TEOREMA INTERPOLASI UNTUK LOGIKA PREDIKAT NON-KOMUTATIF FL DAN $\mathbf{FL_w}$

Bayu Surarso
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. In 1961 Maehara introduced a proof-theoretical method to prove the interpolation theorem for standard logics. By developing Maehara's method, we can prove interpolation theorem for some non-standard logics, including the commutative predicate logics $\mathbf{Fl_e}$ dan $\mathbf{Fl_{e,w}}$. In the present paper we show that by modifying Maehara's method we can also prove the interpolation theorem for non-commutative predicate logics **FL** and $\mathbf{FL_w}$.

Keywords: *Interpolation Theorem, Maehara's Method, FL.*

1. PENDAHULUAN

Pembahasan masalah interpolasi melalui pendekatan sintaktik dipelopori salah satunya oleh Maehara pada [5], pada tulisan tersebut, dengan memanfaatkan teorema eliminasi cut teorema interpolasi dibuktikan berlaku pada logika intuisionistik. Metode yang digunakannya pada pembuktian teorema interpolasi tersebut kemudian dikenal sabagai metode Maehara.

Dengan melakukan beberapa modifikasi terhadap metoda Maehara, penulis telah membuktikan teorema interpolasi untuk beberapa logika implikasional dan proposisional, antara lain teorema interpolasi untuk logika relevan positip R+, teorema interpolasi untuk beberapa perluasan dari logika implikasi BB'I dan untuk logika proposisi L_{DBCC} dan L_{DBCK} (Lihat [1], [2], dan [3]).

Pada [4] penulis dan Marti Lestari mengembangkan metode Maehara untuk membuktikan teorema interpolasi pada logika predikat komutatif $\mathbf{Fl_e}$, $\mathbf{Fl_{ec}}$ dan $\mathbf{Fl_{e,w}}$. Dipihak lain metode Maehara tidak dapat untuk membuktikan teorema interpolasi pada logika predikat non-komutatif seperti **Fl** dan $\mathbf{Fl_w}$, hal ini disebabkan karena tidak adanya aturan *exchange* pada logika tersebut. Pada tulisan ini ditunjukkan bahwa kegagalan metoda Maehara tersebut dapat diatasi dengan memodifikasi konsep partisi padanya.

2. TEOREMA INTERPOLASI

Untuk selanjutnya, notasi, simbol dan konsep yang digunakan pada tulisan ini merujuk pada [4]. Logika predikat **FL** dan $\mathbf{Fl_w}$ didefinisikan berturut-turut sebagai logika yang diperoleh dari logika predikat komutatif $\mathbf{Fl_e}$ dan $\mathbf{Fl_{e,w}}$ dengan menghilangkan aturan *exchang*e.

Teorema interpolasi menyatakan suatu sifat sebagai berikut: Misalkan *formula* $A \supset B$ terbukti, maka ada suatu *formula* C, disebut *interpolant*, sedemikian sehingga:

1. $A \supset C$ dan $C \supset B$ keduanya terbukti.
2. $V(C) \subset [V(A) \cap V(B)]$.

Untuk membuktikan bahwa teorema tersebut berlaku untuk logika predikat komutatif $\mathbf{Fl_e}$, $\mathbf{Fl_{ec}}$ dan $\mathbf{Fl_{e,w}}$, pada [4] metode Maehara dikembangkan sebagai berikut: Pertama didefinisikan partisi dari suatu barisan *formula* Γ sebagai berikut:

Definisi 1. *Misalkan* Γ_1 *adalah barisan dari beberapa formula yang terdapat dalam* Γ *dan misalkan* Γ_2 *adalah barisan dari semua formula yang terdapat dalam* Γ *kecuali yang terdapat dalam* Γ_1. *Maka* $([\Gamma_1],[\Gamma_2])$ *adalah suatu partisi dari* Γ.

Kemudian, teorema interpolasi dibuktikan dengan membuktikan sifat yang lebih umum sebagai berikut:

Teorema 2. *Misalkan* $\Gamma \to D$ *suatu sequent yang terbukti, dan misalkan* $([\Gamma_1],[\Gamma_2])$ *sembarang partisi dari* Γ. *Maka ada formula* C, *disebut interpolant dari* $\Gamma \to D$ *sedemikian sehingga:*

1. $\Gamma_1 \to C$ *dan* $C, \Gamma_2 \to D$ *keduanya terbukti*

2. $V(C) \subset V(\Gamma_1) \cap [V(\Gamma_2) \cup V(D)]$

dimana ekspresi $V(\Gamma)$ *menyatakan himpunan variabel proposisional yang terdapat dalam* Γ.

