MATRIKS JORDAN DAN APLIKASINYA PADA SISTEM LINIER WAKTU DISKRIT

Soleha, Dian Winda Setyawati
Jurusan Matematika, FMIPA
Institut Teknologi Surabaya

Abstract. Matrix is diagonalizable (similar with matrix diagonal) if and only if the sum of geometric multiplicities of its eigenvalues is *n*.If we search for an upper triangular form that is nearly diagonal as possible but is still attainable by similarity for every matrix, especially the sum of geometric multiplicities of its eigenvalues is less than *n*, the result is the Jordan canonical form, which is denoted by , and = .

In this paper, will be described how to get matrix *S*(in order to get matrix) by using generalized eigenvector. In addition, it will also describe the Jordan canonical form and its properties, and some observation and application on discrete time linear system.

Keywords: Jordan matrix,generalized eigenvector, discrete time linear system.

1. PENDAHULUAN

Matriks dan dikatakan similar jika ada matriks nonsingular *P* sehingga

$$=$$

Jika matriks mempunyai multiplisitas geometri dari nilai-eigen sama dengan*n*, dapat didiagonalkan dengan kata lain ada matriks diagonal *D* yang similar dengan matriks *A* sehingga

$$=$$

dengan dan sebagai vektor kolom ke-*i*. adalah vektor-eigen yang bersesuaian dengan nilai-eigen untuk = 1,2, , [3]. Lalu bagaimana jika multiplisitas geometri dari nilai-eigen tidak sama dengan *?* Apakah tidak ada matriks yang similar dengan ? Ternyata walaupun matriks , multiplisitas geometri dari nilai-eigentidak sama dengan , tidak dapat didiagonalkan tetapi dari matriks tersebut dapat diperoleh matriks yang hampir diagonal, biasa disebut matriks Jordan, yang similar dengan *A*. Hubungan ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$=$$

dengan .

Dalam paper ini akanditambahkan bukti dari teorema yang ditulis oleh [3] dan [5] mengenai cara mendapatkan matriks menggunakan vektor eigen tergeneralisasi dan juga aplikasi dari penggunaan matriks pada sistem linear waktu diskrit.

2.SIMILARITAS DAN BENTUK KANONIK JORDAN

Berikut ini diberikan suatu teorema tentang similaritas matriks blok diagonal.

Teorema 2.1 [3], [4] *Dimisalkan , mempunyai nilai-eigen dengan multiplisitas , = 1,2, … , , dan , , … , berbeda maka similar terhadap matriks dengan bentuk*

$$0$$

$$0$$

dengan adalah matriks segitiga atas dengan semua elemen diagonalnya sama dengan , = 1,2, … , .

Matriks Jordan adalah jumlahan langsung dari matriks blok Jordan. Suatu matriks Jordan yang similar dengan matriks yang diberikan disebut bentuk kanonik Jordan. Setelah tahu bentuk kanonik Jordan, semua informasi aljabar linear tentang matriks yang diberikan dapat diketahui dengan mudah.

Berikut ini diberikan definisi blok Jordan.

Definisi 2.2 [3] *Suatu blok Jordan $J_k(\lambda)$ adalah matriks segitiga atas × dengan bentuk*

1 0
1
( ) = (1)
1
0

ada k-1 angka "+1" pada superdiagonal; muncul k kali pada diagonal utama. Elemen yang lainnya nol, dan ( ) = [ ]. Matriks Jordan adalah jumlahan langsung dari blok Jordan sehingga dapat dituliskan sebagai berikut

( ) 0
( )
= (2)
0 ( )

+ + =

Dengan mungkin sama dan nilai tidak perlu berbeda.

3. SIFAT-SIFAT MATRIKS JORDAN TERHADAP SIMILARITAS

Sebelum menuju sifat-sifat matriks Jordan terhadap similaritas, terlebih dahulu perlu membuktikan lema berikut.

Lemma 3.1 [3] *Diberikan* ≥ 1 *dan blok Jordan*

0 1 0
(0) =
1
0 0

maka

(i). (0) (0) = 0 0 / 0 *dan*

(ii). (0) = *jika* $\geq$

(iii). (0) = *untuk* = 1,2, … , − 1 *dan*

(iv). [− (0) (0)] = ( )

dengan adalah matriks identitas, adalah vektor satuan basis standar ke-i dan .

