MENENTUKAN DEVIASI DARI HIMPUNAN TERURUT PARSIAL

Amir Kamal Amir
Kelompok Keahlian Aljabar
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin (UNHAS)
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar 90245, Indonesia
amirkamalamir@yahoo.com

Abstract. To measure of how close the ring is to being Artinian ring is used usually so called Krull dimention. In the case of noncommutative rings, the Krull dimention is measured on the lattice of ideals. In this situation, the lattice of ideals is seen as a poset (partial ordered set) and then the deviation of the poset is measured. This paper will describe, completely, deviation of posets including the deviation of product of two posets. Moreover, this paper also will present characteristic of poset which has a deviation and does not have.

Keywords: Artinian, deviation, lattice, poset, descending chain.

1. PENDAHULUAN

Dimensi Krull adalah suatu ukuran yang mengukur tingkat kedekatan suatu gelanggang ke gelanggang yang disebut gelanggang Artinian. Dalam kasus gelanggang komutatif, ukuran yang biasanya digunakan adalah panjang maksimal dari rantai ideal-ideal prim dari gelanggang tersebut. Namun demikian, untuk gelanggang tidak komutatif, ukuran seperti ini bukan merupakan ukuran yang baik. Oleh karena itu, untuk kasus gelanggang tidak komutatif, dimensi Krull diukur pada lattice dari ideal-idealnya. Dalam hal ini, lattice dipandang sebagai himpunan terurut parsial kemudian diukur deviasinya.

Tulisan ini akan membahas secara langkap deviasi dari himpunan terurut parsial termasuk diantaranya:

a. Deviasi hasil perkalian silang dua buah himpunan terurut parsial
b. Ciri-ciri dari himpunan terurut parsial yang mempunyai maupun tidak mempunyai deviasi.

Tujuan dari tulisan ini adalah menentukan deviasi dari himpuan terurut parsial yang nantinya bisa digunakan untuk menghitung deviasi dari lattice suatu gelanggang. Dari deviasi lattice suatu gelanggang dapat ditentukan tingkat kedekatan gelanggang tesebut dengan gelanggang Artinian. Misalnya, apabila deviasi dari lattice suatu gelanggang adalah nol, maka gelanggang tersebut sangat dekat dengan gelanggang Artinian atau dengan kata lain gelanggang tersebut merupakan gelanggang Artinian.

2. PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan disajikan pengertian, contoh, dan cara menetukan deviasi dari suatu himpunan terurut parsial, termasuk deviasi dari himpunan hasil kali silang dua himpunan terurut parsial. Selain dari itu, akan diuraikan juga cirri-ciri dari himpunan yang mempunyai atau tidak mempunyai deviasi.

Sebelum membahas pengertian deviasi, disajikan terlebih dahulu pengertian himpunan terurut parsial sekedar menyegarkan kembali ingatan tentang himpunan tersebut.

Defenisi 1 [2]

Suatu urutan parsial adalah suatu relasi biner, biasanya disimbol dengan "$\leq$" pada suatu himpunan P yang memnuhi sifat refleksif, anti simetris, dan transitif. Artinya, untuk setiap a, b, dan c dalam *P*, relasi biner "≤" memenuhi:

a. $a \le a$ (sifat refleksif)
b. Jika $a \le b$ dan $b \le a$, maka $a = b$ (sifat anti simetris)
c. Jika $a \le b$ dan $b \le c$, maka $a \le c$ (sifat trnasitif)

Himpunan dengan suatu urutan parsial disebut himpunan terurut parsial.

Contoh 1

1. Himpunan bilangan riil dengan urutan parsial "*lebih kecil atau sama dengan*", merupakan himpunan terurut parsial.
2. Himpunan kuasa (himpunan yang memuat himpunan bagian dari suatu himpunan) dengan uruatan parsial "*himpunan bagian dari*", merupakan himpunan terurut parsial.

2.1 Pengertian dan contoh deviasi

Jika *a, b* adalah merupakan anggota dari himpunan terurut parsial *A*, dan $a \ge b$, maka didefinisikan $a/b = \{x \in A \mid a \ge x \ge b\}$. Himpunan ini merupakan himpunan bagian dari *A* disebut faktor dari *a* oleh *b*. Suatu rantai menurun $\{a_n\}$ dari himpuna *A*, diartikan bahwa $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$. Himpunan terurut parsial *A* dikatakan memenuhi **kondisi rantai menurun (d.c.c)** apabila setiap barisan menurun dari *A* berujung pada elemen yang sama. Selanjutnya, yang dimaksud dengan **himpunan terurut parsial sangat sederhana** adalah hipunan terurut parsial yang tidak mempunyai dua elemen yang berbeda yang dapat dibandingkan [1, 4].