Pernyataan ini dibuktikan dengan menggunakan induksi pada banyaknya kemunculan aturan inferensi k yang muncul dalam bukti **P** tanpa cut dari $\Gamma \to D$. Sebagai contoh, pada kasus k>0 dan aturan inferensi terakhir adalah $(\supset\to)$. Pada kasus ini bagian bawah dari bukti **P** dari *sequent* $\Gamma \to D$ berbentuk:

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta, B, \Sigma \to D}{\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma \to D} (\supset\to),$$

kasus ini dibagi menjadi 2 subkasus, yaitu

a. Partisi dari $\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma$ berbentuk $[\Delta_1, A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_1],[\Delta_2, \Gamma_2, \Sigma_2])$, dengan $\Delta = \Delta_1, \Delta_2$, $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$, dan $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2$.

Pada subkasus ini perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kiri atas, $\Gamma_1, \Gamma_2 \to A$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C_1 sedemikian sehingga

1a. $\Gamma_2 \to C_1$ dan $C_1, \Gamma_1 \to A$ keduanya terbukti.

2a. $V(C_1) \subset V(\Gamma_2) \cap [V(\Gamma_1) \cup V(A)]$.

Kemudian perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kanan atas, $\Delta_1, \Delta_2, B, \Sigma_1, \Sigma_2 \to D$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C_2 sedemikian sehingga

1b. $\Delta_1, B, \Sigma_1 \to C_2$ dan $C_2, \Delta_2, \Sigma_2 \to D$ keduanya terbukti.

2b. $V(C_2) \subset V(\Delta_1, B, \Sigma_1) \cap [V(\Delta_2, \Sigma_2) \cup V(D)]$

Dari 1a. dan 1b., *sequent* $C_1, \Gamma_1 \to A$ dan $\Delta_1, B, \Sigma_1 \to C_2$ terbukti. Dengan menggunakan aplikasi $(\supset\to)$ pada kedua *sequent* tersebut dilanjutkan dengan beberapa aplikasi aturan *exchange* dan sebuah $(\to\supset)$ dapat diperoleh bukti dari *sequent* $\Delta_1, A \supset B, \Gamma_1, \Sigma \to C_1 \supset C_2$. Sedangkan dari terbuktinya $\Gamma_2 \to C_1$ dan $C_2, \Delta_2, \Sigma_2 \to D$ dengan menggunakan aplikasi $(\supset\to)$ pada kedua *sequent* tersebut dilanjutkan dengan beberapa aplikasi aturan *exchange* dapat diperoleh bukti dari $C_1 \supset C_2, \Delta_2, \Gamma_2, \Sigma_2 \to D$.

Dari 2a. dan 2b., dengan sifat komutatif dari operasi $\cup$ dapat diperoleh sifat $V(C_1 \supset C_2) \subset V(\Delta_1, A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_1) \cap [V(\Delta_2, \Gamma_2, \Sigma_2) \cup V(D)]$

Sehingga pada subkasus ini $C = C_1 \supset C_2$ merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

b. Partisi dari $\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma$ berbentuk $([\Delta_1, \Gamma_1, \Sigma_1],[\Delta_2, A \supset B, \Gamma_2, \Sigma_2])$, dimana $\Delta = \Delta_1, \Delta_2$, $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$, dan $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2$.

Pada subkasus ini perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kiri atas, $\Gamma_1, \Gamma_2 \to A$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C_1 sedemikian sehingga

1a. $\Gamma_1 \to C_1$ dan $C_1, \Gamma_2 \to A$ keduanya terbukti.

2a. $V(C_1) \subset V(\Gamma_1) \cap [V(\Gamma_2) \cup V(A)]$.

Kemudian perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kanan atas, $\Delta_1, \Delta_2, B, \Sigma_1, \Sigma_2 \to D$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C_2 sedemikian sehingga

1b. $\Delta_1, \Sigma_1 \to C_2$ dan $C_2, \Delta_2, B, \Sigma_2 \to D$ keduanya terbukti.