Lemma 3.1 akan digunakan untuk pembuktian Teorema 3.2 berikut ini

Teorema 3.2 [3] *Dimisalkan adalah matriks strictly segitiga atas. Terdapat sebuah matriks nonsingular dan bilangan bulat* , , , *dengan* $\geq$ $\geq$ $\geq$ ≥ 1 *dan* + + + = *sedemikian sehingga*

(0) 0
= (0)
0 (0)

Bukti:

Pembuktian akan dilakukan dengan induksi. Jika = 1, = [0] = [0]

Anggap benar untuk matriks berukuran − 1 yaitu matriks matriks *strictly* segitiga atas terdapat matriks nonsingular sedemikian hingga

0
= = 0 (3)
0
0

dengan $\geq$ $\geq$ $\geq$ ≥ 1, + + + = − 1, = (0), dan

0
=
0

Dapat diperhatikan bahwa tidak ada blok jordan pada diagonal *J* yang berukuran lebih besar dari sehingga berdasarkan Lemma 3.1 (ii) maka

0 0 0
= = =
0 0 0

Sekarang akan dibuktikan untuk matriks berukuran *n*. Dimisalkan

= 0
0

dengan , dan adalah matriks *strictly* segitiga atas.

Pandang persamaan di bawah ini

1 0 1 0 = 1 0 0 1 0
0 0 0 0 0

= 0 (4)
0

Dengan mempartisi menjadi [ ] yaitu dan dan berdasarkan persamaan serta partisi pada ruas kanan dari (3), maka Persamaan (4) dapat ditulis sebagai berikut :

0
1 0 1 0 = 0 0
0 0
0 0

Sekarang pandang similaritas dari matriks tersebut yaitu

1 − 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 1 −
= 0 0
0 0
0 ( )
= 0 0 (5)
0 0

Ada dua kemungkinan nilai berdasarkan $\neq 0$ atau $= 0$.

(i) Jika $\neq 0$ maka

1 0 0 0 ( ) 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0

=
0

dengan

= 0 = (0)
0

adalah blok Jordan berukuran + 1 dengan diagonal utama nol. Gunakan sifat = untuk $= 1,2,\dots,$, secara rekursif dapat ditunjukkan bahwa

untuk $= 1$

−
0 0 0
=
0

Untuk $= 2$

−
0 0 0
=
0

Untuk $= 3$

−
0 0 0
=
0

−
0 0 0
=
0

Karena = , terlihat bahwa paling banyak dalam langkah pada similaritas ini,nilai di luar diagonal pada akhirnya akan sama dengan nol. Dapat disimpulkan bahwa

= 0 ~ 0
0 0

0
= 0 0 ~ 0
0 0 0

(ii) Jika $= 0$, maka (5) menunjukkan bahwa similar terhadap matriks

0 0
0 0
0 0

Dengan similaritas,

0 0 0 0 0 1 0
1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0

= 0 0
0 0

Sehingga dapat pula disimpulkan bahwa similar terhadap matriks

0 0
= 0 0 (6)
0 0

Berikut akan dicari matriks yang similar dengan matriks*B*. Dimisalkan matriks tersebut adalah

0 0
0 0
0 0

Akan dibuktikan dengan induksi.

Untuk matriks berukuran 1, $[0] = [0]$.

Dianggap benar untuk − , yaitu terdapat matriks nonsingular sedemikian hingga

0
=
0

Dengan adalah matriks Jordan dengan elemen diagonal nol.

0 0
0 0
0 0
| 0 0
0 − − − − 0
= 0 0 | 0 0
0 | 0
| 0 0
= − − − − − − − = (7)
0 | 0

Karena similar dengan $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ dan $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ similar dengan $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$ maka similar dengan $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$.

Teorema 3.3 [3] *Dimisalkan adalah matriks real. Terdapat suatu matriks nonsingular sedemikian sehingga*

$$= \begin{matrix} (\ ) & & 0 \\ & (\ ) & \\ 0 & & (\ ) \end{matrix}$$

$$= \quad (8)$$

dan $+ \quad + \quad + \quad = \ .$

Bukti:

Berikut ini akan dibuktikan bahwa $\sim$.

Dari Teorema 2.1 didapatkan bahwa setiap matriks kompleks yang mempunyai nilai-eigen dengan multiplisitas , = 1,2, , dan , , , berbeda, similar dengan matriks blok diagonal yang masing-masing blok diagonalnya adalah matriks segitiga atas dengan elemen diagonal sama. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks blok diagonal yang masing-masing blok diagonalnya adalah matriks segitiga atas dengan elemen diagonal sama similar dengan matriks Jordan.

