

SUBRUANG MARKED

Suryoto

Jurusan Matematika, FMIPA-UNDIP Semarang

Abstrak

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks \mathbb{C} , T operator linier nilpoten pada V dan W subruang T -invariant dari V . W dikatakan *marked* jika terdapat basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V . Dalam tulisan ini ditunjukkan bahwa suatu basis Jordan untuk W dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V jika dan hanya jika basis tersebut mempunyai sifat ketetapan dan sifat kedalaman. Syarat perlu dan cukup suatu subruang T -invariant adalah *marked* juga diberikan secara geometri dengan memanfaatkan Inti dan Peta dari T .

PENDAHULUAN

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks \mathbb{C} , T operator linier nilpoten pada V dan W subruang T -invariant dari V . W dikatakan invariant terhadap T atau disingkat T -invariant, jika $T(x) \in W, \forall x \in W$. Suatu rantai (untuk T) adalah himpunan vektor-vektor tak nol :

$$\{ x, (T - \lambda I)(x), \dots, (T - \lambda I)^{h-1}(x) \}$$

sedemikian hingga $(T - \lambda I)^h(x) = 0$. Dimana λ adalah nilai eigen dari T dan $(T - \lambda I)^{h-1}(x)$ adalah vektor eigen dari T yang berpadanan dengan nilai eigen λ . Basis Jordan untuk subruang T -invariant W adalah basis untuk W yang merupakan gabungan dari rantai-rantai. Sedangkan basis Jordan untuk V (disebut juga basis Jordan untuk T) adalah basis yang berbentuk :

$$\{ x_{ij}, (T - \lambda_i I)(x_{ij}), \dots, (T - \lambda_i I)^{h_j-1}(x_{ij}), i = 1, \dots, t; j = 1, \dots, s_i \}$$

dimana $x_{ij} \in V$ dan $(T - \lambda_i I)^{h_j}(x_{ij}) = 0$.

Gohberg dkk [6], memperkenalkan salah satu kelas dari subruang invariant yang mereka namakan subruang *marked*. Pada umumnya, tidak setiap subruang invariant adalah *marked*. Suatu subruang invariant dikatakan *marked* jika terdapat

basis Jordan untuk subruang tersebut yang dapat diperluas menjadi menjadi basis Jordan untuk ruang vektor keseluruhan. Permasalahan yang muncul disini : bilamana basis Jordan untuk suatu subruang invariant dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk ruang vektor keseluruhan ? Untuk mengkaji permasalahan ini akan ditinjau dari segi ketinggian dan kedalaman suatu vektor dan sifat-sifat yang terkait. Karakterisasi subruang *marked* juga diberikan dalam keluarga subruang $V_h^d = \text{Ker}(T^h) \cap \text{Im}(T^d)$. Dalam pembahasan subruang *marked* ini hanya akan ditinjau untuk kasus operator linier T yang nilpoten.

Karakterisasi Basis Jordan yang Dapat Diperluas

Untuk selanjutnya misalkan $T : V \rightarrow V$, suatu pemetaan linier nilpoten dengan indeks α . Maka 0 adalah satu-satunya nilai eigen dari T . Untuk $x \in V$, *ketinggian* dari x , dinotasikan dengan $ht(x)$, adalah bilangan bulat tak negatif terkecil h sedemikian hingga $T^h(x) = 0$. Untuk $x \neq 0$, *kedalaman* dari x , notasi $dp(x)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat tak negatif terbesar d sedemikian hingga $x = T^d(y)$, untuk suatu $y \in V$. Selanjutnya, suatu vektor tak nol x dikatakan mempunyai sifat ketetapan (*constancy property* = CP) jika berlaku salah satu : $T(x) = 0$ atau $T(x) \neq 0$ dan $dp(T(x)) = dp(x) + 1$.

Sedangkan suatu rantai $S = \{ x, T(x), \dots, T^{h-1}(x) \}$ dikatakan mempunyai CP jika dan hanya jika berlaku $dp(T^{i-1}(x)) = dp(x) + i - 1$, $i = 1, \dots, h$. Selanjutnya pandang himpunan bagian tak hampa B dari V yang bebas linier dengan $B = \{ x_1, \dots, x_r \}$. B dikatakan mempunyai sifat kedalaman (*depth property* = DP), jika $\forall x \in \text{span}(B)$, $x \neq 0$ dengan $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r$, berlaku :

$$dp(x) = \min \{ dp(x_i) : \alpha_i \neq 0, i = 1, \dots, r \}.$$

Catat bahwa sifat ketetapan (CP) dan sifat kedalaman (DP) ini tidak mengakibatkan satu terhadap yang lain.. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa sifat ketetapan dan sifat kedalaman ini akan mengkarakterisasi subruang *marked*. Namun sebelumnya akan diberikan terlebih dahulu beberapa lema berikut ini :

Lema 1

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan kompleks C . Jika C basis Jordan untuk V maka C mempunyai CP dan DP.

