

# MODIFIKASI MODEL PENJALARAN GELOMBANG MULTI ARAH

Marwan

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Syiah Kuala  
Banda Aceh

**Abstract.** In this paper we derived a modification of the model of waves evolution in two-directional spatial coordinates. Using KP equation as the basic model, we improved dispersive property in spatial  $x$  coordinate and named it as improved KP (iKP) equation. iKP has an exact dispersion relation in spatial  $x$  coordinate. Using this model, we derived second order regular waves and analyzed the expression of Maximum Temporal Amplitude.

**Keywords :** KP equation, iKP equation, Maximum Temporal Amplitude

## 1. PENDAHULUAN

Artikel ini merupakan hasil awal dari studi interaksi gelombang dan aplikasinya pada pembangkitan gelombang ekstrim, fokus kajian adalah gelombang dengan segala arah (multi directional waves). Model matematika dalam penelitian tersebut adalah persamaan KP (*Kadomtsev-Petviashvili*), sedangkan masalah yang dikaji tentang perilaku interaksi gelombang yang menghasilkan gelombang ekstrim.

Dalam artikel ini disajikan model perbaikan (*improved*) terhadap model penjalaran gelombang multi arah yang dinyatakan oleh persamaan KP standar yang diajukan dalam penelitian sebelumnya. Persamaan KP standar sebagai model penjalaran gelombang multi arah memiliki keterbatasan, khususnya dalam mengcover bilangan-bilangan gelombang dalam domain interaksi gelombang yang menghasilkan deformasi gelombang, lihat [1,2,7,11,12].

Perbaikan model penjalaran multi arah ini difokuskan pada bagian dispersif gelombang, yaitu pada bagian linear, khususnya pada bagian spatial  $x$ . Perbaikan tersebut hanya pada arah dominan dimana gelombang menjalar. Dengan memperbaiki sifat dispersif gelombang, dihasilkan persamaan iKP (*improved KP*) sebagai perbaikan dari persamaan KP standar. Dengan model ini diturunkan juga hampiran selesaian yang berupa gelombang regular dan MTA gelombang

untuk gelombang yang menjalar hampir satu arah.

### Persamaan improved KP (iKP)

Persamaan gelombang panjang dengan amplitudo kecil yang merambat dua arah dalam variable normal (tanpa dimensi) dinyatakan oleh persamaan berikut

$$\partial_x \left( \partial_t u + \partial_x u + \frac{1}{6} \partial_{xxx} u + \frac{3}{4} \partial_x (u^2) \right) + \mu \partial_{yy} u = 0. \quad (1)$$

Persamaan ini dikenal sebagai persamaan KP (*Kadomtsev-Petviashvili*), lihat [10]. Untuk  $\mu = 0$ , persamaan ini dikenal sebagai persamaan KdV (*Korteweg de Vries*). Persamaan (1) merupakan persamaan tak linear dengan bagian linear berbentuk

$$\partial_x \left( \partial_t u + \partial_x u + \frac{1}{6} \partial_x^3 u \right) + \mu \partial_y^2 u = 0.$$

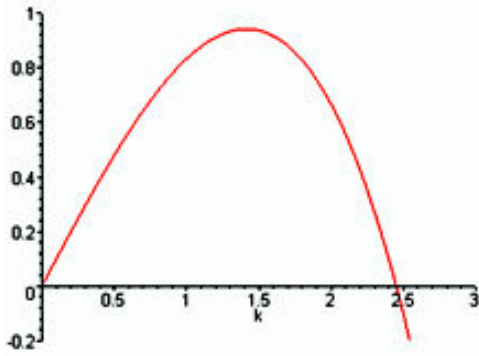
Bagian linear persamaan (1) memiliki relasi dispersi

$$\omega = k - \frac{1}{6} k^3 + \mu \frac{l^2}{k}. \quad (2)$$

Bagian spatial  $x$ , memiliki relasi dispersi

$$\omega^{(x)} = k - \frac{1}{6} k^3,$$

secara grafik relasi dispersi ini diberikan oleh Gambar 1 berikut ini.