Dimisalkan matriks segitiga atas dengan elemen diagonal utama *p* adalah dan adalah matriks *strictly* segitiga atas sedemikian hingga

$$= \quad +$$

Dari Teorema 3.2 diketahui bahwa $\sim (0)$. akan dibuktikan $\sim$ dengan kata lain akan dibuktikan $=$.

$$= \quad (\quad + \quad)$$
$$= (\quad + \quad)$$
$$= \quad +$$
$$= (0) + \quad =$$

karena setiap matriks kompleks similar dengan matriks blok diagonal yang masing-masing blok diagonalnya adalah matriks segitiga atas dengan elemen diagonal sama dan matriks tersebut similar dengan matriks Jordan maka setiap matriks kompleks similar dengan matriks Jordan.

4. VEKTOR EIGEN TERGENERALISASI DAN SIFAT-SIFAT PADA VEKTOR-EIGEN TERGENERALISASI

Suatu matriks , dengan jumlah multiplisitas geometri dari nilai-eigen-nilai-eigentidak sama dengan *n*, maka tidak similar dengan matriks diagonal karena jumlah vektor-eigennya tidak sama dengan . Tetapi matriks tersebut similar dengan matriks Jordan. Untuk mendapatkan vektor-eigen yang bebas linear dapat digunakan vektor-eigen tergeneralisasi.Berikut ini diberikan definisi dari vektor-eigen tergeneralisasi.

Definisi 4.1[2] *Vektor x disebut vektor-eigen tergeneralisasi dengan tingkat dari A yang berpadanan dengan jika dan hanya jika*

$$(\quad - \quad) \quad =$$

dan

$$(\quad - \quad) \quad \neq$$

Dapat diperhatikan jika $= 1$, *definisi ini menjadi* $(\quad - \quad) = $ *dan* $\neq$, *di mana ini merupakan definisi vektor-eigen.*

Dimisalkan adalahvektor-eigen tergeneralisasi yang bersesuaian dengan dan merupakan vektor-eigen tergeneralisasi dengan tingkat ,maka vektor-eigen tergeneralisasi tersebut dapat ditentukan dari persamaan berikut.

$$(\quad - \quad) \quad =$$
$$(\quad - \quad) \quad =$$

$$(\quad - \quad) \quad = \qquad (9)$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$=$$
$$= (\quad - \quad)$$
$$= (\quad - \quad)$$

$$= (\quad - \quad) \qquad (10)$$

Himpunan vektor $\{ \ , \ , \ , \ \}$ disebut rantai vektor-eigen tergeneralisasi dengan panjang .

Berikut ini akan dibuktikan bahwa vektor-eigen tergeneralisasi dengan panjang dari nilai-eigen yang sama adalah vektor bebas linear.

Teorema 4.2 [2] *Jika , , , , merupakan vektor-eigen tergeneralisasi dengan panjang maka , , , , adalah bebas linear.*

Setelah terbukti bahwa vektor-eigen tergeneralisasi dari nilai-eigen yang sama merupakan vektor bebas linear, selanjutnya akan dibuktikan bahwa vektor-eigen tergeneralisasi dengan vektor-eigen vektor-eigen dari nilai-eigen yang berbeda juga bebas linear.

Teorema 4.3 [2] *Vektor-eigen tergeneralisasi dari dengan vektor-eigen vektor-eigen dari nilai nilai-eigen yang berbeda adalah bebas linear.*

Bukti:

Tanpa mengurangi keumuman,dimisalkan mempunyai nilai-eigen , , , dengan ( ) = , ( ) = 1 jadi mempunyai satu rantai vektor-eigen tergeneralisasi dengan panjang sedangkan ( ) = 1 untuk ≠ 1 . Dimisalkan vektor-eigen tergeneralisasi yang bersesuaian dengan adalah , , , , dan vektor-eigen yang bersesuaian dengan , , , adalah , , , . Akan dibuktikan bahwa , , , , , , , , adalah bebas linear dengan kata lain akan dibuktikan bahwa

+ + + + + + + = (11)

hanya mempunyai satu penyelesaian yaitu

= = = = = 0

Pandang lagi Persamaan (11)

