DIGRAF EKSENTRIS PADA DIGRAF SIKEL, DIGRAF KOMPLIT DAN DIGRAF KOMPLIT MULTIPARTIT

Retno Catur Kumalasari[1] dan Lucia Ratnasari[2]
[1, 2]Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto SH Semarang 50275

Abstract. The *eccentric digraph of a digraph*, $ED(D)$, is the digraph that has the same vertex set as D and the arc set defined by: there is an arc from u to v if and only if v is an eccentric vertex of u. In this paper, we examine *eccentric digraphs of digraphs* of varoius families of digraphs and we consider the behaviour of an iterated sequence of eccentric digraphs of a digraph.

Keywords: cycle digraph, complete digraph, complete multipartite digraph, distance, eccentricity, eccentric vertex and eccentric digraph.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, dan lain sebagainya. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, verteks atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*. Banyak sekali struktur yang bisa direpresentasikan dengan graf, dan banyak masalah yang bisa diselesaikan dengan bantuan graf.

Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota lain yang terdiri dari kumpulan kota dalam suatu daerah. Masalah ini ekuivalen dengan menentukan eksentrisitas titik pada graf. Kumpulan titik eksentrik yang dihubungkan dengan busur pada suatu graf disebut Digraf eksentris pada graf. Sedangkan kumpulan titik eksentrik yang dihubungkan dengan busur pada suatu digraf disebut Digraf eksentris pada digraf. *Digraf eksentris pada graf*, $ED(G)$, yang diperkenalkan pertama kali oleh Fred Buckley pada tahun 90-an.

Boland dan Miller (Boland dan Miller, 2001) memperkenalkan *digraf eksentris pada digraf*, $ED(D)$. Teori ini terinspirasi dari penelitian yang dilakukan oleh Buckley. Pada tulisan ini akan dikaji digraf eksentris pada digraf sikel, digraf komplit dan digraf komplit multipartit.

2. DIGRAF EKSENTRIS PADA DIGRAF

Secara matematis digraf (*directed graph*/ graf berarah) dapat didefinisikan sebagai berikut :

Digraf D didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, A), yang dalam hal ini :

V = himpunan tidak kosong dari titik = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$dan

A = himpunan dari pasangan busur terurut (u, v), yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik u, v di V.

Dapat ditulis dengan notasi $D = (V, A)$.

Jarak dari u ke v di D, dinotasikan $d(u,v)$, adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v. Jika tidak ada lintasan titik u dan v, maka $d(u,v) = \infty$.

Eksentrisitas titik v dalam digraf D, dinotasikan $e(v)$, adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v ke setiap titik di D dapat dituliskan

$e(v) = \max\{d(v,u) \mid u \in V(D)\}$. Titik u adalah titik eksentrik dari v jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari v atau $d(u,v) = e(v)$.

Digraf eksentris pada digraf, $ED(D)$, didefinisikan sebagai digraf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan D, $V(ED(D)) = V(D)$ dimana busur menghubungkan titik v ke u, jika dan hanya jika u adalah titik eksentrik dari v. Dengan catatan bahwa jika suatu titik mempunyai derajat keluar nol maka titik tidak mempunyai titik eksentrik. Diberikan bilangan bulat positif $k \geq 2$, eksentrisitas digraf iterasi ke-k pada D ditulis sebagai $ED^k(D) = ED(ED^{k-1}(D))$ dimana $ED^1(D) = ED(D)$ dan $ED^0(D) = D$.

2.1 Digraf Eksentris Pada Digraf Sikel

Misal digraf sikel C_n dengan $n \geq 2$ mempunyai himpunan titik

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

dan himpunan busur

$$A(C_n) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Teorema 2.1.1

Eksentrisitas titik v_i pada digraf sikel C_n dengan $n \geq 2$ adalah sebagai berikut:

$$e(v_i) = n - 1 \qquad \textit{untuk setiap } i = 1,2,...,n$$

Bukti:

Dari definisi digraf sikel, jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v_i untuk setiap $i = 1,2,...,n$ adalah $n-1$, dengan kata lain eksentrisitas titik $e(v_i)$ pada digraf sikel C_n dengan $n \geq 2$ adalah sama untuk setiap titiknya, yaitu $e(v_1) = e(v_2) = ... = e(v_n)$. Hal ini disebabkan karena jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari setiap titiknya adalah sama, yaitu $n-1$.