**Gambar 1. Grafik Relasi Dispersi**

Fungsi  $\omega^{(x)}$  memiliki maksimum  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ , dengan demikian range dari  $\omega^{(x)}$  adalah  $(-\infty, \frac{2}{3}\sqrt{2})$ . Untuk kajian interaksi gelombang, frekuensi gelombang yang digunakan (dalam variable yang dinormalisasi) berada pada interval  $(2, \pm 5)$ , lihat [1,2,7,11,12]. Dengan demikian range frekuensi persamaan KP standar, khususnya untuk variable spatial  $x$ , tidak memenuhi keadaan di laboratorium. Oleh karena itu apabila model ini akan digunakan sebagai model gelombang penjalaran dua arah, maka perlu dilakukan perbaikan (improved) pada bagian dispersi linearnya. Pada kajian ini perbaikan dikhususkan pada variable spatial  $x$ , dengan asumsi arah penjalaran lebih dominant pada variable tersebut.

Untuk memperbaiki relasi disperse, akan dilakukan dengan menggunakan analogi perbaikan pada gelombang satu arah. Perbaikan dilakukan dengan langkah-langkah berikut: perhatikan bahwa relasi dispersi (2), dapat dituliskan sebagai

$$k\omega = k^2 - \frac{1}{6}k^4 + \mu l^2 = k\omega^{(x)} + \mu l^2$$

persamaan diferensial diferensial yang terkait

$$\partial_x \partial_t u = -\partial_x^2 u - \frac{1}{6} \partial_x^4 u - \mu \partial_y^2 u \quad (3)$$

yang diperoleh dari pengaitan  $k \leftrightarrow -i\partial_x, l \leftrightarrow -i\partial_y, \omega \leftrightarrow -i\partial_t$ . Perhatikan bahwa persamaan (3) adalah bagian linear

dari persamaan KP (1). Dengan demikian, apabila didefinisikan fungsi

$$\Lambda^{KP}(k, l) = k^2 - \frac{1}{6}k^4 + \mu l^2 = k\omega^{(x)} + \mu l^2 \quad (4)$$

maka relasi dispersi (2) dapat ditulis sebagai  $\omega = \Omega(k, l) = \frac{\Lambda(k, l)}{k}$ . Selanjutnya

persamaan KP (1) bila dituliskan seperti operator disperse (*dispersion like operator*) adalah sebagai berikut

$$\partial_{xt}^2 u - \Lambda^{KP}(-i\partial_x, -i\partial_y)u + \frac{3}{4}\partial_x^2(u^2) = 0. \quad (5)$$

Seperti diketahui bahwa gelombang permukaan air memiliki relasi disperse eksak, lihat [6,10]

$$\omega_{exact} = k \sqrt{\frac{\tanh(k)}{k}}$$

Oleh karena itu, bila  $\omega^{(x)}$  pada (4) disubstitusi dengan  $\omega_{exact}$ , maka akan diperoleh

$$\Lambda^{exact}(k, l) = k\omega_{exact} + \mu l^2 = k^2 \sqrt{\frac{\tanh(k)}{k}} + \mu l^2. \quad (6)$$

**Catatan:** Apabila dilakukan perbaikan relasi disperse pada kedua arah penjarannya, maka (6) dapat dituliskan sebagai

$$\Lambda(k, l) = k^2 \sqrt{\frac{\tanh(k)}{k}} + \mu l \sqrt{\frac{\tanh(l)}{l}}$$

Dengan perbaikan (6), persamaan iKP (improve KP) dituliskan sebagai berikut

$$\partial_{xt}^2 u - \Lambda^{exact}(-i\partial_x, -i\partial_y)u + \frac{3}{4}\partial_x^2(u^2) = 0.$$

Untuk kepentingan penulisan selanjutnya, memudahkan penulisan persamaan iKP dituliskan kembali menjadi

$$\partial_{xt}^2 u - \Lambda(-i\partial_x, -i\partial_y)u + \frac{3}{4}\partial_x^2(u^2) = 0. \quad (7)$$

