RUANG BANACH $\left[C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|\cdot\|_{C_{ESS}}\right]$ SEBAGAI RUANG OPERATOR YANG DIBANGKITKAN OLEH FUNGSI TERUKUR DAN TERBATAS ESSENSIAL

Muslim Ansori[1] dan Y.D. Sumanto[2]
[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Jln. Soemantri Brodjonegoro No.1 Bandar Lampung
E-mail: ansomath@yahoo.com
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Jln. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang

Abstract. In this paper, we construct a new normed Banach space from collection of all Carleman operators from Hilbert space $\mathcal{H}$ into Lebesgue space $\mathcal{L}_2([a,b])$, denoted by $\left[C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|\cdot\|_{C_{ESS}}\right]$ with respect to the norm $\|K\|_{C_{ESS}} = \underset{x\in[0,1]}{\text{ess.sup}}\|k(x)\|_{\mathcal{H}}$ for every $K \in C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$ generated by an essensially bounded measurable function $k:[a,b]\to\mathcal{H}$.

Keywords: Carleman operators, essensially bounded measurable functions.

1. PENDAHULUAN

Operator Carleman dikembangkan pertama kali pada $\mathcal{L}_2([a,b])$ yaitu koleksi semua fungsi $f:[a,b]\subset\Re\to\Re$ dengan $\int_a^b |f(y)|^2 dy < \infty$, dan dilakukan oleh Carleman (1923). Selanjutnya, untuk menghormati penemunya, operator tersebut dinamakan operator Carleman. Operator Carleman tersebut berbentuk

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

untuk setiap $f \in \mathcal{L}_2([a,b])$, dengan

$$\int_a^b |k(x,y)|^2 dy < \infty$$

hampir untuk setiap $x\in[a,b]$. Dalam hal ini, fungsi k merupakan fungsi terukur dan dinamakan kernel atau pembangkit operator K.

Penelitian-penelitian tentang operator Carleman selanjutnya banyak dilakukan antara lain oleh Korotkov (1970, 1971, 1972). Dalam karya-karyanya tersebut, Korotkov banyak menjelaskan sifat-sifat kernel operator Carleman pada ruang Hilbert. Penelitian-penelitian terkini berkaitan dengan operator Carleman antara lain oleh Novitskii (1994) memberikan representasi integral dari operator-operator linear menggunakan kernel mulus tipe Mercer, Novitskii (2002) memberikan representasi integral operator-operator tak terbatas menggunakan kernel mulus, Novitskii (2003) memberikan representasi integral operator-operator tertutup menggunakan kenel mulus dan Novitskii (2003) memberikan ekuivalensi uniter simultan terhadap operator Carleman dengan kernel mulus sebarang. Selanjutnya, Ansori (2009) berhasil menunjukkan bahwa semua operator Carleman yang dibangkitkan oleh fungsi terukur terbatas essensial pada $[a,b]$ membentuk ruang linear bernorma, yang terinspirasi oleh laporan kemajuan penelitian yang dilakukan Ansori dkk. (2008) tentang operator-*DA* dengan memperumum operator Carleman pada ruang Banach. Jadi, tulisan ini akan memberikan kasus khusus dari operator tersebut.

Pada tulisan ini, akan dikaji syarat perlu dan cukup bagi kernel suatu operator Carleman K dari ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke ruang Lebesgue $\mathcal{L}_2([a,b])$ supaya K linear kontinu dan sekaligus akan dibuktikan bahwa ruang linear bernorma

$$\left[\mathcal{C}_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|_{C_{ESS}}\right]$$

merupakan ruang Banach.

2. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Bagian ini dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama menyajikan definisi dan notasi yang memuat pengertian-pengertian dasar dan hasil-hasil terdahulu yang menjadi landasan penelitian ini. Bagian kedua memuat hasil-hasil penelitian yang berkaitan dengan topik yang dibicarakan tentang konstruksi ruang Banach

$$\left[\mathcal{C}_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|_{C_{ESS}}\right]$$

sebagai hasil utama.

2.1 DEFINISI DAN NOTASI

Beberapa sifat-sifat operator Carleman dari ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke ruang $\mathcal{L}_2([a,b])$ berikut sangatlah mendasar:

Definisi 1 [10]

Diberikan ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Suatu operator linear $K:\mathcal{H}\to\mathcal{L}_2([a,b])$ dinamakan operator Carleman jika ada fungsi terukur $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ sehingga untuk setiap $f\in\mathcal{H}$

$$(Kf)(x)=\langle f,k(x)\rangle$$

hampir untuk setiap $x\in[a,b]$.

