OPERASI GABUNGAN, JOIN, KOMPOSISI DAN HASIL KALI KARTESIAN PADA GRAF FUZZY SERTA KOMPLEMENNYA

Tina Anggitta Novia[1] dan Lucia Ratnasari[2]
[1,2]Program Studi Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, SH, Semarang, 50275

Abstract. A fuzzy graphs $G:(V,\sigma,\mu)$ is a nonempty set V together with a pair function $\sigma:V\rightarrow[0,1]$ and $\mu:VxV\rightarrow[0,1]$ satisfied $\mu(uv)\le\sigma(u)\wedge\sigma(v)\quad\forall u,v\in V$. This paper described about some operations on fuzzy graphs such as union, join, compositions and cartesian product. Complement of union two fuzzy graphs is join of their complement, join complement of two fuzzy graphs is union their complement. Complement of composition two strong fuzzy graphs is composition of their complement, but complement of cartesian product two stong fuzzy graphs is need not cartesian product of their complement.

Keywords : cartesian product, complement, compositions, fuzzy graphs, join

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu bidang bahasan matematika yang mempelajari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan garis [1], [5]. Himpunan kabur adalah suatu himpunan dimana nilai keanggotaan dari elemennya adalah bilangan riil dalam interval tertutup [0,1] [4]. Teori graf fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Azriel Rosenfeld pada tahun 1975 yang merupakan suatu perluasan dari teori graf dan himpunan kabur *(fuzzy set*). Seiring dengan perkembangan jaman maka konsep graf fuzzypun juga semakin berkembang.

Komplemen graf fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Mordeson yang kemudian disempurnakan oleh M.S. Sunitha dan Vijayakumar. Pada tulisan ini akan dibahas mengenai operasi gabungan, join, komposisi dan hasil kali Cartesian pada graf fuzzy kemudian akan diselidiki komplemennya.

2. GRAF FUZZY

Definisi 2.1. **[2]** *Misalkan V himpunan titik berhingga, suatu graf fuzzy yang dinotasikan dengan* $G:(V,\sigma,\mu)$ *atau disingkat* $G:(\sigma,\mu)$ *adalah sepasang fungsi dengan*

i. $\sigma:V\rightarrow[0,1]$

ii. $\mu:VxV\rightarrow[0,1]$

yang memenuhi

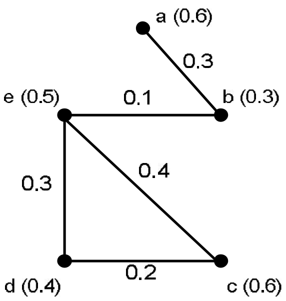
$$\mu(uv)\le\sigma(u)\wedge\sigma(v)\quad\forall u,v\in V.$$

Contoh 2.1 Misalkan diberikan graf fuzzy G dengan himpunan titik $V=\{a,b,c,d,e\}$ dan himpunan garis $E=\{(ab),(be),(cd),(ce),(de)\}$.

Derajat keanggotaan dari himpunan titiknya adalah

$\sigma(a)=0.6$, $\sigma(b)=0.3$, $\sigma(c)=0.6$, $\sigma(d)=0.4$, $\sigma(e)=0.5$ dan derajat keanggotaan dari himpunan garisnya adalah

$\mu(ab)=0.3$, $\mu(be)=0.1$, $\mu(cd)=0.2$
$\mu(ce)=0.5$, $\mu(de)=0.3$, maka graf fuzzy *G* tersebut :

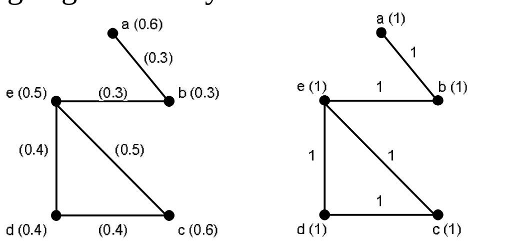


$G:(\sigma,\mu)$

Gambar 1. Graf fuzzy

Definisi 2.2 [2] *Suatu graf fuzzy* $G:(\sigma,\mu)$ *adalah graf fuzzy kuat jika* $\mu(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v), \forall(uv)\in \mu^*$.

Contoh 2.2 Misalkan diberikan graf fuzzy dengan graf dasarnya



$G:(\sigma,\mu)$ $\quad$ $G^*:(\sigma^*,\mu^*)$

Gambar 2. Graf fuzzy G dan graf dasarnya

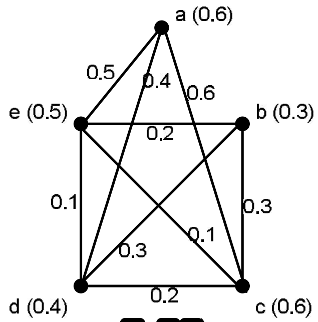
maka graf fuzzy tersebut merupakan graf fuzzy kuat karena $\mu(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v), \forall(uv)\in \mu^*$.