Akibat 2.1

Titik eksentrik pada digraf sikel C_n dengan $n \geq 2$ adalah sebagai berikut:

Titik eksentrik dari v_i = $\begin{cases} v_n & i=1 \\ v_{i-1} & i=2,3,...,n \end{cases}$

Dari teorema 2.1.1, titik eksentrik dari v_i untuk $i=1$ adalah v_n sedangkan untuk $i = 2,3,...,n$ adalah v_{i-1}.

Setelah eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan titik eksentrik pada digraf sikel C_n dengan $n \geq 2$ dicari selanjutnya kita mempunyai teorema berikut:

Teorema 2.1.2

Digraf eksentris pada digraf sikel C_n dengan $n \geq 2$ adalah C_n, yang mana arah dari busur di $ED(C_n)$ kebalikan dari arah busur yang diberikan digraf sikel C_n.

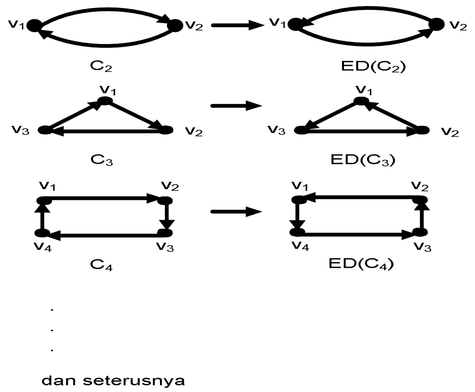
Bukti:

Untuk digraf sikel C_n, $ED(C_n)$ adalah digraf eksentris pada digraf sikel C_n. Dari akibat 2.1, pada digraf sikel C_n,titik eksentrik dari v_i untuk $i=1$ adalah v_n sehingga ada busur dari v_i untuk $i=1$ ke v_n sedangkan titik eksentrik dari v_i untuk $i = 2,3,...,n$ adalah v_{i-1} sehingga ada busur dari v_i untuk $i = 2,3,...,n$ ke v_{i-1}.

Dari teorema 2.1.2 dapat disimpulkan bahwa digraf eksentris pada digraf sikel C_n dengan $n \geq 2$ adalah C_n, $ED(C_n) = C_n$, dimana arah semua busur pada $ED(C_n)$ kebalikan dari busur yang diberikan pada sikel C_n. Jadi jika D adalah digraf sikel C_n maka $ED(D) = D$, dimana arah semua busur pada $ED(D)$ kebalikan dari D.

■

■



Gambar 2.1 iterasi barisan dari eksentrik digraf sikel

2.2 Digraf Eksentris Pada Digraf Komplit

Misal digraf komplit K_n mempunyai himpunan titik

$$V(K_n)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$$

dan himpunan busur

$$A(K_n)=\{a_1,a_2,...,a_n\}$$

Teorema 2.2.1

Eksentrisitas titik v_i pada digraf komplit K_n kecuali pada digraf komplit K_1 (karena eksentrisitas titik pada digraf komplit K_1 sama dengan 0) adalah sebagai berikut:

$$e(v_i)=1 \qquad \textit{untuk setiap } i=1,2,...,n$$

Bukti:

Dari definisi digraf komplit K_n untuk $n\geq 2$, jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v_i untuk setiap $i=1,2,...,n$ adalah 1, dengan kata lain eksentrisitas titik $e(v_i)$ pada digraf komplit K_n untuk $n\geq 2$ adalah sama untuk setiap titiknya, yaitu $e(v_1)=e(v_2)=...=e(v_n)$. Hal ini disebabkan karena jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari setiap titiknya adalah sama, yaitu 1. Jadi $e(v_i)=1$ untuk setiap $i=1,2,...,n$. Sedangkan untuk digraf komplit K_1 tidak mempunyai jarak maka eksentrisitas titik $e(v_1)$ pada digraf komplit K_1 adalah 0.

Akibat 2.2

Titik eksentrik pada digraf komplit K_n untuk $n\geq 2$ adalah sebagai berikut:
Titik eksentrik dari

$$v_i = v_j \quad \textit{untuk } i, j=1,2,...,n \textit{ dan } j\neq i$$

Dari teorema 2.2.1, titik eksentrik dari v_i pada digraf komplit K_n untuk $n\geq 2$ adalah v_j untuk setiap $i, j=1,2,...,n$ dimana $j\neq i$. Sedangkan untuk K_1 tidak mempunyai titik eksentrik karena K_1 mempunyai derajat keluar sama dengan nol.

