SIFAT-SIFAT GRAF $\Re(2^n)$

Erly Listiyana[1] dan Susilo Hariyanto[2]
[1, 2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Jln. Prof. H.Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang

Abstract. A sequence of non negative integers $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ is said a sequence of graphic if it is the degree sequence of a simple graph *G*. In this case, graph *G* is called realization for *d*. The set of all realizations of non isomorfic 2-regular graph with order *n* ($n \geq 3$) is denoted $R(2^n)$, whereas a graph with $R(2^n)$ as set of their vertices is denoted $\Re(2^n)$. Two vertices in graph $\Re(2^n)$ are called adjacent if one of these vertices can be derived from the other by *switching*. In the present paper, we prove that for $n \geq 6$, $\Re(2^n)$ is a connected and bipartite graph.

Keywords: Sequences of graphic, bipartite graph, realization, switching , connected graph.

1. PENDAHULUAN

Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Salah satunya yaitu pada suatu perusahaan yang memiliki *n* pekerja dan perusahaan menginginkan mengatur pekerjanya untuk tokonya dengan kondisi bahwa masing-masing toko harus mempunyai minimal tiga orang pekerja. Apabila ingin lebih efisien maka harus ditentukan pilihan dua toko dijadikan satu atau membagi satu toko menjadi dua toko. Untuk menyelesaikan masalah pengaturan pekerja di atas dapat digunakan graf $\Re(2^n)$ (realisasi dari 2-*regular* graf dengan *n* titik). Selanjutnya ide ini dapat digunakan untuk memperluas penyelesaian paling sedikit *k* masalah pekerja. Oleh karena itu graf $\Re(2^n)$ yang merupakan bentuk khusus dari graf $\Re(d)$ menarik untuk di bahas.

2. DASAR TEORI

Misalkan *G* adalah graf dengan *order n* dan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan titik dari *G*. Barisan $d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dikatakan barisan derajat dari G. Sebuah barisan bilangan bulat tak negatif $d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ adalah barisan grafik jika barisan ini merupakan barisan derajat dari suatu graf sederhana *G*. Dalam hal ini, *G* dikatakan realisasi dari *d*. Notasi $R(d)$ adalah himpunan semua graf yang mempunyai barisan derajat *d*. Suatu graf dikatakan *r-regular* apabila setiap titik dari graf tersebut mempunyai derajat *r*. Barisan derajat dari suatu *r-regular* graf dengan *n* titik dinotasikan dengan $d = r^n$.

Switching pada graf *G* adalah suatu operasi penggantian dari sembarang dua garis *ab, cd* yang merupakan garis pada graf *G* dengan garis *ac, bd* yang bukan merupakan garis pada graf *G*. Graf yang di peroleh dari *G* dengan menghapus *ab*, *cd* dan mengganti garis *ac, bd* dinotasikan dengan G^σ. Operasi σ dikatakan operasi *switching*. Terlihat bahwa graf yang diperoleh dari *G* dengan suatu *switching* memiliki barisan derajat yang sama dengan *G*. Sehingga dapat dikatakan bahwa *switching* merupakan operasi yang mempertahankan derajat.

Definisi 1 [3]

Graf $\Re(d)$ merupakan graf yang titik-titiknya berupa graf dari realisasi-realisasi barisan derajat *d* dan dua titik menjadi *adjacent* pada graf $\Re(d)$ jika titik yang satu dapat diperoleh dari titik yang lain dengan suatu *switching*.

Teorema 2 [4]
Graf $\Re(d)$ adalah terhubung.

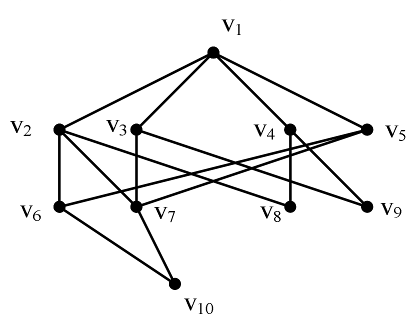
3. PEMBAHASAN

Teorema 2 menjelaskan bahwa Graf $\Re(d)$ adalah terhubung sehingga graf $\Re(2^n)$ yang merupakan kejadian khusus dari graf $\Re(d)$ juga terhubung. Sebagai ilustrasi, diberikan contoh berikut.