2b. $V(C_2) \subset V(\Delta_1, \Sigma_1) \cap [V(\Delta_2, B, \Sigma_2) \cup V(D)]$

Dari 1a. dan 1b., *sequent* $\Gamma_1 \to C_1$ dan $\Delta_1, \Sigma_1 \to C_2$ terbukti, maka dengan menggunakan aplikasi $(*\to)$ pada kedua *sequent* tersebut dilanjutkan dengan beberapa aplikasi aturan *exchange* dapat diperoleh bukti dari *sequent* $\Delta_1, \Gamma_1, \Sigma \to C_1 * C_2$. Sedangkan dari terbuktinya *sequent* $C_1\Gamma_2 \to A$ dan $C_2,\Delta_2,B,\Sigma_2 \to D$ dengan menggunakan aplikasi ($\supset\to$) pada kedua *sequent* tersebut dilanjutkan dengan beberapa aplikasi aturan *exchange* dan sebuah aplikasi ($*\to$) dapat diperoleh bukti dari *sequent* $C_1 * C_2,\Delta_2,A \supset B,\Gamma_2,\Sigma_2 \to D$.

Dari 2a. dan 2b., diperoleh sifat $V(C_1 * C_2) \subset V(\Delta_1, A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_1) \cap [V(\Delta_2,\Gamma_2,\Sigma_2) \cup V(D)]$

Sehingga pada subkasus ini $C = C_1 * C_2$ merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

Dengan terbuktinya Teorema 1 maka teorema interpolasi hanyalah sebagai akibat langsung saja, yaitu dengan memilih Γ sebagai barisan *formula* dengan satu anggota saja, $\Gamma_1 = \Gamma$ dan Γ_2 sebagai barisan kosong.

3. BUKTI TEOREMA INTERPOLASI PADA FL dan $\mathbf{FL_w}$

Pada logika predikat non-komutatif **FL** dan $\mathbf{FL_w}$ pengembangan metoda Maehara seperti pada [4] tidak bisa diterapkan, tidak adanya aturan *exchange* akan menimbulkan kesulitan dalam membuktikan berlakunya teorema interpolasi, terutama pada kasus k>0 dan aturan inferensi terakhir adalah ($\supset\to$). Untuk mengatasi kesulitan tersebut, pertama konsep partisi perlu diubah sebagai berikut:

Definisi 3. *Misalkan* $\Gamma = A_1,A_2,...,A_n$. *Misalkan pula* $\Gamma_1 = A_1,A_2,...,A_l$, $\Gamma_2 = A_{l+1},A_{l+2},...,A_m$ *dan* $\Gamma_3 = A_{m+1},A_{m+2},...,A_n$ *dengan* $0 \le l \le m \le n$, *maka* $([\Gamma_2],[\Gamma_1,\Gamma_3])$ *adalah suatu partisi* dari* Γ.

Contoh: $([A,C],[A,B,D,C])$ dan $([B,A,C,D],[A,C])$ adalah partisi* dari $\Sigma = A,B,A,C,D,C$, sedangkan $([C,A],[A,B,D,C])$ dan $([B,D],[A,A,C,C])$ bukanlah suatu partisi dari Σ.

Selanjutnya teorema interpolasi pada logika predikat **FL** dan $\mathbf{Fl_w}$ dibuktikan dengan membuktikan sifat berikut:

Teorema 4. *Misalkan* $\Gamma \to D$ *suatu sequent yang terbukti, dan misalkan* $([\Gamma_2],[\Gamma_1,\Gamma_3])$ *sembarang partisi* dari* Γ. *Maka ada formula* C, *disebut interpolant dari* $\Gamma \to D$ *sedemikian sehingga:*

1. $\Gamma_1 \to C$ *dan* $\Gamma_1 C,\Gamma_3 \to D$ *keduanya terbukti*

2. $V(C) \subset V(\Gamma_1) \cap [V(\Gamma_1,\Gamma_3) \cup V(D)]$.

Perhatikan bahwa sifat tersebut adalah suatu modifikasi dari Teorema 2. Seperti pada [4], sifat ini dibuktikan dengan menggunakan induksi pada banyaknya kemunculan aturan inferensi k yang muncul dalam bukti **P** tanpa cut dari $\Gamma \to D$. Pada tulisan ini, ditunjukkan bagaimana kesulitan pada kasus k>0 dan aturan inferensi terakhir adalah ($\supset\to$) dapat diatasi dan selanjutnya ditunjukkan pula bagaimana penyelesaian kasus k>0 dan $\Gamma \to D$ adalah *sequent* bawah dari aturan-aturan *quantifiers*.