Definisi 2.3 [3] *Komplemen dari suatu graf fuzzy* $G:(\sigma,\mu)$ *adalah suatu graf fuzzy yang dinotasikan* $\overline{G}:(\overline{\sigma},\overline{\mu})$*,dimana*

i. $\overline{\sigma}=\sigma$ *dan*

ii. $\overline{\mu}(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)-\mu(uv)\forall u,v\in V$

Contoh 2.3 Misalkan diberikan graf fuzzy pada Contoh 2.1 maka komplemen dari graf fuzzy tersebut adalah :



$\overline{G}:(\overline{\sigma},\overline{\mu})$

Gambar 3. Komplemen dari garf fuzzy G

3. OPERASI GABUNGAN, JOIN, KOMPOSISI DAN HASIL KALI KARTESIAN PADA GRAF FUZZY

Definisi 3.1 [3] *Misalkan* $G_1:(\sigma_1,\mu_1)$ *dan* $G_2:(\sigma_2,\mu_2)$ *adalah dua graf fuzzy dengan* $G_1^*:(V_1,E_1)$ *dan* $G_2^*:(V_2,E_2)$ *dan* $V_1\cap V_2=\phi$.

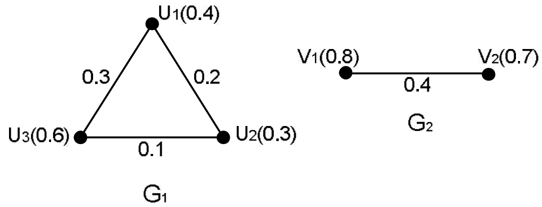
Misalkan $G^*=G_1^*\cup G_2^*=(V_1\cup V_2,E_1\cup E_2)$ *merupakan gabungan dari* G_1^* *dan* G_2^*, *maka gabungan dari graf fuzzy* G_1 *dan* G_2 *adalah sebuah graf fuzzy* $G=G_1\cup G_2:(\sigma_1\cup\sigma_2,\mu_1\cup\mu_2)$ *dengan*

$$(\sigma_1\cup\sigma_2)(u)=\begin{cases}\sigma_1(u)\,jika\ u\in V_1\\ \sigma_2(u)\,jika\ u\in V_2\end{cases}$$

dan

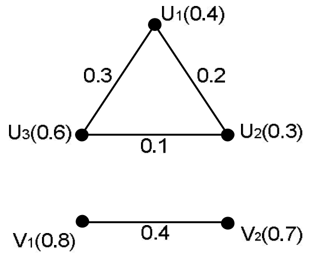
$$(\mu_1\cup\mu_2)(uv)=\begin{cases}\mu_1(uv)\,jika\ uv\in E_1\\ \mu_2(uv)\,jika\ uv\in E_2\end{cases}$$

Contoh 3.1 Misalkan diberikan graf fuzzy $G_1:(\sigma_1,\mu_1)$ dan $G_2:(\sigma_2,\mu_2)$:



Gambar 4. Graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

Sehingga gabungan dari graf fuzzy $G_1:(\sigma_1,\mu_1)$ dan $G_2:(\sigma_2,\mu_2)$ adalah



$G_1 \cup G_2$

Gambar 5. Gabungan dari graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

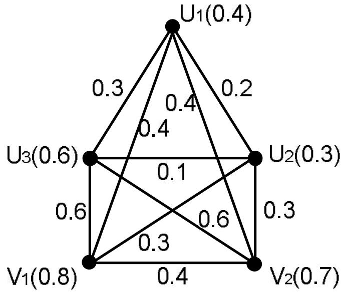
Definisi 3.2 [3] *Misalkan* $G_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ *dan* $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ *adalah dua graf fuzzy dengan* $G_1^* : (V_1, E_1)$, $G_2^* : (V_2, E_2)$ *dan* $V_1 \cap V_2 = \phi$. *Misalkan* $G^* = G_1^* + G_2^* = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E')$ *dimana* E' *adalah himpunan semua garis yang menghubungkan semua titik dari* V_1 *dan* V_2 . *Maka join dari graf fuzzy* G_1 *dan* G_2 *adalah sebuah graf fuzzy* $G = G_1 + G_2 : (\sigma_1 + \sigma_2, \mu_1 + \mu_2)$ *dengan*