Contoh 1.
Misalkan suatu *2-regular* graf *G* dengan *order* 13 dan barisan derajat dari graf *G* dinotasikan $d=2^{13}$. Sehingga dapat ditentukan $R(2^{13})$ yang merupakan himpunan semua *non isomorfik* graf dengan *order* n =13 dengan $n \geq 3$ sebagai berikut:

$v_1 = c_{13}$	$v_2 = c_3 \cup c_{10}$
$v_3 = c_4 \cup c_9$	$v_4 = c_5 \cup c_8$
$v_5 = c_6 \cup c_7$	$v_6 = 2c_3 \cup c_7$
$v_7 = c_3 \cup c_4 \cup c_6$	$v_8 = c_3 \cup 2c_5$
$v_9 = 2c_4 \cup c_5$	$v_{10} = 3c_3 \cup c_4$

Sehingga terdapat 10 *non isomorfik* 2-*regular* graf dengan *order* 13 dan $R(2^{13})$ merupakan himpunan titik dari graf $\Re(2^{13})$, sehingga graf $\Re(2^{13})$ adalah graf yang mempunyai *order* 10. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.1 graf $\Re(2^{13})$

Diberikan suatu graf *G* dan $k(G)$ menyatakan jumlah komponen dari graf *G* serta $k(G^{\sigma})$ adalah jumlah komponen pada graf setelah dilakukan *switching*. Jika *G* adalah sebuah realisasi dari $d=2^n$, maka terdapat bilangan bulat $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sedemikian $n=m_1+m_2+\ldots+m_k$, dan $m_i \geq 3$ untuk i=1,2,… , k.

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} c_{m_i}$$

Sehingga pada kasus ini dapat dituliskan bahwa $k(G) = k$ dan masing-masing komponennya adalah sebuah graf *cycle* dengan *length* (panjang) m_i.

Teorema 3 ([4],[5])
Jika $G \in R(2^n)$ dan σ adalah suatu *switching* pada graf *G*, maka
$|k(G)- k(G^{\sigma})| \leq 1$.

Bukti
Diberikan suatu graf *G* dan *a, b, c, d* dengan empat titik yang berbeda pada *G* sedemikian sehingga $ab,cd \in E(G)$ dan $ac, bd \notin E(G)$. Ambil $\sigma(a,b,c,d) = \sigma$ adalah suatu *switching* pada *G* kemudian dengan menghapus garis *ab, cd* dan menambah garis *ac, bd,* hal ini mempunyai beberapa kemungkinan kasus yaitu sebagai berikut.

Kasus 1**.** Diduga bahwa garis *ab* adalah sebuah garis pada komponen c'_p dan garis *cd* adalah sebuah garis pada komponen yang lain c''_q dari graf *G*. Setelah dilakukan *switching* σ , c'_p dan c''_q akan menjadi sebuah graf *cycle* dengan panjang (*length*) $p + q$. Jadi pada kasus ini jumlah dari komponen setelah dilakukan *switching* berkurang satu. Oleh karena itu dapat dituliskan sebagai berikut:

$$k(G) = k(G^{\sigma}) + 1$$
$$k(G) - k(G^{\sigma}) = 1$$

Kasus 2. Di duga bahwa *ab* dan *cd* adalah garis dalam satu komponen c_m. Setelah di lakukan *switching,* akan ada dua kemungkinan untuk Kasus 2 ini

Kasus 2.1. Komponen c_m dari *G* setelah di lakukan *switching* tetap sama berupa *cycle* yang sama dengan panjang *m*, sehingga $G \cong G^{\sigma}$. Akibatnya $k(G) = k(G^{\sigma})$.

Kasus 2.2. Komponen c_m dari *G* setelah dilakukan *switching* menjadi dua komponen yaitu $c_{m'}$ dan $c_{m''}$, dimana
$m= m' + m''$.

Sehingga $k(G) = k(G^{\sigma}) - 1$

$k(G^{\sigma}) - k(G) = 1$

Oleh karena itu $\left|k(G) - k(G^{\sigma})\right| \leq 1$. ■

Pada Teorema 3 dapat dilihat bahwa G_1, $G_2 \in R(2^n)$ dan σ adalah sebuah *switching* sedemikian sehingga $G_2 = G_1^{\sigma}$ kemudian kedua-duanya G_2 adalah *isomorfik* dengan G_1 atau $\left|k(G) - k(G^{\sigma})\right| = 1$.

Akibat

Jika G_1, $G_2 \in R(2^n)$ dan G_1 *adjacent* dengan G_2 maka $\left|k(G) - k(G^{\sigma})\right| = 1$.

Bukti

G_1 *adjacent* dengan G_2 pada graf $\Re(2^n)$ sehingga berdasarkan Definisi 2.1 terdapat suatu *switching* σ sedemikian sehingga $G_2 = G_1^{\sigma}$. Karena $R(2^n)$ adalah himpunan semua *non-isomorfik* 2-*regular* graf dengan *order* n, sehingga G_1 tidak *isomorfik* dengan G_2. Dengan Teorema 3 diperoleh $\left|k(G) - k(G^{\sigma})\right| = 1$.