Kalikan kedua ruas dengan (−)

(−) + (−) + + (−) + (−) + (−) + + (−) =

(−) (−) + (−) (−) + + (−) + (−) + (−) + + (−) =

Berdasarkan Definisi 4.1 bahwa (−) = 0diperoleh

0 + 0 + + 0 + (−) + (−) + + (−) =

(−) + (−) + + (−) =

(−) (+ + +) =

Karena (−) = − maka (−) ≠ 0 oleh sebab itu

+ + + =

Kalikan dengan (−)

(−) + (−) + + (−) =

(−) = sehingga

(−)(+ +) =

(−) ≠ 0 maka

+ + =

Kalikan dengan (−)

(−) + + (−) =

(−) = sehingga

(−)(+ +) =

(−) ≠ 0 maka

+ + =

Dan seterusnya hingga diperoleh

(−) =

Karena (−) ≠ maka

=

Karena ≠ maka

= 0

Dan seterusnya hingga diperoleh

= = = = = 0

Dari Teorema 4.2diperoleh

= = = = 0

sehingga

, , , , , , , , bebas linear.

Sekarang diasumsikan bahwa matriks memiliki nilai-eigen sebanyak *k* dan nilai-eigen lain , , , yang semuanya berbeda dari , maka nilai-eigen dari *A* adalah

, , , , , , ,

Berikut ini akan dibahas dua kasus yaitu untuk (−) = − 1 dan (−) = − , ≤ .

4.2.1 (−) = −

Untuk kasus di mana (−) adalah − 1 hanya ada satu vektor-eigen yang bersesuaian dengan nilai-eigen , akibatnya hanya ada satu blok Jordan yang bersesuaian dengan nilai-eigen berulang ini.

Teorema 4.4 [5] *Diasumsikan bahwa matriks memiliki nilai-eigen sebanyak k dan nilai-eigen lain , , , yang semuanya berbeda dari serta (−) = − 1, maka ada matriks Jordan*

( ) | 0
− − − − −
= | 0
0 |
| 0

dan

= [ ]

dengan , , , , adalah vektor-eigen tergeneralisasi yang bersesuaian dengan dan , , , adalah vektor-eigen yang bersesuaian dengan nilai-eigen , , , sedemikian hingga

=

Bukti:

Dari

(−) =
(−) =

(−) =

Diperoleh

= (−)
= (−)

= (−) (12)

Dari Persamaan (12) maka , , , , memenuhi persaman berikut

=
= +

= + (13)

Vektor-eigen , , , bersesuaian dengan nilai-eigen , , , yang masing-masing berbeda, dapat ditentukan dari

=
=

= (14)

Kemudian dengan menggabungkan Persamaan (13)dengan (14), yaitu

=
= +

= +
=
=

=

diperoleh

[ ]
= [

1 0 | 0
|
1 |
] 0 | 0
− − − − − − − −
0 | 0
|
0 | 0

( ) | 0
− − − − −
Karena = | 0
0 |
| 0

dan

= [ ] maka persamaannya menjadi =

4.2.2 (−) = − , <

Karena diasumsikan bahwa matriks memiliki nilai-eigen sebanyak *k* dan nilai-eigen lain , , , yang semuanya berbeda dari dan (−) = − , ≤ , maka ada vektor-eigen yang bebas linear yang bersesuaian dengan sehingga terdapat blok Jordan yang bersesuaian dengan nilai-eigen .

Untuk mendapatkan vektor-eigen yang bebas linear, terlebih dahulu akan dibuktikan sifat berikut.

Lemma 4.5 [2] *Diberikan ruang null dari (−) , maka*

Bukti:

ruang null dari (−) dengan kata lain memuat semua yang memenuhi (−) = .

Akan dibuktikan dengan kata lain akan dibuktikan jika maka

berarti(−) =

Dengan mengalikan kedua ruas dengan (−) diperoleh

(−)(−) = (−)

(−) =

Berarti

Sekarang akan ditunjukkan cara untuk mendapatkan vektor-eigen yang bebas linear. Misalkan multiplisitas aljabar dari adalah dan

(−) =

maka (−) = 0

(−) = −

maka (−) =

(−) = −

maka (−) =

(−) = −

maka (−) =

(−) = −

maka (−) =

Dari nilai *null* dapat diketahui jumlah vektor yang bebas linear yaitu

(−) − (−)

= − vektor-eigen

(−) − (−)

= − vektor-eigen

(−) − (−)

= − 0vektor-eigen

Sehingga − + + − + −

0 =

Berikut ini akan dijelaskan bagaimana menentukan banyaknya blok Jordan dan ukuran blok Jordan yang bersesuaian dengan .

i. Jika (−) = − maka terdapat blok jordan yang bersesuaian dengan .
ii. Jika (−) = − dan ( ) = dengan panjang rantai , , , dengan + + + = maka ukuran blok Jordan yang bersesuaian dengan adalah × , × , , × .