Defenisi 2 [2, 3]

Deviasi dari himpunan terurut parsial *A* disimbol dengan *dev A* dan didefinisikan sebagai berikut*:*

1. $dev\, A = -\infty$ jika *A* merupakan himpunan terurut parsial sangat sederhana.
2. $dev\, A = 0$ jika *A* bukan merupakan himpunan terurut parsial sangat sederhana tetapi *A* memenuhi kondisi rantai menurun (d.c.c).
3. $dev\, A = \alpha$ dengan α adalah bilangan ordianal, jika memenuhi:
   a. $dev\, A$ tidak sama dengan suatu bilangan ordinal yang lebih kecil dari α
   b. Dalam setiap rantai menurun elemen-lemen dari *A,* misalnya barisan menurun $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$, semua faktor (pengertian faktor diberikan di atas) dari barisan tersebut (dalam barisan ini ada tak berhingga banyaknya faktor) mempunyai deviasi yang lebih kecil dari α kecuali ada berhingga banyaknya faktor yang mempunyai deviasi **tidak** lebih kecil dari α.

Contoh 2 [3]

Misalkan *A* adalah himpunan terurut parsial seperti $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dengan urutan yang didefinisikan sebagi $a_i > a_j$ jika dan hanya jika $i < j$. Dengan mudah dapat dilihat bahwa *A* mempunyai dua elemen yang berbeda yang dapat dibandingkan. Jadi *A* **bukan** merupakan himpunan terurut parsial sangat sederhana, sehingga .menurut definisi $dev\, A \ne -\infty$. Selanjutnya ambil rantai menurun pada *A*, misalnya $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$. Rantai ini menunjukkan bahwa *A* tidak memenuhi kondisi rantai menurun. Sehingga menurut definisi $dev\, A \ne 0$. Pada sisi lain, amati setiap faktor dari barisan tersebut, $a_i / a_j = \{x \in A \mid a_i > x > a_j\}$ dengan $i < j$. Faktor-faktor tersebut memenuhi kondisi rantai menurun (d.c.c) sehingga menurut definisi, deviasi faktor-faktor ini adalah nol. Dengan demikian jika $\alpha = 1$ maka ini akan memenuhi definisi di atas. Jadi disimpulkan bahwa $dev\, A = 1$.

2.2 Deviasi dari beberapa jenis himpunan terurut parsial

Hasil berikut menghubungkan antara deviasi himpunan terurut parsial dengan himpunan bagaian tertentunya.

Teorema 3

Jika B adalah suatu himpunan bagian dari himpunan terurut parsial A, maka $dev\, B \le dev\, A$.

Bukti:

Pernyataan ini jelas benar untuk $dev\, A = -\infty$ atau 0. Sekarang dimisalkan pernyataan benar untuk himpunan terurut parsial dengan deviasi kecil dari deviasi A. Faktor-faktor dari sembarang rantai dalam B merupakan himpunan bagian terurut parsial dari faktor-faktor yang sama dengan rantai dalam A. Dari sini dapat dilihat bahwa semua kecuali cuma berhingga banyaknya faktor-faktor dari barisan yang dimaksud mempunyai deviasi lebih kecil dari deviasi A. Jadi $dev\, B \le dev\, A$.

Teorema 4

a. Untuk sembarang poset A

$$\sup\{dev(a/b) \mid a,b \in A\} \le dev\, A \le \sup\{dev(a/b)+1\}$$

b. Jika A mempunyai elemen terkecil, sebut saja 0, maka

$$dev\, A \le \sup\{dev(a/b)+1 \mid b \ne 0\}$$

Bukti:

a. Pertidaksamaan pertama mengikut langsung dari teorema 2.5. Untuk pertidaksamaan kedua, catat bahwa dalam setiap rantai $\{a_i\}$ dari A, setiap faktor akan mempunyai $dev(a_i/a_{i+1}) < \sup\{dev(a/b)+1\}$.

   Sehingga dengan memncermati definisi deviasi dapat dilihat dengan mudah bahwa $dev\, A \le \sup\{dev(a/b)+1\}$.

b. Pada sembarang rantai, terdapat paling banyak satu faktor a_i/a_{i+1} dengan $a_{i+1} = 0$ dan $a_i \ne 0$. Jadi dengan argument yang sama dengan bagian a dibuktikan bahwa $dev\, A \le \sup\{dev(a/b)+1 \mid b \ne 0\}$.