Setelah eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan titik eksentrik pada digraf komplit K_n dicari selanjutnya kita mempunyai teorema berikut:

Teorema 2.2.2

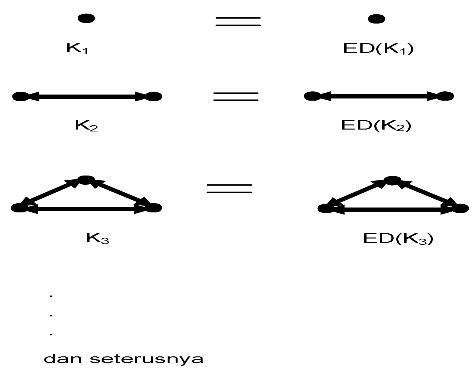
Digraf eksentris pada digraf komplit K_n adalah digraf komplit K_n itu sendiri.

Bukti:

Untuk digraf komplit K_n, $ED(K_n)$ adalah digraf eksentris pada digraf komplit K_n. Dari akibat 2.2, pada digraf komplit K_n, titik eksentrik dari v_i pada digraf komplit K_n untuk $n\geq 2$ adalah v_j untuk setiap $i, j=1,2,...,n$ dimana $j\neq i$ sehingga ada busur dari v_i ke v_j untuk setiap $i, j=1,2,...,n$ dimana $j\neq i$. Sedangkan untuk K_1 tidak mempunyai titik eksentrik karena K_1 mempunyai derajat keluar sama dengan nol sehingga tidak ada busur yang menghubungkan titik tersebut.

Dari teorema 2.2.2 dapat disimpulkan bahwa digraf eksentris pada digraf komplit K_n adalah K_n, dengan kata lain $ED(K_n)=K_n$. Jadi jika D adalah digraf komplit K_n maka $ED(D)=D$.

■



Gambar 2.2 iterasi barisan dari eksentrik digraf komplit

2.3 Digraf Eksentris Pada Digraf Komplit Multipartit

Misal digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ mempunyai himpunan titik

$$V\left(K_{a,b,\ldots,z}\right)=\begin{cases} V_1=\{v_1,v_2,\ldots v_a\} \\ V_2=\{v_{a+1},v_{a+2},\ldots v_{a+b}\} \\ V_3=\{v_{a+b+1},v_{a+b+2},\ldots v_{a+b+c}\} \\ \vdots \\ V_n=\{v_{a+b+\ldots+y+1},v_{a+b+\ldots+y+2},\ldots v_{a+b+\ldots+y+z}\} \end{cases}$$

dan himpunan busur

$$A\left(K_{a,b,\ldots,z}\right)=\left\{\begin{array}{l} a_{11},a_{12},\ldots,a_{1a},a_{21},a_{22},\ldots,a_{2a},\ldots,a_{b1},a_{b2},\ldots,a_{ba},a_{(b+1)1},a_{(b+1)2},\ldots,a_{(b+1)a} \\ a_{(b+2)1},a_{(b+2)2},\ldots,a_{(b+2)a},\ldots,a_{(b+c)1},a_{(b+c)2},\ldots,a_{(b+c)a},a_{(b+c+\ldots+y+1)1}, \\ a_{(b+c+\ldots+y+1)2},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+1)a},\ldots,a_{(b+1)(a+1)},a_{(b+1)(a+2)},\ldots,a_{(b+1)(a+b)}, \\ a_{(b+2)(a+1)},a_{(b+2)(a+2)},\ldots,a_{(b+2)(a+b)},\ldots,a_{(b+c)(a+1)},a_{(b+c)(a+2)},\ldots,a_{(b+c)(a+b)}, \\ a_{(b+c+1)(a+1)},a_{(b+c+1)(a+2)},\ldots a_{(b+c+1)(a+b)},a_{(b+c+2)(a+1)},a_{(b+c+2)(a+2)},\ldots,a_{(b+c+2)(a+b)}, \\ \ldots,a_{(b+c+d)(a+1)},a_{(b+c+d)(a+2)},\ldots,a_{(b+c+d)(a+b)},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+1)(a+1)},a_{(b+c+\ldots+y+1)(a+2)}, \\ \ldots,a_{(b+c+\ldots+y+1)(a+b)},a_{(b+c+\ldots+y+2)(a+1)},a_{(b+c+\ldots+y+2)(a+2)},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+2)(a+b)},\ldots, \\ a_{(b+c+\ldots+y+z)(a+1)},a_{(b+c+\ldots+y+z)(a+2)},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+z)(a+b)},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+1)(a+b+\ldots+y+1)}, \\ a_{(b+c+\ldots+y+1)(a+b+\ldots+y+2)},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+1)(a+b+\ldots+y+z)},a_{(b+c+\ldots+y+2)(a+b+\ldots+y+1)}, \\ a_{(b+c+\ldots+y+2)(a+b+\ldots+y+2)},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+2)(a+b+\ldots+y+z)},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+z)(a+b+\ldots+y+1)}, \\ a_{(b+c+\ldots+y+z)(a+b+\ldots+y+2)},\ldots,a_{(b+c+\ldots+y+z)(a+b+\ldots+y+z)} \end{array}\right\}$$