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \quad jika\ u \in V_1 \cup V_2$$

dan

$$(\mu_1 + \mu_2)(uv) = \begin{cases} (\mu_1 \cup \mu_2)(uv)\, jika\ uv \in E_1 \cup E_2 \\ \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \quad jika\ uv \in E' \end{cases}$$

Contoh 3.2 Misalkan diberikan graf fuzzy $G_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ pada Contoh 3.1 sehingga join dari kedua graf fuzzy tersebut adalah :



$G_1 + G_2$

Gambar 6. Join dari graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

Teorema 3.1 [3] *Misalkan* $G_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ *dan* $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ *merupakan 2 graf fuzzy, maka :*

1) $\overline{G_1 + G_2} = \overline{G_1} \cup \overline{G_2}$
2) $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$

Bukti :

1) Akan dibuktikan bahwa $\overline{G_1 + G_2} = \overline{G_1} \cup \overline{G_2}$, akan dibuktikan $\overline{\sigma_1 + \sigma_2}(u) = (\overline{\sigma_1} \cup \overline{\sigma_2})(u)$ dan $\overline{\mu_1 + \mu_2}(uv) = \overline{\mu_1} \cup \overline{\mu_2}(uv)$:

(i). $\overline{\sigma_1 + \sigma_2}(u) = (\sigma_1 + \sigma_2)(u)$, dengan definisi dari komplemen

$$= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)\ jika\ u \in V_1 \cup V_2$$

$$= \begin{cases} \sigma_1(u),\ jika\ u \in V_1 \\ \sigma_2(u),\ jika\ u \in V_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overline{\sigma_1}(u),\ jika\ u \in V_1 \\ \overline{\sigma_2}(u),\ jika\ u \in V_2 \end{cases}$$

$$= (\overline{\sigma_1} \cup \overline{\sigma_2})(u)$$

Sehingga $\overline{\sigma_1 + \sigma_2}(u) = (\overline{\sigma_1} \cup \overline{\sigma_2})(u)$

(ii). $\overline{(\mu_1 + \mu_2)}(uv) =$

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 + \sigma_2)(v) - (\mu_1 + \mu_2)(uv)$$

$$= \begin{cases} (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v) - (\mu_1 \cup \mu_2)(uv), \\ jika\ uv \in (E_1 \cup E_2) \\ (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v) - (\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)), \\ jika\ uv \in E' \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v) - \mu_1(uv), \\ jika\ uv \in E_1 \\ \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) - \mu_2(uv), \\ jika\ uv \in E_2 \\ \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) - (\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)), \\ jika\ uv \in E'\, dan\ u \in V_1, v \in V_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overline{\mu_1}(uv), \, jika \; uv \in E_1 \\ \overline{\mu_2}(uv), \, jika \; uv \in E_2 \\ \qquad 0 \end{cases}$$

$$= \overline{\mu_1} \cup \overline{\mu_2}(uv)$$

Sehingga $\overline{\mu_1 + \mu_2}(uv) = \overline{\mu_1} \cup \overline{\mu_2}(uv)$

Dari (i) dan (ii) terbukti $\overline{G_1 + G_2} = \overline{G_1} \cup \overline{G_2}$

2) Akan dibuktikan bahwa $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$, yaitu ditunjukkan $\overline{\sigma_1 \cup \sigma_2}(u) = (\overline{\sigma_1} + \overline{\sigma_2})(u)$ dan $\overline{\mu_1 \cup \mu_2}(uv) = (\overline{\mu_1} + \overline{\mu_2})(uv)$,

(i). $\overline{\sigma_1 \cup \sigma_2}(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$ dengan definisi komplemen

$$= \begin{cases} \sigma_1(u), \, jika \; u \in V_1 \\ \sigma_2(u), \, jika \; u \in V_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overline{\sigma_1}(u), \, jika \; u \in V_1 \\ \overline{\sigma_2}(u), \, jika \; u \in V_2 \end{cases}$$

$$= (\overline{\sigma_1} \cup \overline{\sigma_2})(u)$$

$$= (\overline{\sigma_1} + \overline{\sigma_2})(u)$$

Sehingga $\overline{\sigma_1 \cup \sigma_2}(u) = (\overline{\sigma_1} + \overline{\sigma_2})(u)$