- Kasus k>0 dan inferensi terakhir adalah ($\supset\to$).

Pada kasus ini bagian bawah dari bukti **P** dari *sequent* $\Gamma \to D$ berbentuk:

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta,B,\Sigma \to D}{\Delta,A \supset B,\Gamma,\Sigma \to D}(\supset\to),$$

kasus ini dibagi menjadi 6 subkasus, yaitu

a. Partisi* dari $\Delta,A \supset B,\Gamma,\Sigma$ berbentuk $([\Delta_2,A \supset B,\Gamma_1],[\Delta_1,\Gamma_2,\Sigma])$ dengan $\Gamma = \Gamma_1,\Gamma_2$ dan $\Delta = \Delta_1,\Delta_2$

Pada subkasus ini perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kiri atas, $\Gamma \to A$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C_1 sedemikian sehingga

1a. $\Gamma_2 \to C_1$ dan $\Gamma_1, C_1 \to A$ keduanya terbukti.

2a. $V(C_1) \subset V(\Gamma_2) \cap [V(\Gamma_1) \cup V(A)]$.

Kemudian perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kanan atas, $\Delta,B,\Sigma \to D$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C_2 sedemikian sehingga

1b. $\Delta_2,B \to C_2$ dan $\Delta_1,C_2,\Sigma \to D$ keduanya terbukti.

2b. $V(C_2) \subset V(\Delta_2, B) \cap [V(\Delta_1, \Sigma) \cup V(D)]$

Dari 1a. dan 1b., *sequent* $\Gamma_1, C_1 \to A$ dan $\Delta_2, B \to C_2$ terbukti, maka dengan menggunakan aplikasi ($\supset\to$) pada kedua *sequen*t tersebut dilanjutkan dengan satu aplikasi ($\to\supset$) dapat diperoleh bukti dari $\Delta_2, A \supset B, \Gamma_1 \to C_1 \supset C_2$ sebagai berikut

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1, C_1 \to A} \quad \dfrac{\vdots}{\Delta_2, B \to C_2}}{\Delta_2, A \supset B, \Gamma_1, C_1 \to C_2}(\supset\to)}{\Delta_2, A \supset B, \Gamma_1 \to C_1 \supset C_2}(\to\supset)$$

sedangkan dari terbuktinya $\Gamma_2 \to C_1$ dan $\Delta_1, C_2, \Sigma \to D$ dengan menggunakan aplikasi ($\supset\to$) pada kedua *sequent* tersebut dapat diperoleh bukti dari *sequent* $\Delta_1, C_1 \supset C_2, \Gamma_2, \Sigma \to D$ sebagai berikut

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_2 \to C_1} \quad \dfrac{\vdots}{\Delta_1, C_2, \Sigma \to D}}{\Delta_1, C_1 \supset C_2, \Gamma_2, \Sigma \to D}(\supset\to)$$

Dari 2a. dan 2b., dapat diperoleh sifat $V(C_1 \supset C_2) \subset V(\Delta_2, A \supset B, \Gamma_1) \cap [V(\Delta_1, \Gamma_2, \Sigma) \cup V(D)]$

Sehingga pada subkasus ini $C = C_1 \supset C_2$ merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

b. Partisi* dari $\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma$ berbentuk $([\Delta_2, A \supset B, \Gamma, \Sigma_1], [\Delta_1, \Sigma_2])$ dengan $\Delta = \Delta_1, \Delta_2$ dan $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2$

Pada subkasus ini perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kanan atas, $\Delta, B, \Sigma \to D$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C sedemikian sehingga

1. $\Delta_2, B, \Sigma_1 \to C$ dan $\Delta_1, C, \Sigma_2 \to D$ keduanya terbukti.
2. $V(C) \subset V(\Delta_2, B, \Sigma_1) \cap [V(\Delta_1, \Sigma_2) \cup V(D)]$

Dengan menggunakan aplikasi ($\supset\to$) pada $\Gamma \to A$ dan $\Delta_2, B, \Sigma_1 \to C$ dapat diperoleh bukti dari *sequent* $\Delta_2, A \supset B, \Gamma, \Sigma_1 \to C$ sebagai berikut