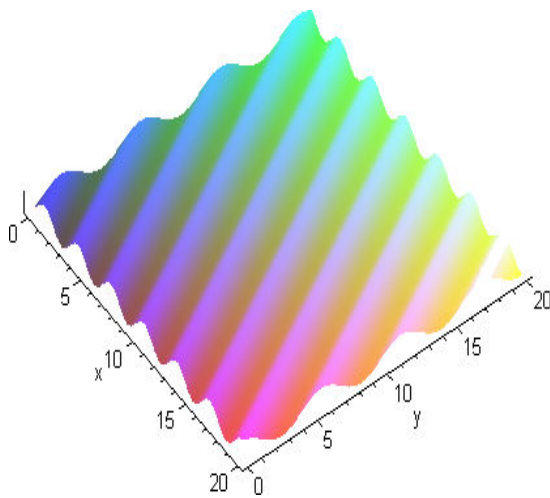
**Karakteristik Gelombang multi arah Persamaan iKP**

Sebelum mengkaji lebih jauh tentang gelombang multi arah yang

dimodelkan oleh persamaan (7), terlebih dahulu akan dikaji profil gelombang linearnya. Bagian linear dari persamaan (7) memiliki relasi dispersi (6), dengan demikian ekspresi matematika gelombang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u_l(x, y, t) = q \cos(kx + ly - \omega t),$$

dengan  $k, l$  memenuhi relasi dispersi (6). Profil gelombang untuk suatu nilai  $k, l$  tertentu disajikan dalam gambar berikut:

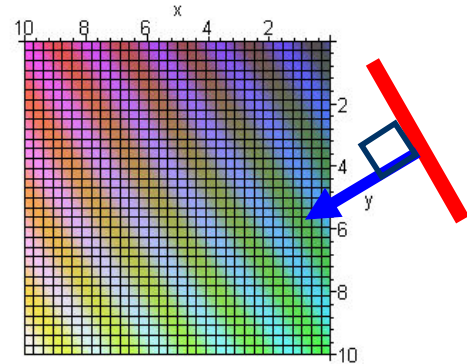


**Gambar 2. Profil gelombang 2 arah untuk suatu waktu tertentu**

Tampak pada Gambar 1 di atas, dua jenis gelombang. Gelombang pada bidang spatial  $x$  dan gelombang pada bidang spatial  $y$ . Kedua gelombang tersebut memiliki arah penjalaran gelombang tertentu. Arah penjalaran gelombang tersebut dapat diidentifikasi dari phase gelombang  $\theta = kx + ly - \omega t$ , untuk  $\theta_0$  tertentu

$$y = -\frac{k}{l}x + \frac{\omega}{l}t_0 + \frac{\theta_0}{l}$$

$$y = -\frac{k}{l}x + C$$



**Gambar 3. Arah penjalaran gelombang multiarah**

Berdasarkan sifat arah penjalaran gelombang multi arah, dengan tidak mengurangi keumuman pengkajian terhadap dinamika gelombang multi arah, maka bilangan gelombang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$k = r\delta, \quad l = r\sqrt{1 - \delta^2}. \quad (8)$$

Arah penjalaran gelombang untuk waktu tertentu dinyatakan oleh gradien

$$m = -\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}.$$

### Evolusi Tak Linear Gelombang Regular Multiarah Orde Dua

Pada bagian ini akan dibahas hampiran selesaian persamaan iKP (7) yang berupa gelombang monokromatik. Hampiran selesaian tersebut dinyatakan oleh

$$U = \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \varepsilon^3 U^{(3)} \dots \quad (9)$$

dengan selesaian pada orde pertama berbentuk

$$u^{(1)} = qe^{i\theta} + c.c., \quad \theta = k_0x + l_0y - \omega_0t, \quad (10)$$

dengan  $k_0, l_0$ , dan  $\omega_0$  memenuhi relasi dispersi

$$\omega_0 = \Omega(k_0, l_0) = \frac{\Lambda(k_0, l_0)}{k_0} = k_0 \sqrt{\frac{\tanh(k_0)}{k_0}} + \mu \frac{l_0^2}{k_0}.$$

Serta memenuhi syarat pada posisi awal

$$u^{(1)}(0, 0, t) = q \cos(\omega_0 t), \quad u^{(j)}(0, 0, t) = 0, \quad j = 2, 3$$