(ii). $\overline{\mu_1 \cup \mu_2}(uv)$
$= (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v) - (\mu_1 \cup \mu_2)(uv)$

$$= \begin{cases} \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v) - \mu_1(uv), \\ \quad jika \; uv \in E_1 \\ \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) - \mu_2(uv), \\ \quad jika \; uv \in E_2 \\ \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v) - 0, \\ jika \; u \in V_1, v \in V_2 dan \;\; uv \in E' \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \overline{\mu_1}(uv), \\ jika \quad uv \in E_1 \\ \overline{\mu_2}(uv), \\ jika \quad uv \in E_2 \\ \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v), \\ jika \; u \in V_1, v \in V_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\overline{\mu_1} \cup \overline{\mu_2})(uv), \, jika \quad uv \in E_1 \cup E_2 \\ \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v), \, jika(uv) \in E' \end{cases}$$

$$= (\overline{\mu_1} + \overline{\mu_2})(uv)$$

Sehingga $\overline{\mu_1 \cup \mu_2}(uv) = (\overline{\mu_1} + \overline{\mu_2})(uv)$

Dari (i) dan (ii) terbukti $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$.

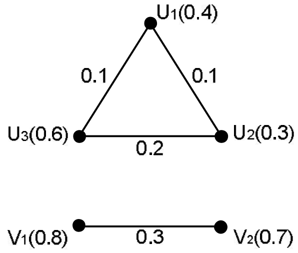
Dari 1 dan 2 terbukti bahwa komplemen dari join 2 graf fuzzy merupakan gabungan dari komplemennya dan komplemen dari gabungan 2 graf fuzzy merupakan join dari gabungannya .

Contoh 3.3 Misalkan diberikan graf fuzzy $G_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ pada Contoh 3.1

1) Akan ditunjukkan bahwa $\overline{G_1 + G_2} = \overline{G_1} \cup \overline{G_2}$,

(i). $G_1 + G_2$
Gambar join dari dua graf fuzzy diatas dapat dilihat pada Gambar 6 di Contoh 3.2, sehingga

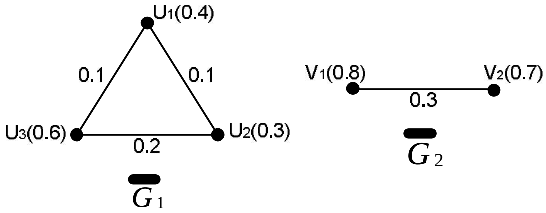
$\overline{G_1 + G_2} =$



$\overline{G_1 + G_2}$

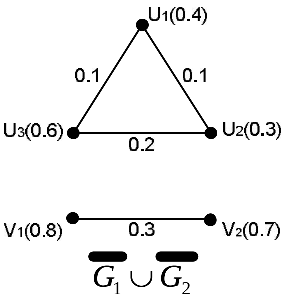
Gambar 7. Komplemen dari join graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

(ii). $\overline{G_1}$ dan $\overline{G_2}$



Gambar 8. Komplemen dari graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

$\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$ =



Gambar 9. gabungan dari komplemen graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

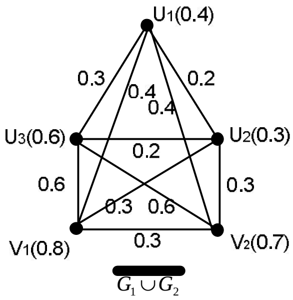
Sehingga dari (i) dan (ii) diperoleh
$\overline{G_1 + G_2} = \overline{G_1} \cup \overline{G_2}$

2) Akan ditunjukkan bahwa
$\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$,

(i). $G_1 \cup G_2$

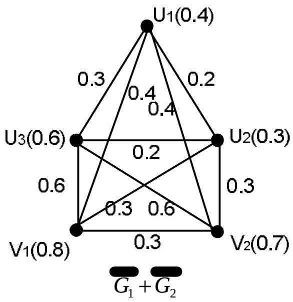
Gambar gabungan dari dua graf fuzzy diatas dapat dilihat pada Gambar 5 di Contoh 3.1, sehingga

$\overline{G_1 \cup G_2}$ =



Gambar 11. komplemen dari gabungan graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

(ii). Gambar komplemen G_1 dan komplemen G_2 dari dua graf fuzzy diatas dapat dilihat pada Gambar 11, sehingga
$\overline{G_1} + \overline{G_2}$ =



Gambar 12. Join dari komplemen graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

Sehingga dari (i) dan (ii) diperoleh $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$.

Sehingga dari 1 dan 2 terbukti bahwa komplemen dari join 2 graf fuzzy merupakan gabungan dari komplemennya dan komplemen dari gabungan 2 graf fuzzy merupakan join dari gabungannya .