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathrm{T} \to A} \quad \dfrac{\vdots}{\Delta_2, B, \Sigma_1 \to C}}{\Delta_2, A \supset B, \Gamma, \Sigma_1 \to C}(\supset\to)$$

Dari 2, dapat diperoleh sifat $V(C) \subset V(\Delta_2, A \supset B, \Gamma, \Sigma_1) \cap [V(\Delta_1, \Sigma_2) \cup V(D)]$

Sehingga pada subkasus ini C merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

c. Partisi* dari $\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma$ berbentuk $([\Gamma_2, \Sigma_1], [\Delta, A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_2])$ dengan $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$ dan $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2$

Pada subkasus ini perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kiri atas, $\Gamma \to D$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C_1 sedemikian sehingga

1a. $\Gamma_2 \to C_1$ dan $\Gamma_1, C_1 \to A$ keduanya terbukti.

2a. $V(C_1) \subset V(\Gamma_2) \cap [V(\Gamma_1) \cup V(A)]$.

Kemudian perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kanan atas, $\Delta, B, \Sigma \to D$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C_2 sedemikian sehingga

1b. $\Sigma_1 \to C_2$ dan $\Delta, B, C_2, \Sigma_2 \to D$ keduanya terbukti.

2b. $V(C_2) \subset V(\Sigma_1) \cap [V(\Delta, B, \Sigma_2) \cup V(D)]$

Dari 1a. dan 1b., $\Gamma_2 \to C_1$ dan $\Sigma_1 \to C_2$ terbukti, maka dengan menggunakan aplikasi ($\to *$) pada kedua *sequent* tersebut dapat diperoleh bukti dari $\Gamma_1, \Sigma_1 \to C_1 * C_2$ sebagai berikut

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_2 \to C_1} \quad \dfrac{\vdots}{\Sigma_1 \to C_2}}{\Gamma_2, \Sigma_1 \to C_1 * C_2}(\to *)$$

sedangkan dari terbuktinya *sequent* $\Gamma_1, C_1 \to A$ dan $\Delta, B, C_2, \Sigma_2 \to D$ dengan menggunakan aplikasi ($\supset\to$) pada kedua *sequent* tersebut dilanjutkan dengan aplikasi ($* \to$), dapat diperoleh bukti dari $\Delta_1, A \supset B, \Gamma_1, C_1 \supset C_2, \Sigma_2 \to D$ sebagai berikut

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1, C_1 \to A} \qquad \dfrac{\vdots}{\Delta, B, C_2, \Sigma_2 \to D}}{\Delta, A \supset B, \Gamma_1, C_1, C_2, \Sigma_2 \to D}(\supset\to)}{\Delta, A \supset B, \Gamma_1, C_1 * C_2, \Sigma_2 \to D}(* \to)$$

Dari 2a. dan 2b., dapat diperoleh sifat $V(C_1 * C_2) \subset V(\Gamma_2, \Sigma_1) \cap [V(\Delta, A \supset B, \Gamma_1, \Sigma_2) \cup V(D)]$

Sehingga pada subkasus ini $C = C_1 * C_2$ merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

d. Partisi* dari $\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma$ berbentuk $([\Delta_2], [\Delta_1, \Delta_3, A \supset B, \Gamma, \Sigma])$ dengan $\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

Pada subkasus ini perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* kanan atas, $\Delta, B, \Sigma \to D$, berdasarkan induksi hipotesis ada *formula* C sedemikian sehingga

1. $\Delta_2 \to C$ dan $\Delta_1, C, \Delta_3, B, \Sigma \to D$ keduanya terbukti.
2. $V(C) \subset V(\Delta_2) \cap [V(\Delta_1, \Delta_3, B, \Sigma) \cup V(D)]$

Dengan menggunakan aplikasi $(\supset\to)$ pada *sequent* $\Gamma \to A$ dan $\Delta_1, C, \Delta_3, B, \Sigma \to D$ dapat diperoleh bukti dari *sequent* $\Delta_1, C, \Delta_3, A \supset B, \Gamma, \Sigma \to C$ sebagai berikut