Selanjutnya, k disebut pembangkit (kernel) operator Carleman $K:\mathcal{H}\to\mathcal{L}_2([a,b])$. Operator K yang dibangkitkan oleh kernel k tersebut bersifat tunggal, sebab jika K_1 dan K_2 masing-masing meruapakan operator Carleman yang dibangkitkan oleh suatu fungsi terukur $k:[a,b]\to\mathcal{H}$, maka untuk setiap $f\in\mathcal{H}$ berlaku

$$(K_1 f)(x)=\langle f,k(x)\rangle$$

dan $(K_2 f)(x)=\langle f,k(x)\rangle$.

Selanjutnya, berdasarkan sifat linear K_1 dan K_2, diperoleh

$$0=(K_1 f)(x)-(K_2 f)(x)=((K_1-K_2)f)(x)$$

hampir untuk setiap $x\in[a,b]$ dan $f\in H$.

Oleh karena itu, untuk setiap $f\in H$

$$(K_1-K_2)f=K_1f-K_2f=\theta_{L_2[a,b]}\Leftrightarrow K_1f=K_2f$$

dengan $\theta_{L_2[a,b]}$ merupakan fungsi nol, sehingga $K_1=K_2$.

Contoh 1

Diberikan fungsi terukur $k\in\mathcal{L}_2([a,b]\times[a,b])$. Oleh karena itu, $k(x)=k(x,.)\in\mathcal{L}_2([a,b])$ hampir untuk setiap $x\in[a,b]$. Operator linear $K:\mathcal{L}_2([a,b])\to\mathcal{L}_2([a,b])$ dengan rumus, untuk setiap $f\in\mathcal{H}$

$$(Kf)(x)=\langle f(.),k(x,.)\rangle=\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

hampir untuk setiap $x\in[a,b]$, merupakan operator Carleman yang dibangkitkan oleh k.

Selanjutnya, notasi $\mathcal{C}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$ menyatakan koleksi semua operator Carleman dari $\mathcal{H}$ ke $\mathcal{L}_2([a,b])$.

Teorema 2 [10]

Jika $K\in\mathcal{C}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$ maka K tertutup.

Bukti : Karena $K\in\mathcal{C}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$, maka terdapat fungsi terukur $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ sehingga untuk setiap $f\in\mathcal{H}$ berlaku $(Kf)(x)=\langle f,k(x)\rangle$, hampir untuk setiap $x\in[a,b]$. Diambil sembarang barisan $\{f_n\}\subset\mathcal{H}$ yang konvergen ke suatu $f\in\mathcal{H}$ dan barisan $\{Kf_n\}$ konvergen ke suatu $g\in\mathcal{L}_2([a,b])$. Karena $k(x)\in\mathcal{H}=\mathcal{H}^*$, hampir untuk setiap $x\in[a,b]$ maka barisan $\{Kf_n(x)\}=\{\langle f,k_n(x)\rangle\}$ konvergen ke $\{\langle f,k(x)\rangle\}=\{Kf(x)\}$ hampir untuk setiap $x\in[a,b]$. Oleh karena itu, dengan ketunggalan limit diperoleh $g=\langle f,k(x)\rangle$, hampir untuk setiap $f\in\mathcal{H}$ atau terbukti bahwa K tertutup. ∎

Teorema 3 [10]
Himpunan $C(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b]))$ merupakan ruang linear.

Bukti : Diambil dua operator $K_1,K_2\in C(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b]))$ sembarang. Oleh karena itu, terdapat fungsi terukur $k_1:[a,b]\to\mathcal{H}$ dan $k_2:[a,b]\to\mathcal{H}$ sehingga untuk setiap $f\in\mathcal{H}$ berlaku

$$(K_1f)(x)=\langle f,k_1(x)\rangle$$

dan $(K_2f)(x)=\langle f,k_2(x)\rangle$ hampir untuk setiap $x\in[a,b]$. Karena $k_1:[a,b]\to\mathcal{H}$ dan $k_2:[a,b]\to\mathcal{H}$ terukur maka $\alpha k_1:[a,b]\to\mathcal{H}$, $\beta k_2:[a,b]\to\mathcal{H}$ $(\alpha+\beta)k_1:[a,b]\to\mathcal{H}$ dan terukur untuk setiap skalar α,β . Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}((\alpha K_1+\beta K_2)f)(x)&=(\alpha K_1f)(x)+(\beta K_2f)(x)\\&=(f,\ \alpha k_1(x))+(f,\ \beta k_2(x))\\&=(f,\alpha k_1(x)+\beta k_2(x))\\&=(f,(\alpha k_1+\beta k_2)(x)).\end{aligned}$$