Teorema 5

Jika $dev\, A = \alpha$ dan $\beta < \alpha$, maka terdapat suatu rantai $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dalam A sedemikian sehingga $dev(a_i/a_{i+1}) = \beta$ untuk setiap i.

Bukti:

Pembuktian dilakukan dengan induksi pada α. Untuk kasus $\alpha = 0$ sudah jelas terbukti karena kita bisa mengambil suatu rantai dalam A dimana faktor dari rantai tersebut merupakan himpunan sangat sederhana sehingga deviasi himpunan tersebut sama dengan $-\infty$. Selanjutnya perlu dicatat bahwa jika dalam setiap rantai $\{a_i\}$ dari A, kita mempunyai $dev(a_i/a_{i+1}) < \beta$ untuk semua, kecuali berhingga banyaknya i, maka menurut definisi $dev\, A \le \beta$. Hal ini merupakan suatu kontradiksi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa A memuat satu rantai $\{a_i\}$ yang mempunyai tak berhingga faktor-faktor dengan deviasi sama dengan β atau lebih. Konsenttrasi dipindahkan ke subrantai dan menggunakan teorema 2.5, kita bisa mengasumsikan bahwa $dev(a_i/a_{i+1}) \ge \beta$ untuk semua i.

Selanjutnya perlu juga dicatat bahwa, $dev(a_i/a_{i+1}) < \alpha$ untuk semua, kecuali berhingga banyak i. Jadi, jika konsentrsai diarahkan lagi ke subrantai, dapat lagi diasumsikan bahwa $dev(a_i/a_{i+1}) < \alpha$ untuk semua i.

Sekarang, jika $\alpha = \beta + 1$, maka rantai $\{a_i\}$ yang dimaksud di atas memenuhi $dev(a_i/a_{i+1}) = \beta$. Pada sisi lain, jika $\alpha > \beta + 1$, maka argumentasi di atas dijalankan untuk $\beta + 1$ sebagai ganti dari β dan memberikan suatu faktor a/b sedemikian sehingga $\beta + 1 \le dev(a/b) < \alpha$. Hipotesis induksi memberikan suatu rantai $\{a_i\}$ dalam a/b dengan $dev(a_i/a_{i+1}) = \beta$

untuk semua *i.* dan tentu saja rantai $\{a_i\}$ ini juga merupakan rantai dalam *A*.
Hasil berikut merupakan hasil perhitungan deviasi dari perkalian silang dua himpunan. Dalam hal ini perlu dicatat bahwa jika *A, B* adalah himpunan terurut parsial yang tidak kosong, maka *AxB* juga merupakan himpunan terurut parsial dengan urutan diberikan sebagai $(a_1,b_1) \geq (a_2,b_2)$ jika dan hanya jika $a_1 \geq a_2$ dan $b_1 \geq b_2$.

Teorema 6
$dev(A \times B) = \sup\{dev\, A,\, dev\, B\}$
Bukti:
Perhatikan bahwa untuk sebarang $b \in B$, $A \times B \supseteq A \times \{b\} \supseteq A$. Oleh karena itu, dengan teorema 2.5 diperoleh $dev\, A \leq dev\, A \times B.$ Oleh karena itu, $dev\, A \times B \geq \sup\{dev\, A, dev\, B\}$. Sekarang misalkan $\sup\{dev\, A, dev\, B\} = \gamma$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $dev\, A \times B \leq \gamma$. Proses pembuktian ini menggunakan pembuktian induksi terhadap γ.
Jika $\gamma = 0$, maka $dev\, A \times B \leq \gamma$ jelas benar. Secara umum, misalkan

$$(a_1,b_1) \geq (a_2,b_2) \geq \cdots$$

Adalah suatu rantai dalam *AxB.* Untuk *n* yang cukup besar, $dev(a_n/a_{n+1}) < dev\, A$ dan $dev(b_n/b_{n+1}) < dev\, B$. Dari sini, dengan induksi,

$$dev[(a_n / a_{n+1}) \times (b_n / b_{n+1})] < \sup\{dev(a_n / a_{n+1}), dev(b_n / b_{n+1})\} < \gamma$$

Tetapi

$$(a_n / a_{n+1}) \times (b_n / b_{n+1}) \subseteq (a_n, b_n) \times (a_{n+1}, b_{n+1})$$

Oleh karena itu, $dev\, A \times B \leq \gamma$. Pada bagian atas sudah ditujukkan bahwa $dev\, A \times B \geq \gamma$, sekarang ditunjukkan bahwa $dev\, A \times B \leq \gamma$. Dengan demikian terbukti bahwa $dev\, A \times B \leq \gamma$ atau $dev(A \times B) = \sup\{dev\, A,\, dev\, B\}$.