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathrm{T} \to A} \qquad \dfrac{\vdots}{\Delta_1, C, \Delta_3, B, \Sigma \to D}}{\Delta_1, C, \Delta_3, A \supset B, \Gamma, \Sigma \to D}(\supset\to)$$

Dari 2, dapat diperoleh sifat $V(C) \subset V(\Delta_2) \cap [V(\Delta_1, \Delta_3, A \supset B, \Gamma, \Sigma) \cup V(D)]$

Sehingga pada subkasus ini C merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

e. Partisi* dari $\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma$ berbentuk $([\Gamma_2], [\Delta, A \supset B, \Gamma_1, \Gamma_3, \Sigma])$ dengan $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$

Interpolant dari $\Gamma \to D$ pada subkasus ini dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan cara pada subkasus **d.**

f. Partisi* dari $\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma$ berbentuk $([\Sigma_2], [\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma_1, \Sigma_3])$ dengan $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$

Interpolant dari $\Gamma \to D$ pada subkasus ini dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan cara pada subkasus **d.**

- Kasus k>0 dan inferensi terakhir adalah $(\to \exists)$. Pada kasus ini bukti **P** dari *sequent* $\Gamma \to D$ berbentuk:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \to A(t)}}{\Gamma \to \exists z A(z)}(\to \exists)$$

Perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* atas dari aturan inferensi $(\to \exists)$ tersebut, yaitu $\Gamma \to A(t)$. Dengan induksi hipotesis ada *formula* C sedemikian sehingga:

1. $\Gamma_2 \to C$ dan $\Gamma_1, C, \Gamma_3 \to A(t)$ keduanya terbukti.
2. $V(C) \subset V(\Gamma_2) \cap [V(\Gamma_1, \Gamma_3) \cup V(A(t))]$

Dari 1. *sequent* $\Gamma_1, C, \Gamma_3 \to \exists z A(z)$ dapat dibuktikan seperti berikut

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1, C, \Gamma_3 \to A(t)}}{\Gamma_1, C, \Gamma_3 \to \exists z A(z)}(\to \exists).$$

Sedangkan $V(A(t)) \subset V(\exists z A(z))$, maka dari 2. dapat diperoleh sifat $V(C) \subset V(\Gamma_2) \cap [V(\Gamma_1, \Gamma_3) \cup V(\exists z A(z))]$

Jadi pada kasus ini C merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

- Kasus k>0 dan inferensi terakhir adalah $(\exists \to)$. Pada kasus ini bukti P dari *sequent* $\Gamma \to D$ berbentuk:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, A(x), \Delta \to D}}{\Gamma, \exists z A(z), \Delta \to D}(\exists \to)$$

Kasus ini dibagi menjadi 3 kasus,

a. Partisi dari $\Gamma, \exists z A(z), \Delta$ berbentuk $([\Gamma_2, \exists z A(z), \Delta_1], [\Gamma_1, \Delta_2])$

Perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* atas aturan inferensi $(\exists \to)$ tersebut, yaitu $\Gamma, A(x), \Delta \to D$. Menurut induksi hipotesis ada *formula* C sedemikian sehingga:

1. $\Gamma_2, A(x), \Delta_1 \to C$ dan $\Gamma_1, C, \Delta_2 \to D$ keduanya terbukti.

2. $V(C) \subset V(\Gamma_2, A(x), \Delta_1) \cap [V(\Gamma_1, \Delta_2) \cup V(D)]$

Dari 1., $\Gamma_1, \exists z A(z), \Delta_1 \to C$ terbukti seperti berikut

$$\frac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_2, A(x), \Delta_1 \to C}}{\Gamma_2, \exists z A(z), \Delta_1 \to C}(\exists \to),$$

kemudian karena $V(A(x)) \subset V(\exists z A(z))$, maka dari 2. dapat diperoleh sifat berikut: $V(C) \subset V(\Gamma_2, \exists z A z, \Delta_1) \cap [V(\Gamma_1, \Delta_2) \cup V(D)]$.