Jadi, $\alpha K_1+\beta K_2$ merupakan operator Carleman yang dibangkitkan oleh fungsi terukur $\alpha k_1+\beta k_2$. ∎

Berikut ini akan diberikan salah satu syarat bagi kernel $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ untuk menjadi pembangkit operator Carleman $K:\mathcal{H}\to L_2([a,b])$ sebagai bagian dari hasil utama penelitian ini. Perlu diingat kembali, suatu fungsi $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ dikatakan terbatas essensial pada $[a,b]$ jika terdapat himpunan terhitung $E\subset[a,b]$ sehingga $k:[a,b]\backslash E\to\mathcal{H}$ terbatas. Dengan kata lain, jika $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ terbatas essensial maka terdapat bilangan real positip M sehingga

$$\sup_{x\in[a,b]\backslash E}\|k(x)\|_{\mathcal{H}}=\operatorname{ess.sup}_{x\in[a,b]}\|k(x)\|_{\mathcal{H}}\le M$$

Teorema 4 [1]
Diberikan ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Operator linear $K:\mathcal{H}\to\mathcal{L}_2([a,b])$ merupakan operator Carleman jika dan hanya jika terdapat fungsi terukur $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ dan $\|k(.)\|_{\mathcal{H}}\in\mathcal{L}_2([a,b])$ sehingga

$$|(Kf)(x)|\le\|f\|_{\mathcal{H}}\|k(x)\|_{\mathcal{H}}$$

hampir untuk setiap $x\in[a,b]$.

Bukti : Karena $K\in C(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b]))$ maka terdapat fungsi terukur $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ sehingga untuk setiap $f\in\mathcal{H}$ berlaku $(Kf)(x)=\langle f,k(x)\rangle$, hampir untuk setiap $x\in[a,b]$. Oleh karena itu $|(Kf)(x)|=|\langle f,k(x)\rangle|\le\|f\|_{\mathcal{H}}\|k(x)\|_{\mathcal{H}}$ hampir untuk setiap $x\in[a,b]$. Dengan demikian

$$\left(\int_E|(Kf)(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le\|f\|_{\mathcal{H}}\left(\int_E\|k(x)\|_{\mathcal{H}}dx\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

jika dan hanya jika $\|k(.)\|_{\mathcal{H}}\in\mathcal{L}_2([a,b])$. Sebaliknya, karena $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ fungsi terukur dan $\|k(.)\|_{\mathcal{H}}\in\mathcal{L}_2([a,b])$ sehingga

$$|(Kf)(x)|\le\|f\|_{\mathcal{H}}\|k(x)\|_{\mathcal{H}}$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$, untuk setiap $f \in \mathcal{H}$, operator linear $K : \mathcal{H} \to \mathcal{L}_2([a,b])$ dapat dirumuskan dengan $(Kf)(x) = \langle f, k(x) \rangle$, hampir untuk setiap $x \in [a,b]$. Terbukti, $K \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))$. ■

Salah satu yang memenuhi sifat di dalam teorema di atas, yaitu jika $k:[a,b] \to \mathcal{H}$ fungsi terukur dan terbatas essensial.
Selanjutnya notasi $\mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))$ menyatakan koleksi semua operator Carleman dari $\mathcal{H}$ ke $\mathcal{L}_2([a,b])$ yang dibangkitkan oleh fungsi terukur dan terbatas essensial $k:[a,b] \to \mathcal{H}$.
Didefinisikan fungsi norma pada $\mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))$, dengan

$$\|.\| : \mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b])) \to \Re$$

dengan rumus $\|K\|_{C_{ESS}} = \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|k(x)\|_{\mathcal{H}}$.

Teorema 5 [1]
Himpunan $\mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))$ merupakan ruang linear bernorma terhadap norma $\|.\|_{C_{ESS}}$.