2.3 Himpunan terurut parsial yang tidak mempunyai deviasi

Pada bagian ini akan diuraikan bentuk himpunan terurut parsial yang tidak memiliki deviasi. Perhatikan himpunan berikut:

$$D = \{m/n \in Q \mid 0 \leq (m/n) \leq 1,\ n \text{ adalah perpangkatan dari } 2\}$$

Himpunan *D* dapat dikontruksi dengan melakukan pembagian 2 berulang-ulang dimulai dari himpunan *{0, 1}.* Dari bentuk himpuna *D* seperti di atas, dapat diperiksa bahwa untuk setiap $0 \neq (m/n) \in D$, terdapat suatu isomorfisma antara *D* dan $D \cap [m/2n,\, m/n]$ yang diberikan oleh pengawanan $d \mapsto (d+1)m/2n.$ Hal ini membuat jelas bahwa *D* mempunyai suatu rantai tak berhingga, yaitu $\{2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ dengan faktor-faktor yang mempunyai deviasi yang sama seperti yang dimiliki oleh *D* sendiri. Sedangkan berdasarkan definisi deviasi, *D* tidak mungkin mempunyai deviasi yang sama dengan tak berhingga banyak faktor-faktor dari suatu rantianya. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa *D* tidak mempunyai deviasi.
Teorema berikut ini memaparkan bentuk himpunan terurut parsial yang tidak mempunyai deviasi.

Teorema 7
Suatu himpunan terurut *A* tidak mempunyai deviasi jika dan hanya jika *D* dapat dipetakan ke dalam *A*.
Bukti:
$(\Leftarrow)$
jika *D* dapat dipetakan ke dalam *A,* berarti *D* isomorfik dengan suatu himpunan bagian dari *A*. Dengan demikian menggunakan teorema 2.5 terbukti bahwa *A* tidak mempunyai deviasi.
$(\Rightarrow)$
Misalkan $dev\, A$ tidak ada. Perhatikan himpunan semua ordinal-ordinal yang muncul sebagai *dev(a/b)* untuk suatu $a/b \in A.$ Himpunan ini mempunyai suprimum, katakanlah γ. Dengan

menggunakan definisi, karena $dev\, A \leq \gamma + 1$, maka *A* memuat suatu rantai $\{a_i\}$ yang mempunyai tak berhingga banyak faktor-faktor dengan deviasi tidak sama dengan γ atau lebih kecil. Hal ini tentu saja berarti bahwa, faktor-faktor tersebut tidak mempunyai deviasi.
Perhatikan satu faktor, misalkan *a/b*. Argumen yang sama dengan di atas diaplikasikan ke himpunan terurut *a/b*. Tentu saja hal ini mengakibatkan bahwa terdapat *c* dalam *a/b* sedemikian sehingga *a/c* dan *c/b* tidak mempunyai deviasi. Langkah ini terus diaplikasikan ke kedua faktor-faktor yang baru ini, sehingga dapat dikontruksi suatu himpunan bagian dari *a/b* yang disomorfik dengan *D*. Sehingga *D* tidak mempunyai deviasi karean setiap factor tidak mempunyai deviasi.

4. KESIMPULAN

Dari pemaparan tentang deviasi dari himpunan terurut parsial dapat ditarik beberapa kesimpulan:

1. Deviasi dari suatu himpunan terurut parsial tidak selalu ada. Ada atau tidak adanya deviasi tergantung dari jenis himpunan terurut parsial yang bersangkutan.
2. Deviasi dari himpunan bagian terurut parsial dari suatu himpunan terurut parsial selalu lebih kecil atau sama dengan deviasi himpunan induknya.
3. Deviasi dari hasil perkalian dua himpunan terurut parsial diperoleh dari deviasi tertinggi dari masing-masing himpunan yang diperkalikan.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] K.R. Goodearl dan R.B. Warfield. (1989), *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University press.
[2] A.V. Jategaonkar. (1986), *Localization in Noetherian Rings*, Cambridge University press.
[3] J.C. McConnell, J.C. Robson, (1987), *Noncommutative Noetehrian Rings*, John Wiley and Sons, Inc.
[4] D.S. Passman. (1991), *A Course in Ring Theory*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.