skripsi.* IPB : Bogor.