Bukti : (i) Untuk setiap operator $K \in \mathcal{C}_{C_{ESS}}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))$, dengan pembangkit fungsi terbatas essensial $k:[a,b] \to \mathcal{H}$ diperoleh

$\|K\|_{C_{ESS}} = \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|k(x)\|_{\mathcal{H}} \geq 0$ dan

$\|K\|_{C_{ESS}} = 0 \Leftrightarrow \underset{x \in [a,\, b]}{ess.\sup} \|k(x)\|$

$\|K\|_{C_{ESS}} = 0 \Leftrightarrow \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|k(x)\|_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow \|k(x)\|_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow k = \theta \Leftrightarrow K = O$

(O operator nol) hampir di mana-mana pada $[a,b]$.
(ii) Untuk setiap $K \in \mathcal{C}_{C_{ESS}}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))$ dengan fungsi pembangkit terbatas essensial $k:[a,b] \to \mathcal{H}$ dan skalar α, diperoleh

$$\|\alpha K\|_{C_{ESS}} = \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|\alpha k(x)\|_{\mathcal{H}} = |\alpha| \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|k(x)\|_{\mathcal{H}} = |\alpha| \|K\|_{C_{ESS}}$$

(iii) Untuk setiap $K, L \in \mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))$ dengan fungsi pembangkit terbatas essensial $k:[a,b] \to \mathcal{H}$ dan $l:[a,b] \to \mathcal{H}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \|K+L\|_{C_{ESS}} &= \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|k(x) + l(x)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \left(\|k(x)\|_{\mathcal{H}} + \|l(x)\|_{\mathcal{H}} \right) \\ &\leq \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|k(x)\|_{\mathcal{H}} + \underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|l(x)\|_{\mathcal{H}} \leq \|K\|_{C_{ESS}} + \|L \end{aligned}$$

Jadi $\|K+L\|_{C_{ESS}} \leq \|K\|_{C_{ESS}} + \|L\|_{C_{ESS}}$

Berdasarkan (i),(ii),(iii) dan Teorema 3, terbukti bahwa $\mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))$ merupakan ruang linear bernorma. ■

2.2 RUANG BANACH $\left[\mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b])), \|.\|_{C_{ESS}} \right]$

Berdasarkan Teorema 4 dan Teorema 5 diperoleh

Teorema 6
$\left[\mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b])), \|.\|_{C_{ESS}} \right] \subset \left[\mathcal{L}_c((\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b]))), \|.\| \right]$

Bukti : Diambil sembarang $K \in \left[\mathcal{C}_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b])), \|.\|_{C_{ESS}} \right]$ yang dibangkitkan oleh fungsi terukur terbatas essensial $k:[a,b] \to \mathcal{H}$. Oleh karena itu, terdapat suatu himpunan terhitung $E \subset [a,b]$ sehingga k terbatas pada $[a,b] \setminus E$. Dengan kata lain, terdapat suatu bilangan real $M > 0$, sehingga

$$\underset{x \in [a,b]}{\text{ess.sup}} \|k(x)\|_{\mathcal{H}} \leq M .$$

Akan ditunjukkan bahwa $K \in \left[\mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a,b])), \|.\| \right]$ dengan $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2[a,b])$ merupakan koleksi semua fungsi linear kontinu dari $\mathcal{H}$ ke

$\mathcal{L}_2[a,b]$. Berdasarkan yang diketahui, diperoleh

$$\|Kf\|_{\mathcal{L}_2([a,b])} = \left\{\int_a^b \left|\langle f, k(x)\rangle\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \left\{\int_a^b |k(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \operatorname*{ess.sup}_{x\in[a,b]} \|k(x)\|_{\mathcal{H}} \sqrt{b-a}$$

Dengan demikian K linear dan kontinu dan terbukti $K \in \left[\mathcal{L}_c\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|\right]$.

■

Akibat 7

Jika $K \in \left[C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|_{C_{ESS}}\right]$ dengan pembangkit fungsi terukur dan terbatas essensial $k:[a,b]\to\mathcal{H}$ maka

$$\|K\|_{\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b]))} \leq \|K\|_{C_{ESS}} \sqrt{b-a}$$

Bukti : Berdasarkan bukti di dalam Teorema 6, diperoleh

$$\|K\|_{\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b]))} = \sup_{\|f\|\leq 1} \|Kf\|_{\mathcal{L}_2([a,b])}$$

$$\leq \sup_{\|f\|\leq 1} \|f\|_{\mathcal{H}} \operatorname*{ess.sup}_{x\in[a,b]} \|k(x)\|_{\mathcal{H}} \sqrt{b-a}$$

$$\leq \|K\|_{C_{ESS}} \sqrt{b-a}. \quad ■$$

Teorema 8

Himpunan $\left[C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|_{C_{ESS}}\right]$ merupakan ruang Banach.