Sehingga pada subkasus ini C merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

b. Partisi dari $\Gamma, \exists z A(z), \Delta$ berbentuk $([\Gamma_2], [\Gamma_1, \Gamma_3, \exists z A(z), \Delta_2])$

Perhatikan bagian dari **P** yang merupakan bukti dari *sequent* atas aturan inferensi $(\exists \to)$ tersebut, yaitu $\Gamma, A(x), \Delta \to D$, menurut induksi hipotesis ada *formula* C sedemikian sehingga:

1. $\Gamma_2 \to C$ dan $\Gamma_1, C, \Gamma_3, A(x), \Delta \to D$ keduanya terbukti.
2. $V(C) \subset V(\Gamma_2) \cap [V(\Gamma_1, \Gamma_3 A(x), \Delta) \cup V(D)]$

Dari 1., $\Gamma_1, C, \Gamma_3, \exists z A(z), \Delta \to D$ dapat dibuktikan seperti berikut

$$\frac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1, C, \Gamma_3, A(x), \Delta \to D}}{\Gamma_1, C, \Gamma_3, \exists z A(z), \Delta \to D}(\exists \to),$$

kemudian karena $V(A(x)) \subset V(\exists z A(z))$, maka dapat diperoleh sifat berikut: $V(C) \subset V(\Gamma_2) \cap [V(\Gamma_1, \Gamma_3, \exists z A(z), \Delta) \cup V(D)]$.

Sehingga pada subkasus ini C merupakan *interpolant* dari $\Gamma \to D$.

c. Partisi dari $\Gamma, \exists z A(z), \Delta$ berbentuk $([\Delta_2,], [\Gamma, \exists z A(z), \Delta_1, \Delta_3])$

Pada subkasus ini *interpolant* dari $\Gamma \to D$ dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan cara pada subkasus b. yaitu partisi dari $\Gamma, \exists z A(z), \Delta$ berbentuk $([\Gamma_2], [\Gamma_1, \Gamma_3, \exists z A(z), \Delta_2])$

- Kasus k>0 dan inferensi terakhir adalah $(\to \forall)$.

Interpolant dari $\Gamma \to D$ pada subkasus ini dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan cara pada kasus k>0 dan inferensi terakhir adalah $(\to \exists)$.

- Kasus k>0 dan inferensi terakhir adalah $(\forall \to)$.

Interpolant dari $\Gamma \to D$ pada subkasus ini dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan cara pada kasus k>0 dan inferensi terakhir adalah $(\exists \to)$.

Dengan terbuktinya Teorema 4 maka teorema interpolasi pada **Fl** dan $\mathbf{Fl_w}$ hanyalah sebagai akibat langsung saja, yaitu dengan memilih Γ sebagai barisan *formula* dengan satu anggota saja, $\Gamma_2 = \Gamma$ dan Γ_1, Γ_3 sebagai barisan kosong.

Akibat 5. Teorema interpolasi berlaku pada logika predikat komutatif **Fl** dan $\mathbf{Fl_w}$.

4. PENUTUP

Dari pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa teorema interpolasi berlaku pada logika predikat non-komutatif **FL** dan $\mathbf{FL_w}$, salah satu metode pembuktiannya adalah dengan memodifikasi konsep partisi pada metoda Maehara.

Pada tulisan ini logika-logika yang dibahas tidak memuat konstanta $\perp$. Analisisa sintaktik dari logika yang memuat konstanta tersebut dalam banyak hal membutuhkan aturan *weakening*. Untuk selanjutnya perlu diteliti apakah metode Maehara bisa dimodifikasi untuk membuktikan bahwa teorema interpolasi berlaku juga untuk logika predikat yang memuat konstanta $\perp$ tetapi tak memuat aturan *weakening*.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bayu Surarso, *Teorema interpolasi untuk logika relevan positip R+*, Jurnal sains & matematika (1999), Volume 7, Nomor 1, hal.1-6.

[2] Bayu Surarso, *Interpolation theorem for L_{DBCC} and L_{DBCK}*, Jurnal

Matematika dan Komputer (2000), Volume 3, Nomor 2, hal. 56-64.

[3] Bayu Surarso, *Interpolation theorem for Noncommutative standard Extensions of logic BB'I*, Jurnal Matematika dan Komputer (2004), Volume 7, Nomor 2, hal. 36-41.

[4] Bayu Surarso dan Marti Lestari, *Teorema interpolasi untuk logika-logika predikat komutatif*, manuskrip, segera diterbitkan pada Jurnal sains & matematika (2008), Volume 16, Nomor 4.

[5] Maehara S., *Craig no interpolation theorem* (dalam bahasa Jepang), Suugaku (1960/1961), Volume 12, hal. 235-237.