Oleh karena (10) bukan penyelesaian persamaan (7), maka akan menghasilkan *residu*. *Residu* ini terdiri dari *suku-suku residu* yang diantaranya memuat suku resonansi, khususnya *suku residu* orde ketiga. Kehadiran suku resonansi harus dieliminasi, oleh karena itu penyelesaian (10) harus dimodifikasi khususnya pada bilangan gelombang. Tidak hanya amplitude yang diekspansi, tetapi bilangan gelombang juga harus dieskansi. Ekspansi bilangan gelombang dilakukan dengan metode Linstead-Poincare [3, 10], dimana kedua bilangan gelombang  $k_0, l_0$  diekspansi sebagai berikut

$$k_0 = k_0^{(0)} + \varepsilon k_0^{(1)} + \varepsilon^2 k_0^{(2)} + \dots \quad (11)$$

$$l_0 = l_0^{(0)} + \varepsilon l_0^{(1)} + \varepsilon^2 l_0^{(2)} + \dots$$

Hubungan antara (11) dengan (8) adalah sebagai berikut

$$r = r^{(0)} + \varepsilon r^{(1)} + \varepsilon^2 r^{(2)} + \dots \quad (12)$$

$$k_0^{(j)} = \delta r^{(j)}, \quad l_0^{(j)} = \sqrt{1 - \delta^2} r^{(j)}$$

Substitusi hampiran (9) dengan ekspansi bilangan gelombang (11) ke dalam persamaan (7) menghasilkan persamaan residu sebagai berikut:

$$res = \varepsilon(res_1) + \varepsilon^2(res_2) + \varepsilon^3(res_3) + O(\varepsilon^4). \quad (13)$$

Suku residu orde pertama diberikan oleh

$$res_1 = q \left[ k_0^{(0)} \omega_0 - \Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) \right] e^{i\theta} + c.c \quad (14)$$

suku residu ini harus dibuat sekecil mungkin, dengan kata lain suku ini akan bernilai 0 apabila  $k_0^{(0)} \omega_0 - \Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) = 0$ , atau relasi dispersi untuk  $k_0^{(0)}, l_0^{(0)}$  yang dinyatakan oleh

$$\omega_0 = \Omega(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) = \frac{\Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)})}{k_0^{(0)}}.$$

Suku residu orde dua berbentuk

$$res_2 = u_{xt}^{(2)} - \Lambda(-i\partial_x, -\partial_y) u^{(2)} - 3q^2 (k_0^{(0)})^2 e^{2i\theta} - \left( k_0^{(1)} \left[ \frac{\partial}{\partial k_0^{(0)}} \Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) - \omega_0 \right] + l_0^{(1)} \frac{\partial}{\partial l_0^{(0)}} \Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) \right) q e^{i\theta} \quad (15)$$

suku ini memuat suku resonansi; ditandai oleh faktor  $e^{i\theta}$ . Oleh karena itu suku ini harus dihilangkan, dengan pilihan

$$k_0^{(1)} = 0, \quad l_0^{(1)} = 0. \quad (16)$$

Selanjutnya suku residu orde dua juga harus dibuat sekecil mungkin, menghasilkan persamaan yang harus dipenuhi oleh  $u^{(2)}$

$$u^{(2)}(x, y, t) = u_{bw}^{(2)}(x, y, t) + u_{free}^{(2)}(x, y, t) \quad (17)$$

dimana

$$u_{bw}^{(2)} = \frac{3}{2} q^2 s e^{2i\theta} + c.c \quad (18)$$

$$u_{free}^{(2)} = -\frac{3}{2} q^2 s e^{i\Theta(2\omega_0)} + c.c$$

dengan  $s = \frac{k_0^{(0)}}{2\omega_0 - \Omega(2k_0^{(0)}, 2l_0^{(0)})}$  dan

$$\Theta(2\omega_0) = \tilde{k}x + \tilde{l}y - 2\omega_0 t.$$

**Catatan:** Bilangan gelombang  $\tilde{k}, \tilde{l}$  diperoleh dari proses inversi

$$2\omega_0 = \frac{\Lambda(\tilde{k}, \tilde{l})}{\tilde{k}}.$$

Proses invers ini akan lebih mudah apabila bilangan gelombang tersebut dinyatakan dalam  $r$ , seperti yang dinyatakan dalam (8). Dengan menuliskan dalam  $r$ , persamaan tersebut dinyatakan oleh

$$2\omega_0 = r\delta\sqrt{\frac{\tanh(r\delta)}{r\delta}} + \mu\frac{1-\delta^2}{\delta}r. \quad (19)$$