Teorema 4.6 [5] *Jika maka terdapat dan dimana kolom-kolom merupakan vektor-eigen (tergeneralisasi) yang bersesuaian dengan sedemikian hingga*

=

Bukti:

Tanpa mengurangi keumuman anggap bahwa mempunyai nilai-eigen nilai-eigen sebanyak *k* dan nilai-eigen lain , , , yang semuanya berbeda dari dan (−) = − sehingga ( ) = artinya terdapat *s*blok Jordan pada matriks Jordan. Dimisalkan panjang rantai , , , dengan + + + = maka bisa diperoleh

Rantai pertama

(−) =

(−) =

(−) =

diperoleh

(−) =

(−) =

(−) =

maka

=

= +

= +

Rantai kedua

(−) =

(−) =

(−) =

diperoleh

(−) =

(−) =

(−) =

maka

=

= +

= +

Rantai ke-*s*

(−) =

(−) =

(−) =

diperoleh

(−) =
(−) =

(−) =

maka

=

= +

= +

Vektor eigen , , , bersesuaian dengan nilai-eigen , , , yang masing-masing berbeda, dapat ditetukan dari

=

=

=

Kemudian dengan menggabungkan persamaan vektor-eigen tergeneralisasi sebelumnya dengan persamaan vektor-eigen di atas menjadi satu, yaitu

=

= +

= +

=

= +

= +

=

= +

= +

=

=

=

Dimisalkan rantai vektor sebagai

=

=

=

Diperoleh

=

0 | 0
|
|
] 0 | 0
− − − − − − − −
0 | 0
|
0 | 0

Atau = sehingga =

5. SISTEM KONTROL WAKTU DISKRIT

Pandang sistem kontrol waktu diskrit yang didefinisikan oleh

(+ 1) = ( ) + ( )
( ) = ( ) + ( ) (15)

Dimisalkan didefinisikan vektor keadaan baru ( )

( ) = ( ) (16)

dengan adalah matriks nonsingular.
Substitusikan Persamaan (15) ke Persamaan (16), diperoleh

(+ 1) = ( ) + ( )

Kalikan kedua ruas dengan

(+ 1) = ( ) + ( )
(+ 1) = ( ) + ( ) (17)

Misal didefinisikan

= dan =

maka Persamaan (17) dapat ditulis ulang sebagai

(+ 1) = ( ) + ( ) (18)

Dengan cara yang sama,

( ) = ( ) + ( ) (19)

Dimisalkan = dan = maka Persamaan (18) menjadi

( ) = ( ) + ( ) (20)

Hal ini menunjukkan bahwa sistem pada persamaan (15) ekivalen dengan persamaaan sistem (17)dan (20).

5.1 Keteramatan Sistem Kontrol Waktu Diskrit

Pandang sistem kontrol waktu diskrit yang didefinisikan oleh

(+ 1) = ( )
( ) = ( ) (21)

dengan

waktu yang merupakan bilangan bulat ≥ 0

( ) vektor keadaan, ( )

( ) vektor output, ( )

matriks anggota ×

matriks anggota ×

Solusi dari (20)

$$( ) = (0) \qquad (22)$$

Setelah mendapatkan solusi sistem pada Persamaan (20), bisa didefinisikan sifat keteramatan dari sistem tersebut.

Definisi 5.1 [5] *Suatu sistem* (21) *dinamakan teramati jika setiap keadaan awal* $(0) =$, ≥ 0 *dapat ditentukan dari* ( ).

Dengan menggunakan (20), kita mendapatkan syarat perlu dan syarat cukup untuk keadaan keteramatan seperti yang dijelaskan pada lema berikut ini.