Definisi 3.3. [3] *Misalkan* $G_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ *dan* $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ *adalah dua graf fuzzy dengan* $G_1^* : (V_1, E_1)$, $G_2^* : (V_2, E_2)$ *dan* $V_1 \cap V_2 = \phi$ *dan misalkan* $G^* = G_1^* \circ G_2^* = (V_1 \times V_2, E)$ *adalah komposisi dari dua graf, dimana*

$$E = \{(u,u_2)(u,v_2) : \forall u \in V_1, \forall u_2v_2 \in E_2\}$$
$$\cup \{(u_1,w)(v_1,w) : \forall w \in V_2, \forall u_1v_1E_1\}$$
$$\cup \{(u_1,u_2)(v_1,v_2) : u_1v_1 \in E_1, u_2 \neq v_2\}$$

Maka komposisi dari graf fuzzy $G = G_1 \circ G_2 = (\sigma_1 \circ \sigma_2, \mu_1 \circ \mu_2)$ adalah graf fuzzy yang di definisikan oleh :

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(u_1,u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2),\ \forall (u_1,u_2) \in V_1 \times V_2$$

dan

$$(\mu_1 \circ \mu_2)((u,u_2)(u,v_2)) = \sigma_1(u) \wedge \mu_2(u_2v_2),\ \forall u \in V_1,\ \forall u_2v_2 \in E_2 \quad ;$$

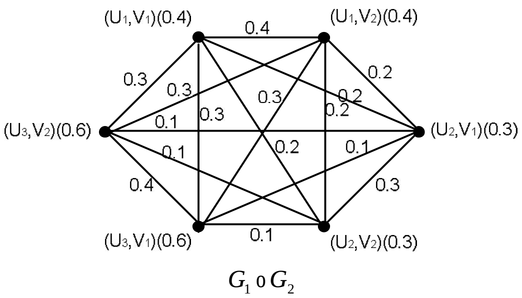
$$(\mu_1 \circ \mu_2)((u_1,w)(v_1,w)) = \sigma_2(w) \wedge \mu_1(u_1v_1),\ \forall w \in V_2,\ \forall u_1v_1 \in E_1 \quad ;$$

$$(\mu_1 \circ \mu_2)((u_1,u_2)(v_1,v_2)) = \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1v_1),\ \forall (u_1,u_2)(v_1,v_2) \in E - E''$$

dimana

$$E'' = \{(u,u_2)(u,v_2) : \forall u \in V_1,\ \forall u_2v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1,w)(v_1,w) : \forall w \in V_2,\ \forall u_1v_1 \in E_1\}$$

Contoh 3.4 Misalkan diberikan graf fuzzy $G_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ pada Contoh 3.1 sehingga komposisi dari kedua graf fuzzy tersebut adalah :



$G_1 \circ G_2$

Gambar 13. Komposisi dari graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

Teorma 3.2. [3] *Misalkan $G_1(\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2(\sigma_2, \mu_2)$ adalah dua graf fuzzy kuat maka $\overline{G_1 \circ G_2} = \overline{G_1} \circ \overline{G_2}$.*

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa $\overline{G_1 \circ G_2} = \overline{G_1} \circ \overline{G_2}$,

Misalkan $G = G_1 \circ G_2 = G : (\sigma, \mu)$ dimana $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2, \mu = \mu_1 \circ \mu_2$

$\overline{G} : (\sigma, \overline{\mu}) = \overline{G_1 \circ G_2}$, dimana

$\overline{\mu} = \overline{\mu_1 \circ \mu_2}$ *dan* $\overline{G^*} = (V, \overline{E})$

$\overline{G_1} : (\sigma_1, \overline{\mu_1}) = \overline{G_1^*} = (V_1, \overline{E_1})$;

$\overline{G_2} : (\sigma_2, \overline{\mu_2}) = \overline{G_2^*} = (V_2, \overline{E_2})$;

dan

$\overline{G_1} \circ \overline{G_2} : (\sigma_1 \circ \sigma_2, \overline{\mu_1} \circ \overline{\mu_2})$

Untuk pembuktian di bawah ini garis yang menghubungkan dua titik di notasikan dengan e.

Untuk membuktikan $\overline{\mu_1 \circ \mu_2} = \overline{\mu_1} \circ \overline{\mu_2}$ dibuktikan dalam beberapa kasus

Kasus 1.

$e = (u,u_2)(u,v_2), u_2v_2 \in E_2$

karena $e \in E$ dan G graf fuzzy kuat maka $\overline{\mu}(e) = 0$. Juga $(\overline{\mu_1} \circ \overline{\mu_2})(e) = 0$

karena $u_2v_2 \notin \overline{E_2}$.

sehingga $(\overline{\mu_1 \circ \mu_2})(e) = (\overline{\mu_1} \circ \overline{\mu_2})(e)$

Kasus 2.