Suku residu orde ketiga berbentuk

$$res_3 = u_{xt}^{(3)} - \Lambda(-i\partial_x, -i\partial_y)u^{(3)} + F_{res}^{(3)}. \quad (20)$$

Suku  $F_{res}^{(3)}$  merupakan suku yang menimbulkan resonansi, suku ini diperoleh dari interaksi linear dari  $u^{(1)}$  pada bagian linear persamaan (7), yang dinyatakan oleh

$$-q\left[k_0^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial k_0^{(0)}}\Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) - \omega_0\right) + l_0^{(2)}\frac{\partial}{\partial l_0^{(0)}}\Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)})\right]e^{i\theta} \quad (21)$$

Suku selanjutnya diperoleh dari interaksi tak linear

$$\frac{3}{4}\partial_x^2(u)^2 = \frac{3}{4}\partial_x^2(\epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots)^2,$$

pada  $O(\epsilon^3)$  memuat suku-suku

$$\frac{3}{2}\left[u^{(1)}\partial_x^2 u^{(2)} + u^{(2)}\partial_x^2 u^{(1)} + 2\partial_x u^{(1)}\partial_x u^{(2)}\right],$$

setelah fungsi  $u^{(1)}$  disubstitusikan menghasilkan

$$\frac{3}{2}q\left[\partial_x^2 u^{(2)} - (k_0^{(0)})^2 u^{(2)} + 2ik_0^{(0)}\partial_x u^{(2)}\right]e^{i\theta} + c.c. \quad (22)$$

Suku (22) menjadi suku resonansi, bila bagian konjugate dioperasikan dengan fungsi  $u^{(2)}$  pada (17), yang menghasilkan

$$-\frac{9}{4}q^3 s (k_0^{(0)})^2 e^{i\theta}. \quad (23)$$

Dengan demikian dari (21) dan (23), maka suku  $F_{res}^{(3)}$  berbentuk

$$F_{res}^{(3)} = -\left[\frac{9}{4}q^3 s (k_0^{(0)})^2 + k_0^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial k_0^{(0)}}\Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) - \omega_0\right) + l_0^{(2)}\frac{\partial}{\partial l_0^{(0)}}\Lambda(k_0^{(0)}, l_0^{(0)})\right]qe^{i\theta} \quad (24)$$

**Catatan:** suku residu (24) yang juga merupakan suku resonansi harus dieliminir

agar selesaian orde rendah persamaan (7) tidak terjadi resonansi. Agar suku resonansi ini dapat dieliminir, ada beberapa pilihan yang dapat dilakukan:

- $l_0^{(2)} = 0$  dan  $k_0^{(2)} \neq 0$ ; atau
- $l_0^{(2)} \neq 0$  dan  $k_0^{(2)} = 0$ ; atau
- $l_0^{(2)} \neq 0$  dan  $k_0^{(2)} \neq 0$ .

Pilihan yang pertama tentu saja membawa konsekuensi terhadap tidak adanya koreksi terhadap bilangan gelombang terhadap arah y. Demikian sebaliknya untuk pilihan yang kedua. Pertanyaan yang timbul adalah, apakah memang tidak ada koreksi terhadap bilangan gelombang-bilangan gelombang tersebut? Tentu saja pertanyaan ini tidak secara mudah dapat dijawab, karena menyangkut seberapa besar kontribusi gelombang pada arah masing-masing. Pilihan ketiga akan memberikan kontribusi adanya koreksi bilangan gelombang untuk masing-masing arah. Persoalan yang timbul pada saat pilihan ini diambil adalah kedua koreksi bilangan gelombang masing-masing terikat secara implisit sehingga tidak secara mudah dapat ditentukan. Selanjutnya dengan menggunakan hubungan (12.) koefisien resonansi (24) dapat direduksi menjadi:

$$\left(\delta r^{(2)}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) - \omega_0\right] + \sqrt{1-\delta^2}r^{(2)}\frac{\partial\Lambda}{\partial l_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) + \frac{9}{4}q^2(k_0^{(0)})^2 s\right) = 0 \quad (25)$$

Selesaian (25) terhadap  $r_{(2)}$  menghasilkan

$$r_{(2)} = -\frac{9q^2(k_0^{(0)})^2 s}{4\left(\delta\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) - \omega_0\right] + \sqrt{1-\delta^2}\frac{\partial\Lambda}{\partial l_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)})\right)} \quad (26)$$