Lemma 5.2 [5] *Syarat perlu dan syarat cukup untuk keadaan keteramatan pada persamaan* (20) *adalah*

$$= \qquad (23)$$

5.2 Bentuk Alternatif Untuk Keadaan Keteramatan

Selain dengan cara yang diuraikan sebelumnya, ada cara lain untuk menentukan apakah suatu sistem teramati atau tidak. Yaitu dengan mengubah matriks ke bentuk diagonal atau Jordan.

Pertimbangkan sistem didefinisikan oleh (21). Jika semua vektor-eigen berbeda, dan sebuah matriks transformasi mentransformasikan ke bentuk matriks diagonal, sedemikian hingga

$$= \quad 0 \quad 0$$

dengan , , , adalah nilai-eigen berbeda dari . Sistem teramati jika dan hanya jika tidak ada kolom dari matriks yang semua elemennya nol.

Jika matriks tidak mempunyai vektor-eigen yang berbeda, maka pendiagonalan tidak mungkin dilakukan. Dalam kasus seperti ini, kita boleh mengubah menjadi bentuk kanonik Jordan:

$$=$$

Sistem dikatakan dalam keadaan teramati jika dan hanya jika

a. Tidak ada dua blok Jordan dalam yang bersesuaian dengan nilai-eigen yang sama,
b. Kolom yang bersesuaian dengan baris pertama dari masing-masing blok Jordan tidak ada yang elemennya nol semua,
c. Elemen dari masing-masing kolom yang bersesuaian dengan nilai-eigen yang berbeda tidak semuanya nol.

5.3 Keterkontrolan Sistem Kontrol Waktu Diskrit

Pandang sistem kontrol waktu diskrit yang didefinisikan oleh

$$(+ 1) = ( ) + ( ) \qquad (24)$$

dengan

waktu yang merupakan bilangan bulat ≥ 0

( ) vektor keadaan, ( )

( ) vektor kontrol, ( )

matriks anggota ×

matriks anggota ×

Untuk selanjutnya, sistem yang dinyatakan dengan persamaan (21) dinotasikan sebagai sistem (,). Solusi dari (,) dapat diselesaikan menggunakan metode rekursi yaitu

$$(1) = (0) + (0)$$
$$(2) = (1) + (1) = (0) + (0) + \qquad (25)$$

Mengulangi prosedur ini, didapatkan

$$( ) = (0) + \sum ( ) \qquad (26)$$

Setelah mendapatkan solusi sistem (,), bisa didefinisikan sifat keterkontrolan dari sistem tersebut.

Definisi 5.3 [5] *Suatu sistem* (,) *dinamakan terkontrol jika untuk setiap keadaan awal* $(0) =$, ≥ 0 *dan keadaan akhir* , *terdapat* > 0 *dan vektor kontrol* ( ) *sedemikian hingga solusi dalam persamaan menjadi* ( ) = .

Dengan menggunakan definisi yang diberikan, kita akan mendapatkan syarat untuk keadaan keterkontrolan.

Lemma 5.4 [5] *Syarat perlu dan syarat cukup untuk keadaan keterkontrolan pada persamaan* (23) *adalah*

[ ] =

5.4 Bentuk Alternatif Untuk Keadaan Keterkontrolan

Selain dengan cara yang diuraikan sebelumnya, ada cara lain untuk menentukan apakah suatu sistem terkontrol atau tidak. Yaitu dengan mengubah matriks ke bentuk diagonal atau Jordan.

Teorema 5.5 [5] *Jika matriks adalah matriks diagonal maka sistem* (,) *terkontrol.*

Pertimbangkan sistem didefinisikan oleh (23). Jika semua vektor-eigen berbeda, maka mungkin untuk menemukan matriks transformasi seperti

0

=

0

Dapat diperhatikan bahwa jika nilai-eigen berbeda maka vektor-eigen berbeda.Bagaimanapun, kebalikannya tidak benar.Diperhatikan juga bahwa kolom ke *i* dari matriks adalah vektor-eigen yang bersesuaian dengan nilai-eigen ke *i*, (= 1,2, ,). Didefinisikan

( ) = ( )

maka persamaan (5.10) menjadi

(+ 1) = ( ) + ( )

(+ 1) = (( ) + ( ))

(+ 1) = ( ) + ( )

Didefinisikan

= =

maka,

(+ 1) = ( ) + ( )

(+ 1) 0 ( )

= +

(+ 1) 0 ( )

( )

( )

(+ 1) = ( ) + ( ) +

( ) + + ( )

(+ 1) = ( ) + ( ) +

( ) + + ( )