$e = (u,u_2)(u,v_2), u_2v_2 \notin E_2$

karena $e \notin E$, sehingga $\mu(e) = 0$,

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(e) &= \sigma(u,u_2) \wedge \sigma(u,v_2) - \mu(e) \\
&= \sigma(u,u_2) \wedge \sigma(u,v_2) - 0 \\
&= \sigma(u,u_2) \wedge \sigma(u,v_2) \\
&= (\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(u_2)) \wedge (\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v_2)) \\
&= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2),
\end{aligned}$$

dan karena $u_2v_2 \in \overline{E_2}$, maka

$$\begin{aligned}
(\overline{\mu_1} \circ \overline{\mu_2})(e) &= \sigma_1(u) \wedge \overline{\mu_2}(u_2v_2) \\
&= \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \\
&= \overline{\mu}(e)
\end{aligned}$$

sehingga $(\overline{\mu_1 \circ \mu_2})(e) = (\overline{\mu_1} \circ \overline{\mu_2})(e)$

Kasus 3.

$e = (u_1,w)(v_1,w), u_1v_1 \in E_1$

karena $e \in E$, maka $\overline{\mu}(e) = 0$.

Kemudian, karena $u_1v_1 \notin \overline{E_1}$ maka $(\overline{\mu_1} \circ \overline{\mu_2})(e) = 0$,

sehingga $(\overline{\mu_1 \circ \mu_2})(e) = (\overline{\mu_1} \circ \overline{\mu_2})(e)$

Kasus 4.

$e=(u_1,w)(v_1,w), u_1v_1 \notin E_1$

karena $e \notin E$, maka $\mu(e)=0$ dan

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(e) &= \sigma(u_1,w)\wedge\sigma(v_1,w)-\mu(e)\\ &= \sigma(u_1,w)\wedge\sigma(v_1,w)-0\\ &= \sigma(u_1,w)\wedge\sigma(v_1,w)\\ &= \sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(v_1)\wedge\sigma_2(w),\end{aligned}$$

dan karena $u_1v_1 \in \overline{E_1}$ di dapat

sehingga $\overline{(\mu_1 \circ \mu_2)}(e)=(\overline{\mu_1}\circ\overline{\mu_2})(e)$

$$\begin{aligned}\overline{\mu_1}\circ\overline{\mu_2}(e) &= \sigma_2(w)\wedge\overline{\mu_1}(u_1v_1)\\ &= \sigma_2(w)\wedge\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(v_1),\\ &= \overline{\mu}(e)\end{aligned}$$

Kasus 5.

$e=(u_1,u_2)(v_1,v_2), u_1v_1 \in E_1 \; dan \; u_2 \neq v_2$

karena $e \in E$, maka $\overline{\mu}(e)=0$,

Kemudian, karena $u_1v_1 \notin \overline{E_1}$ maka $(\overline{\mu_1}\circ\overline{\mu_2})(e)=0$,

sehingga $\overline{(\mu_1 \circ \mu_2)}(e)=(\overline{\mu_1}\circ\overline{\mu_2})(e)$

Kasus 6.

$e=(u_1,u_2)(v_1,v_2), u_1v_1 \notin E_1 \; dan \; u_2 \neq v_2$

karena $e \notin E$, maka $\mu(e)=0$

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(e) &= \sigma(u_1,u_2)\wedge\sigma(v_1,v_2)-\mu(e)\\ &= \sigma(u_1,u_2)\wedge\sigma(v_1,v_2)-0\\ &= \sigma(u_1,u_2)\wedge\sigma(v_1,v_2)\\ &= \sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(v_1)\wedge\sigma_2(u_2)\wedge\sigma_2(v_2)\end{aligned}$$

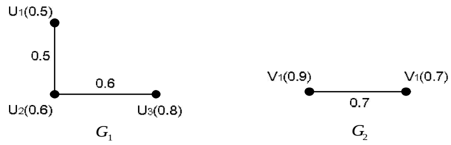
dan karena $u_1v_1 \in \overline{E_1}$, di dapat

$$\begin{aligned}\overline{\mu_1}\circ\overline{\mu_2} &= \overline{\mu}(u_1v_1)\wedge\sigma_2(u_2)\wedge\sigma_2(v_2)\\ &= \sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(v_1)\wedge\sigma_2(u_2)\wedge\sigma_2(v_2),\\ &= \overline{\mu}(e)\end{aligned}$$

sehingga $\overline{(\mu_1 \circ \mu_2)}(e)=(\overline{\mu_1}\circ\overline{\mu_2})(e)$

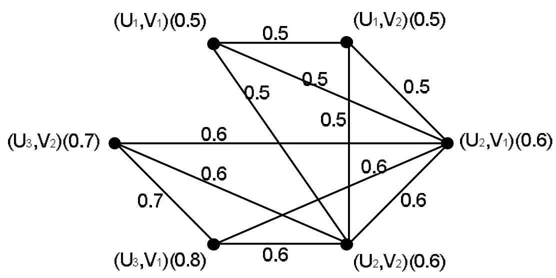
Dari kasus 1 sampai kasus 6, ini membuktikan bahwa $\overline{G_1 \circ G_2}=\overline{G_1}\circ\overline{G_2}$.