Sebuah graf G adalah graf bipartite jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua subset yaitu V_1 dan V_2 sedemikian sehingga masing-masing garis dari G menghubungkan titik V_1 dan titik V_2. Teorema 3.2 menunjukkan bahwa graf $\Re(2^n)$ adalah bipartite.

Teorema 4

Graf $\Re(2^n)$ adalah bipartite untuk $n \geq 6$.

Bukti

$V_1 = \{G \in \Re(2^n) \mid k(G) \text{ adalah ganjil}\}$

dan $V_2 = \{G \in \Re(2^n) \mid k(G) \text{ adalah genap}\}$.

Jika G_1, $G_2 \in V_1$ maka $k(G_1)$ dan $k(G_2)$ adalah ganjil. Ini berarti

$$|k(G_1) - k(G_2)| \neq 1.$$

Dengan akibat 3.1, G_1 tidak *adjacent* dengan G_2. Dengan cara yang sama jika G_1, $G_2 \in V_2$, maka G_1 tidak *adjacent* dengan G_2. Jadi tidak ada dua titik di V_1 dan V_2 yang *adjacent*. Dengan teorema 2.2 graf $\Re(d)$ adalah terhubung (*connected*) sehingga graf $\Re(2^n)$ yang merupakan kejadian khusus dari graf $\Re(d)$ juga terhubung, oleh karena itu masing-masing garis di $\Re(2^n)$ menghubungkan titik V_1 dan V_2. Oleh karena itu graf $\Re(2^n)$ adalah bipartit.

Contoh 2.

Pada Contoh 1 himpunan titik dari graf $\Re(2^{13})$ dapat dibagi menjadi 2 bagian yaitu V_1 dan V_2 sebagai berikut:

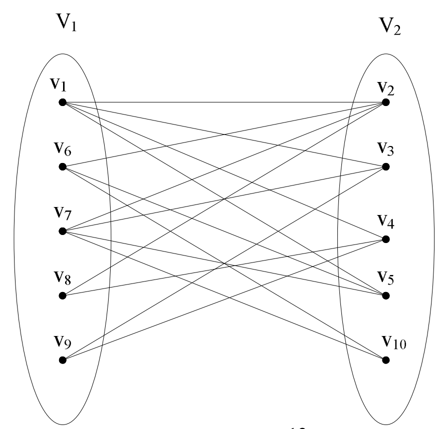
$V_1 = \{G \in R(2^{13}) \mid k(G) \text{ adalah ganjil}\}$

$V_1 = \{v_1, v_6, v_7, v_8, v_9\}$

dan $V_2 = \{G \in R(2^{13}) \mid k(G) \text{ adalah genap}\}$

$V_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_{10}\}$

Gambar graf $\Re(2^{13})$ disajikan dalam bentuk berikut:



Gambar 3.2 Graf $\Re(2^{13})$ Bipartite

4. PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan sebelumnya adalah:

1. $R(2^n)$ adalah himpunan semua realisasi *non isomorfik* 2-*regular* graf dari *order* n. Sedangkan Graf $\Re(2^n)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah $R(2^n)$, dengan $n \geq 3$.
2. Jika graf G dan H pada $\Re(2^n)$ maka terdapat garis GH pada graf $\Re(2^n)$ jika dan hanya jika G dan H tidak isomorfis

dan terdapat suatu switching σ sedemikian sehingga G^{σ} sama dengan H.

3. Graf $\Re$ (d) adalah terhubung, sehingga graf $\Re(2^n)$ yang merupakan kejadian khusus dari graf $\Re$ (d) juga terhubung.
4. Graf $\Re(2^n)$ untuk n $\geq$ 6 adalah bipartit.

4.2 Saran

Dalam artikel ini baru ditunjukkan sifat terhubung dan bipartit dari graf $\Re(2^n)$ untuk n ≥ 6. Struktur dan sifat-sifat yang lain dari grap ini masih dapat dikembangkan.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G dan Lesniak, L. (1996), *Graphs and Digraphs*, Chapman & Hall, New York.

[2] Harju, Tero (2007), *Lecture Notes on Graph Theory*, Department of mathematics University Of Turku, Finland.

[3] Iamjaroen, Chawalit (2007), *Some Properties of Graph* $\Re(2^N)$, International Journal of Computer Science And Network Security, Vol. 7, No. 5 : 90 – 94.

[4] Punnim, Narong (2005), *Switching, Realization and Interpolation Theorems for Graph Parameters*, International Journal of Mathematics and Mathematical Science, Vol. 13 : 2095 – 2117.

[5] Punnim, Narong (2008), *Some Structures Of The Graphs* $\Re(2^N)$, Department Of Mathematics Srinakharinwirot University, Bangkok.