**Catatan:** Untuk kasus  $\delta=1$  persamaan (26) menjadi

$$r_{(2)} = -\frac{9q^2(k_0^{(0)})^2 s}{4\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) - \omega_0\right)}$$

perhatikan bahwa bagian penyebut suku ini memuat  $\frac{\partial \Lambda}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) - \omega_0$ . Secara

sepintas, koefisien koreksi (26) tersebut tidak sama dengan pada kasus gelombang yang menjalar satu arah, lihat [3]. Tetapi, perhatikan bahwa pada relasi dispersi  $k\Omega(k, l) = \Lambda(k, l)$

$$k \frac{\partial \Omega}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) + \omega_0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)})$$

$$k \frac{\partial \Omega}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) = \frac{\partial \Lambda}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, l_0^{(0)}) - \omega_0$$

dan

$$k_0^{(2)} = \delta r^{(2)} = r^{(2)}, \quad k_0^{(0)} = \delta r^{(0)} = r^{(0)}$$

$$l_0^{(2)} = \sqrt{1 - \delta^2} r^{(2)} = 0, \quad l_0^{(0)} = \sqrt{1 - \delta^2} r^{(0)} = 0.$$

Dengan demikian untuk kasus  $\delta = 1$ , persamaan (26) dapat dituliskan menjadi

$$r^{(2)} = k_0^{(2)} = -\frac{9}{4} \frac{q^2 k_0^{(0)} s}{\frac{\partial \Omega}{\partial k_0^{(0)}}(k_0^{(0)}, 0)},$$

seperti pada kasus gelombang yang menjalar 1D, lihat [ 3].

Dengan demikian koreksi bilangan gelombang diformulasikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} k_0 &= k_0^{(0)} + \varepsilon k_0^{(1)} + \varepsilon^2 k_0^{(2)} = k_0^{(0)} + \varepsilon^2 k_0^{(2)} \\ l_0 &= l_0^{(0)} + \varepsilon l_0^{(1)} + \varepsilon^2 l_0^{(2)} = l_0^{(0)} + \varepsilon^2 l_0^{(2)} \end{aligned} \quad (27)$$

dengan  $k_{(02)}, l_{(02)}$  diperoleh sebagai fungsi  $r_{(2)}$  pada (26). Koreksi ini dikenal sebagai relasi disperse tak linear (*nonlinear dispersion relation*; NDR), lihat [7].

Selanjutnya ekspresi lengkap gelombang regular order dua (9) dapat dituliskan sebagai berikut ini

$$\begin{aligned} u &= u^{(1)} + u_{bw}^{(2)} + u_{free}^{(2)} \\ &= \left[ qe^{i\theta} + \frac{3}{2} q^2 s (e^{2i\theta} - e^{i\Theta(2\omega_0)}) \right] + c.c. \end{aligned} \quad (28)$$

$$u(0, 0, t) = q \cos(\omega_0 t).$$

### Phase-Amplitudo Gelombang Regular Multiarah Orde Dua

Pada bagian ini akan dikaji evolusi signal gelombang (28), terlebih dahulu

persamaan tersebut dituliskan dalam bentuk amplitudo dan phase tunggal sebagai berikut:

$$u = \left[ qe^{i\theta} + \frac{3}{2} q^2 sae^{i\varphi} \right] + c.c.,$$

$$a = 2 \left| \cos \frac{1}{2} [2\theta - \Theta(2\omega_0) + \pi] \right|,$$

$$\varphi = \frac{1}{2} [2\theta + \Theta(2\omega_0)] = A(x, y, t) e^{i\psi} + c.c.$$

dengan

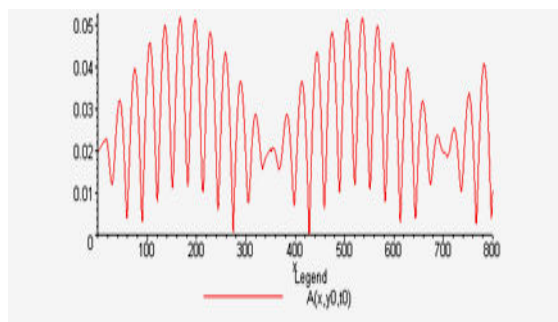
$$A(x, y, t) = \sqrt{q^2 + \frac{9}{4} q^4 s^2 a^2 + 3q^3 sa \cos \frac{1}{2} \Theta(2\omega_0)} \quad (29)$$

$$\psi = \frac{1}{2} [\theta + \varphi] + \arctan \left( \frac{q - \frac{3}{2} q^2 sa}{q + \frac{3}{2} q^2 sa} \tan \frac{1}{2} [\theta - \varphi] \right) \quad (30)$$