Contoh 3.6 Misalkan diberikan dua graf G_1 dan G_2 yang merupakan graf fuzzy kuat , yaitu :



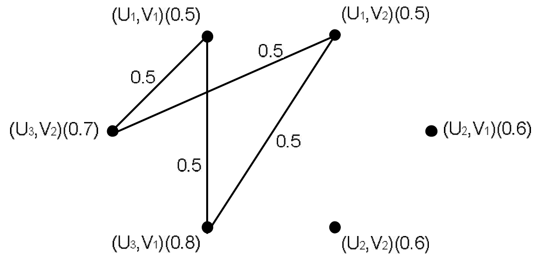
Gambar 14. Graf fuzzy kuat G_1 dan Graf fuzzy kuat G_2

maka,



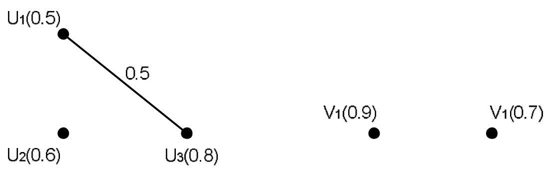
$G_1 \circ G_2$

Gambar 15. Komposisi dari graf fuzzy kuat G_1 dan graf fuzzy kuat G_2



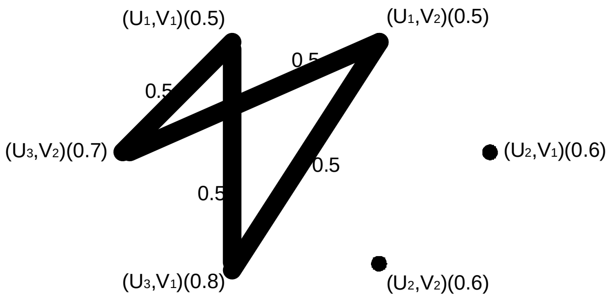
$\overline{G_1 \circ G_2}$

Gambar 16. komplemen dari komposisi dua graf fuzzy kuat



$\overline{G_1}$ $\overline{G_2}$

Gambar 17. Komplemen dari graf fuzzy kuat G_1 graf fuzzy kuat G_2



$\overline{G_1}\, 0\, \overline{G_2}$

Gambar 18. Komposisi dari komplemen 2 graf fuzzy kuat

Sehingga didapat bahwa jika G_1 dan G_2 merupakan graf fuzzy kuat maka $\overline{G_1\, 0\, G_2} = \overline{G_1}\, 0\, \overline{G_2}$,

Definisi 3.4 [3] *Misalkan* $G_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ *dan* $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ *adalah dua graf fuzzy dengan* $G_1^* : (V_1, E_1)$, $G_2^* : (V_2, E_2)$ *dan* $V_1 \cap V_2 = \phi$. *Misalkan* $G^* = G_1^* \times G_2^* = (V, E'')$ *adalah cartesian product dari dua graf dimana* $V = V_1 \times V_2$ *dan*

$$E'' = \{(u, u_2)(u, v_2) : \forall u \in V_1, \forall u_2 v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1, w)(v_1, w) : \forall w \in V_2, \forall u_1 v_1 \in E_1\}$$

.

maka cartesian product dari $G = G_1 \times G_2 : (\sigma_1 \times \sigma_2\ , \mu_1 \times \mu_2)$ *adalah graf fuzzy yang di definisikan oleh :*

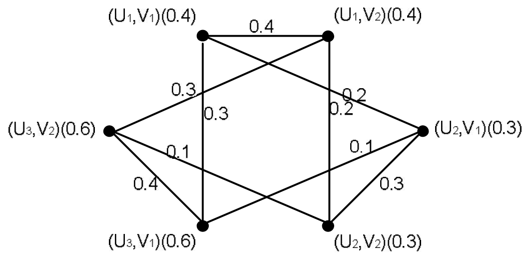
$$(\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2) \quad \forall (u_1, u_2) \in V$$

dan

$$\mu_1 \times \mu_2((u, u_2)(u, v_2)) = \sigma_1(u) \wedge \mu_2(u_2 v_2), \forall u \in V_1, \forall u_2 v_2 \in E_2$$

$$\mu_1 \times \mu_2((u_1, w)(v_1, w)) = \sigma_2(w) \wedge \mu_1(u_1 v_1), \forall w \in V_2, \forall u_1 v_1 \in E_1$$