Teorema 2.3.1

Eksentrisitas titik v_i pada digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ adalah sebagai berikut:

$e(v_i)=2 \quad untuk\ setiap\ i=1,2,\ldots,a+b+\ldots+y+z$

Bukti:

Dari definisi digraf komplit multipartit, jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v_i untuk setiap $i=1,2,\ldots,a$ di V_1 adalah semua titik di V_1 kecuali dirinya sendiri, jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v_i untuk setiap $i=a+1,a+2,\ldots,a+b$ di V_2 adalah semua titik di V_2 kecuali dirinya sendiri dan demikian juga seterusnya jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v_i untuk setiap $i=a+b+\ldots+y+1,a+b+\ldots+y+2,\ldots,a+b+\ldots+y+z$ di V_n adalah semua titik di V_n kecuali dirinya sendiri, yaitu dengan jarak 2. Jadi $e(v_i)=2$ untuk setiap $i=1,2,\ldots,a+b+\ldots+y+z$.

Akibat 2.3

Titik eksentrik pada digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ adalah sebagai berikut:

Titik eksentrik di V_1 dari $v_i=v_j \quad untuk\ \ i,j=1,2,\ldots,a\ dan\ j\neq i$

Titik eksentrik di V_2 dari $v_i=v_j \quad untuk\ i,j=a+1,a+2,\ldots,a+b\ dan\ j\neq i$

.

.

.

Titik eksentrik di V_n dari

$v_i=v_j \quad untuk\ i,j=a+b+\ldots+y+1,a+b+\ldots+y+2,\ldots,a+b+\ldots+y+z$
$dan\ j\neq i$

Dari teorema 2.3.1, titik eksentrik dari v_i di V_1 untuk setiap $i=1,2,\ldots,a$ adalah v_j di V_1 untuk setiap $j=1,2,\ldots,a$ dimana $j\neq i$, titik eksentrik dari v_i di V_2 untuk setiap $i=a+1,a+2,\ldots,a+b$ adalah v_j di V_2 untuk setiap $j=a+1,a+2,\ldots,a+b$ dimana $j\neq i$, demikian juga seterusnya titik eksentrik dari v_i di V_n untuk setiap $i=a+b+\ldots+y+1,a+b+\ldots+y+2,\ldots,a+b+\ldots+y+z$ adalah v_j di V_n untuk setiap $j=a+b+\ldots+y+1,a+b+\ldots+y+2,\ldots,a+b+\ldots+y+z$ dimana $j\neq i$.

Setelah eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan titik eksentrik pada digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ dicari selanjutnya kita mempunyai teorema berikut:

Teorema 2.3.2

Digraf eksentris iterasi kedua pada digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ adalah digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ itu sendiri.

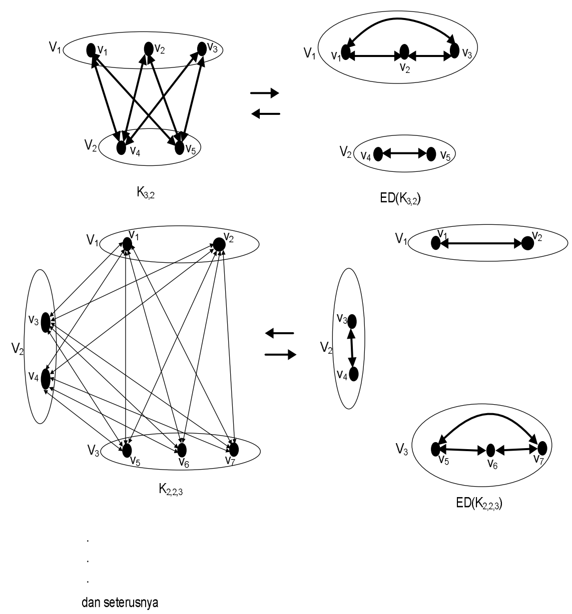
Bukti:

Dari akibat 2.3, pada digraf eksentris iterasi pertama, titik eksentrik dari v_i di V_1 untuk setiap $i = 1,2,\ldots,a$ adalah v_j di V_1 untuk setiap $j = 1,2,\ldots,a$ dimana $j \neq i$ sehingga ada busur dari v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$, titik eksentrik dari v_i di V_2 untuk setiap $i = a+1, a+2, \ldots, a+b$ adalah v_j di V_2 untuk setiap $j = a+1, a+2, \ldots, a+b$ dimana $j \neq i$ sehingga ada busur dari v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$, demikian juga seterusnya titik eksentrik dari v_i di V_n untuk setiap $i = a+b+\ldots+y+1, a+b+\ldots+y+2, \ldots, a+b+\ldots+y+z$ adalah v_j di V_n untuk setiap $j = a+b+\ldots+y+1, a+b+\ldots+y+2, \ldots, a+b+\ldots+y+z$ dimana $j \neq i$ sehingga ada busur dari v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$.

Sedangkan pada iterasi kedua karena tidak ada busur yang menghubungkan antar setiap himpunan titik pada digraf eksentris iterasi pertama maka jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik ke setiap titik yang berbeda himpunan titiknya adalah ∞ sehingga titik eksentrik dari v_i di V_1 untuk setiap $i = 1,2,\ldots,a$ adalah semua titik selain di V_1, titik eksentrik dari v_i di V_2 untuk setiap $i = a+1, a+2, \ldots, a+b$ adalah semua titik selain di V_2, demikian juga seterusnya titik eksentrik dari v_i di V_n untuk setiap $i = a+b+\ldots+y+1, a+b+\ldots+y+2, \ldots, a+b+\ldots+y+z$ adalah semua titik selain di V_n.

Dari teorema 2.3.2 dapat disimpulkan bahwa digraf eksentris iterasi kedua pada digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ adalah digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ itu sendiri, dengan kata lain $ED^2(K_{a,b,\ldots,z}) = K_{a,b,\ldots,z}$. Jadi jika D adalah digraf komplit multipartit maka $ED^2(D) = D$.

■



Gambar 2.3 Iterasi barisan dari eksentrik digraf komplit multipartit

3. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan dari sebelumnya, maka kesimpulan yang dapat diambil mengenai digraf eksentris pada digraf sikel, digraf komplit dan digraf komplit multipartit adalah sebagai berikut:

1. Digraf eksentris pada digraf sikel C_n adalah C_n, dimana semua arah busur $ED(C_n)$ berlawanan dengan arah busur C_n.
2. Digraf eksentris pada digraf komplit K_n adalah digraf komplit K_n itu sendiri, $ED(K_n) = K_n$.
3. Digraf eksentris iterasi kedua pada digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ adalah digraf komplit multipartit $K_{a,b,\ldots,z}$ itu sendiri, $ED^2(K_{a,b,\ldots,z}) = K_{a,b,\ldots,z}$.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Boland, J and M Miller (2001), *The Eccentric Digraph of Digraph*, Proceeding of AWOCA'01. Bandung.

[2] Chartrand, G and L Lesniak (1996), *Graphs & Digraphs*, 3rd ed. London: Chapman & Hill,.

[3] Kutanto Widi Nugroho (2002), *Digraf eksentris dari Graf Star, Graf Double Star dan Graf Komplit Bipartit*, Universitas Jember. www.unej.ac.id/fakultas/mipa/skripsi/widi.pdf (11 Mei 2007).

[4] Miller, M, J Gimbert, F Ruskey And J Ryan (2002), *Iterations of eccentric digraphs*, Proceeding of AWOCA'02. Australia.

[5] Robin J. Wilson & John J. Watkins (1990), *Graphs an Introductory Approach,* Canada: John Wiley & Sons, Inc.

[6] Widya (2002), *Digraf eksentris pada Graf Path (lintasan), Graf Cycle (Sikel) dan Graf Complete (Lengkap)*,. Universitas Jember. www.unej.ac.id/fakultas/mipa/skripsi/widya.pdf (28 September 2007).