Bukti : Diambil sebarang barisan Cauchy $\{K_i\} \subset C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$ dengan barisan fungsi pembangkit yang bersesuaian $\{k_i\}$, $k_i : E \to \mathcal{H}$ yang terukur dan terbatas essensial, $i = 1,2,\ldots$. Oleh karena itu, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positip n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan bulat positip $i, j \geq n_0$, berlaku

$$\operatorname*{ess.sup}_{x\in[a,b]} \|k_i(x) - k_j(x)\|_{\mathcal{H}} = \|K_i - K_j\|_{C_{ESS}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Oleh karena itu, barisan vektor $\{k_i(x)\}$ untuk setiap $x \in [a,b]$, juga merupakan barisan Cauchy di dalam ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Karena ruang Hilbert $\mathcal{H}$ lengkap maka terdapat suatu fungsi terukur dan terbatas essensial $k : E \to \mathcal{H}$ sehingga $\lim_{i\to\infty} k_i(x) = k_i(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Dilain pihak, berdasarkan Teorema 6, berlaku

$$\left[C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|_{C_{ESS}}\right] \subset \left[\mathcal{L}_c\left(\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)\right),\|.\|\right]$$

Oleh karena itu,

$\{K_i\} \subset \mathcal{L}_c\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$ juga merupakan barisan Cauchy. Karena $\mathcal{L}_c\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2[a,b]\right)$ lengkap maka terdapat $K \in \mathcal{L}_c\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$ sehingga

$$\lim_{i\to\infty} K_i = K.$$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, diperoleh untuk setiap $f \in \mathcal{H}$

$$\lim_{i\to\infty}\langle f, k_i(x)\rangle = \lim_{i\to\infty}(K_i f)(x) = (Kf)(x) = \langle f, k(x)\rangle$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$, yaitu $K \in C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$. Dengan kata lain, terbukti barisan $\{K_i\} \subset C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$ konvergen ke suatu $K \in C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$ atau himpunan $\left[C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|_{C_{ESS}}\right]$ merupakan ruang Banach. ■

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Ruang linear bernorma $\left[C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|_{C_{ESS}}\right]$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|.\|_{C_{ESS}}$. Penelitian lanjutan terhadap ruang Banach $\left[C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right),\|.\|_{C_{ESS}}\right]$ yaitu menyelidiki kekompakan operator tersebut dan menyelidiki apakah ruang ini merupakan aljabar banach di dalam ruang $\left[\mathcal{L}_c\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2[a,b]\right),\|.\|\right]$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ansori, M. (2009), *Ruang Linear Bernorma* $C_{ESS}\left(\mathcal{H},\mathcal{L}_2([a,b])\right)$, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dalam rangka Pekan Ilmiah Pendidikan Matematika, PIPM 2009, Jurusan Matematika, FMIPA, UNY, Yogyakarta, 31-36.

[2] Ansori, M., Darmawijaya, S., Supama. (2008), *DA-Operators on Banach Spaces Via Kerne*l, International Conference on Mathematics and Natural Sciences, ITB, Bandung.

[3] Korotkov, V.B. (1970), *Characteristic Properties of Integral Operators with Kernels of Carleman Type*, Siberian Math. Journal, **11**(1) : 84-104.

[4] Korotkov, V.B. (1971), *Carleman Operators in Spaces of Abstrac Functions I*, Siberian Math. Journal, **12**(4) : 516-522.

[5] Korotkov, V.B. (1971), *Carleman Operators in Spaces of Abstrac Functions II*, Siberian Math. Journal, **12**(4) : 523-530.

[6] Novitskii, I.M. (1994), *Integral Representation of Linear Operators by Smooth Carleman Kernels of Mercer Type*, Proc. London Math. Soc., **3** : 161-177.

[7] Novitskii, I.M. (2002), *Integral Representation of Unbounded Operators by Smooth Carleman Kernels* , Preprint.

[8] Novitskii, I.M. (2003), *Integral Representation of Closed Operators as Bi-Carleman Operators with Arbitrarily Smooth Kernels*, Research Report, Far Eastern Branch of The Russian Academy of Science.

[9] Novitskii, I.M. (2003), *Simultaneous Unitary equivalence to Carleman Operators with Arbitrarily Smooth Kernels*, Research Report, Far Eastern Branch of The Russian Academy of Science.

[10] Weidmann, J. (1980), *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer Verlag, New York.