Cotoh 3.7 Misalkan diberikan graf fuzzy $G_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ pada Contoh 3.1, sehingga *Cartesian product* dari kedua graf fuzzy tersebut adalah :

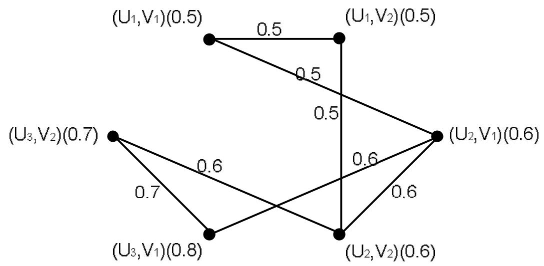


$G_1 \times G_2$

Gambar 19. *Cartesian product* dari graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

Misalkan $G_1(\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2(\sigma_2, \mu_2)$ adalah dua graf fuzzy kuat, maka tidak selalu berlaku $\overline{G_1 \times G_2} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$.

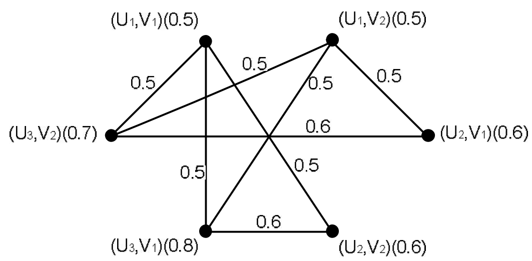
Contoh 3.8 Misalkan di berikan graf fuzzy kuat $G_1(\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2(\sigma_2, \mu_2)$ pada Contoh 3.6 pada Gambar 14 , maka *cartesian product*-nya adalah



$G_1 \times G_2$

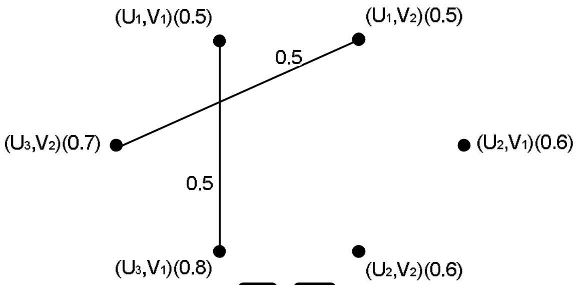
Gambar 20. *Cartesian product* dari graf fuzzy G_1 dan graf fuzzy G_2

Akan ditunjukkan bahwa jika $G_1(\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2(\sigma_2, \mu_2)$ adalah dua graf fuzzy kuat, tidak selalu berlaku $\overline{G_1 \times G_2} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$,



$\overline{G_1 \times G_2}$

Gambar 21. Komplemen dari Cartesian product dua graf fuzzy kuat berdasarkan komplemen graf fuzzy kuat G_1 dan graf fuzzy kuat G_2 pada Gambar 21, maka diperoleh :



$\overline{G_1} \times \overline{G_2}$

Gambar 22. *Cartesian product* dari komplemen dua graf fuzzy kuat G_1 dan graf fuzzy kuat G_2

Sehingga didapat bahwa jika $G_1(\sigma_1, \mu_1)$ dan $G_2(\sigma_2, \mu_2)$ adalah dua graf fuzzy kuat, maka tidak selalu berlaku $\overline{G_1 \times G_2} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$.

4. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan diperoleh:

1. Komplemen dari gabungan dua graf fuzzy adalah join dari komplemennya.
2. Komplemen dari join dua graf fuzzy adalah gabungan dari komplemennya. Komplemen dari komposisi dua graf fuzzy kuat adalah komposisi dari komplemennya.
3. Jika terdapat dua graf fuzzy kuat, tidak selalu berlaku komplemen dari hasil kali Cartesian dua graf fuzzy adalah hasil kali Cartesian dari komplemennya.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G dan L. Lesniak., (1996), *Graphs & Digraphs.* New York : Drew University

[2] Mordeson, J.N, & Nair , P., (2000), *Fuzzy graphs and Fuzzy hypergraphs*. Physica-Verlag : New York.

[3] Sunita, M.S dan A. Vijaya Kumar, (2002), *Complement of A Fuzzy Graph*. Indian J. Pure Applied Mathematical, 33:9 hal 1451 – 1464.

[4] Susilo, F., (2006), . *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

[5] Wilson, J. et. al., (1990), *Graphs An Introductory Approach*. New York : University Course Graphs, Network, and Design.