Persamaan (29) dan (30) menyatakan persamaan evolusi amplitudo dan phase persamaan gelombang (28), untuk sebarang variable spatial  $x, y$  dan waktu  $t$ .

Evolusi gelombang amplitudo

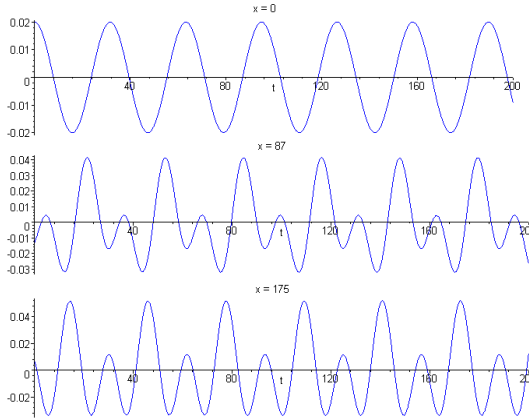
$A(x, y, t)$  untuk sebarang  $t_0$  dan  $y = y_0$  dinyatakan oleh gambar berikut:



Gambar 4. Profil  $A(x, y, t)$  untuk  $y = 10$ ,  $\omega_0 = 0.1987$ ,  $\delta = 0.999$ ,  $\mu = 0.1$  dan sebarang  $t_0$

Dari gambar tersebut dapat diperoleh informasi dari signal  $u(x, 0, t)$ , pada posisi awal  $x = 0$  signal memiliki amplitudo 0.02 dengan profil fungsi cos. Dengan berjalannya waktu gelombang mengalami deformasi, khususnya pada  $\pm 200$  gelombang mengalami deformasi terbesarnya. Selanjutnya gelombang

kembali seperti profil semula pada  $\pm 350$ . Kejadian demikian berulang dengan periode tertentu, akan dikaji lebih detil pada bagian selanjutnya.



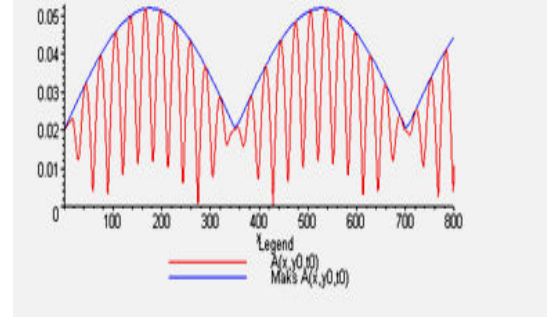
Gambar 5. Profil signal  $u(x_0, 10, t)$  untuk beberapa nilai  $x_0$ ,  $\omega_0 = 0.1987$ ,  $\delta = 0.999$ ,  $\mu = 0.1$

Bagian yang beresilasi pada gelombang amplitude pada Gambar 3, adalah akibat kontribusi suku  $\cos \frac{1}{2} \Theta(2\omega_0)$ . Amplitudo (envelope) dari gelombang yang beresilasi tersebut dapat diperoleh dengan mengambil bagian yang beresilasi tersebut mempunyai nilai maksimum; yaitu  $\cos \frac{1}{2} \Theta(2\omega_0) = 1$ .