(+ 1) = ( ) + ( ) +

( ) + + ( )

Jika pada matriks yang berukuran × terdapat vektor baris nol,maka variabel keadaan yang bersesuaian dengan kolom tersebut tidak dapat dikontrol oleh setiap ( ). Oleh sebab itu, syarat untuk keadaan keterkontrol adalah bahwa, jika vektor-eigen berbeda, maka sistem dalam keadaan terkontrol jika dan hanya jika tidak ada vektor baris nol dalam . Hal ini penting untuk dicatat bahwa untuk menerapkan syarat ini pada keadaan terkontrol, kita harus mengubah matriks ke dalam bentuk diagonal.

Jika matriks tidak mempunyai vektor-eigen yang berbeda, maka pendiagonalan tidak mungkin dilakukan.Dalam kasus seperti ini, kita boleh mengubah menjadi bentuk kanonik Jordan. Sebagai contoh, jika mempunyai nilai-eigen , , , , , , , dan mempunyai − 3 vektor-eigen yang berbeda, maka bentuk kanonik Jordan dari adalah

1 0 | 0

0 1 |

0 0 |

− − − | − − |

= | 1 |

| 0 |

| − − | − − −

| 0

|

0 | 0

Submatriks berukuran 3 × 3 dan 2 × 2 pada diagonal utama disebut blok Jordan.

Andaikan mungkin untuk menemukan matriks transformasi sehingga

=

Jika kita definisikan

( ) = ( )

Maka

(+ 1) = ( ) + ( )

(+ 1) = (( ) + ( ))

(+ 1) = ( ) + ( )

(+ 1) = ( ) + ( )(27)

Syarat untuk keadaan keterkontrolan sistem (26) boleh dinyatakan sebagai berikut: sistem dikatakan dalam keadaan terkontrol jika dan hanya jika

a. Tidak ada dua blok Jordan dalam yang bersesuaian dengan nilai-eigen yang sama,
b. Elemen dari vektor baris yang bersesuaian dengan baris terakhir dari masing-masing blok Jordan tidak sama dengan nol,
c. Elemen dari masing-masing baris yang bersesuaian dengan nilai-eigen yang berbeda tidak semuanya nol.

6. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan yaitu

1. Untuk sebarang terdapat = [

   ] dengan , , , , , adalah vektor-eigen tergeneralisasi dari dan nilai *k* tergantung dari nilai (−)dan matriks Jordan sehingga

   =

2. Jika matriks adalah matriks Jordan,syarat untuk keadaan keterkontrolan sistem *(F,G)* boleh dinyatakan sebagai berikut: sistem dikatakan dalam keadaan terkontrol jika dan hanya jika

   Tidak ada dua blok Jordan dalam yang bersesuaian dengan nilai-eigen yang sama,
   a. Kolom yang bersesuaian dengan baris pertama dari masing-masing blok Jordan tidak ada yang elemennya nol semua,
   b. Elemen dari masing-masing kolom yang bersesuaian dengan nilai-eigen yang berbeda tidak semuanya nol.

3. Jika matriks adalah matriks Jordan, syarat untuk keadaan keterkontrolan sistem *(F,G)* boleh dinyatakan sebagai berikut: sistem dikatakan dalam keadaan terkontrol jika dan hanya jika
   a. Tidak ada dua blok Jordan dalam yang bersesuaian dengan nilai-eigen yang sama,
   b. Elemen dari vektor baris yang bersesuaian dengan baris terakhir dari masing-masing blok Jordan tidak sama dengan nol,
   c. Elemen dari masing-masing baris yang bersesuaian dengan nilai-eigen yang berbeda tidak semuanya nol

7. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Chen, Chi-Tsong., (1970), *Linear System Theory and Design*. CBS College Publishing

[2]. Horm, Roger A., Charles R. Johnson, (1990), Matrix Analysis, Cambridge Unversity Press.

[3]. Howard. A. (2000), *Dasar-dasar Aljabar Linear Edisi 7 Jilid 1*. Interaksara P.O. Box 238, Batam Centre, 29432.

[4]. Howard, A. (2000),. *Dasar-dasar Aljabar Linear Edisi 7 Jilid 2*. Interaksara P.O. Box 238, Batam Centre, 29432.

[5]. Katsuhiko, O. (1995), *Discrete-Time Control Systems Second Edition*. Prentice-Hall International, Inc.