Dengan nilai tersebut, akan diperoleh

$$A_{maks}(x, y, t) = \sqrt{q^2 + \frac{9}{4}q^4s^2a^4 + 3q^3sa} = q + \frac{3}{2}q^2s \left| \sin \left( \theta - \frac{1}{2} \Theta(2\omega_0) \right) \right| \quad (31)$$

Profil  $A(x, y, t)$  dan  $A_{maks}(x, y, t)$  diperlihatkan pada gambar berikut



Gambar 6. Profil  $A(x, y, t)$  dan  $A_{maks}(x, y, t)$  untuk sebarang  $t_0$  dan  $y = 10$  dan  $\omega_0 = 0.1987$ ,  $\delta = 0.999$ ,  $\mu = 0.1$

Representasi  $A_{maks}(x, y, t)$  pada (31) merupakan MTA yang didefinisikan sebagai

$$\alpha(x, y) = \max_t u(x, y, t).$$

Representasi (31), sesuai dengan yang diperoleh pada penjalaran gelombang satu arah, lihat [4].

## KESIMPULAN

Telah disajikan pembahasan tentang perbaikan terhadap model penjalaran gelombang multi arah, perbaikan didasari alasan untuk memperbaiki sifat dispersif gelombang. Persamaan KP sebagai model penjalaran gelombang multi arah, memiliki keterbatasan untuk mengcover interaksi gelombang pendek pada arah spatial  $x$ . Dengan perbaikan tersebut, dihasilkan persamaan iKP yang memiliki relasi disperse eksak pada arah spatial  $x$ . Persamaan iKP yang dihasilkan memiliki kelebihan untuk mengcover interaksi gelombang dengan komponen gelombang pendek.

Hasil kajian terhadap gelombang regular ordo dua multi arah dihasilkan fenomena yang sama yang terjadi pada gelombang satu arah. Gelombang regular ordo dua mengalami deformasi apabila di amati pada posisi yang berbeda. Dengan menuliskan gelombang regular ordo dua dalam bentuk phase-amplitudo, deformasi dapat diperlihatkan secara analitis.

Ekspresi MTA (Maximum Temporal Amplitude) yang diperoleh, memperlihatkan ekspresi yang sama untuk kasus gelombang satu arah.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Andonowati, W.M. Kusumawinahyu, Marwan, E. van Groesen, *On The Deformation of Bichromatic Waves and Their Maximum Amplitudes*, (Progress report II-2002, RUTI, 2002), extended abstract submitted to the International Symposium on Shallow Flows, TUDelft, June 16-18, 2003.
  - [2] Andonowati, Marwan, *Perubahan Bentuk pada Perambatan Signal bikromatik dan Pengaruhnya terhadap Amplitude Maksimum* (Progress report II-2002, RUTI, 2002), lecture presented at Seminar MIPA III, Institut Teknologi Bandung, 21-22 Oktober 2002.
  - [3] Edi Cahyono, (2002), *Analitical Wave Codes for Predicting Surface Waves in a Laboratory Basin*, Ph.D Thesis Univ. of Twente.
  - [4] Toto Nusantara, (2003), *MTA Gelombang Regular*, Jurnal Natural vol. 7 no. 2.
  - [5] Toto Nusantara, (2003), *Deformasi Gelombang Regular*, Jurnal MIPA tahun 32 no. 2.
  - [6] E. van Groesen, (1998), *Wave Groups in Uni-directional Surface Wave Models*, J.Eng. Math.,4 : 215-226
  - [7] E. van Groesen, Andonowati, E.Soewono, (1999), *Non-Linear Effects in Bichromatic Surface Waves*, Proc.Estonian Acad. Sci., Mathematics and Physics 48 : 206-229.
  - [8] E. van Groesen, J. Westhuis, (2002), *Modelling and Simulation of Surface Water Waves*, Journal Mathematics and Computers in Simulation, 59 : 341-360.
  - [9] C.T. Stansberg, (1998), *On the nolinear behaviour of ocean wave groups*, *Ocean Wave Measurement and Analysis*, Proc. Of the Third International Symposium WAVES 97 Editor: B.L. Edge, J.M. Hemsley, American Society of Civil Engineers (ASCE), Reston, VA, USA 2 no. 2 : 1227-1241.
  - [10] Witham, G.B. (1974), *Linear and Non-linear Waves*, John Wiley and Sons, New York.
  - [11] J. Westhuis, E. van Groesen, R.H.M. Huijsmans, (2001), *Experiments and Numerics of Bichromatic Wave Groups*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 127: 334-342.
  - [12] J. Westhuis, R.H.M. Huijsmans, (2000), *Unstable Bichromatics Wave Groups*, MARIN, Report No. 15309.152. Wageningen, The Netherlands.
-