Lema 2

Misalkan $S = \{ x, T(x), \dots, T^{h-1}(x) \}$ suatu rantai. Maka S maksimal jika dan hanya jika $dp(x) = 0$.

Lema 3

Misalkan $A, B \subseteq V$, adalah himpunan dari vektor-vektor yang bebas linier dengan $A \cap B = \emptyset$ dan A, B masing-masing mempunyai DP. Misalkan juga $A \cup B$ bebas linier. Jika $A \cup B$ tidak mempunyai DP maka terdapat $x \in \text{span}(A)$ dan $y \in \text{span}(B)$ dengan $dp(x) = dp(y)$ sedemikian hingga :

$$dp(x+y) > dp(x) = dp(y).$$

Teorema 1

Misalkan W subruang T -invariant dari V dan B basis Jordan untuk W . Maka B dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V jika dan hanya jika B mempunyai CP dan DP.

Bukti : (\Rightarrow) Misalkan C basis Jordan untuk V , perluasan dari B . Maka berdasarkan lema 1, C mempunyai CP dan DP. Akibatnya, karena $B \subseteq C$, maka B juga mempunyai CP dan DP.

(\Leftarrow) Misalkan W subruang T -invariant dari V dan $B = \{ x_i, T(x_i), \dots, T^{h_i-1}(x_i), i = 1, \dots, t \}$ adalah basis Jordan dari W , mempunyai CP dan DP.

a) Jika $W = V$, pilih $C = B$ basis Jordan untuk V , perluasan dari B .

b) Jika $W \neq V$. Akan dikonstruksi subruang T -invariant W' yang memuat sejati W dan basis Jordan B' untuk W' , perluasan dari B , yang mempunyai CP dan DP.

Kasus 1 : Terdapat rantai di B yang tidak maksimal.

Misalkan $S = \{ x_i, T(x_i), \dots, T^{h_i-1}(x_i) \}$ rantai di B yang tidak maksimal, untuk suatu $i \in \{ 1, \dots, t \}$. Misalkan juga $dp(x_i) = d > 0$. Maka terdapat $z \in V$ dan $x_i = T^d(z)$, dengan $dp(z) = 0$ dan diperoleh rantai maksimal $S' = \{ z, \dots, T^d(z) = x_i,$

$T^{d+1}(x_i), \dots, T^{d+h_i-1}(x_i)$ }. Tulis $B^{\wedge} = B \cup S^{\wedge}$ dan $W^{\wedge} = \text{span}(B^{\wedge})$. Jelas bahwa W^{\wedge} subruang T -invariant dari V .

Klaim 1 : S^{\wedge} mempunyai CP.

Karena S^{\wedge} suatu rantai maka $T^j(z) \neq 0, \forall j = 0, \dots, d + h_i - 1$. Akan ditunjukkan $\text{dp}(T^j(z)) = j, \forall j = 0, \dots, d + h_i - 1$. Ambil sebarang $j \in \{0, \dots, d + h_i - 1\}$.

Jika $j \geq d$, maka $T^j(z) \in S$.

Tulis $T^j(z) = T^{j-d+d}(z) = T^{j-d}(x_i)$. Karena S mempunyai CP, maka $\text{dp}(T^j(z)) = \text{dp}(T^{j-d}(x_i)) = \text{dp}(x_i) + j - d = d + j - d = j$. Sebaliknya jika $j < d$, dan karena $\text{dp}(x_i) = d$ dengan $x_i = T^d(z)$, maka $d = \text{dp}(x_i) = \text{dp}(T^d(z)) = \text{dp}(T^{d-j}(T^j(z))) \geq \text{dp}(T^j(z)) + d - j$. Jadi $\text{dp}(T^j(z)) \leq j$. Akan tetapi $\text{dp}(T^j(z)) \geq j$, dengan demikian diperoleh $\text{dp}(T^j(z)) = j$. Ini memperlihatkan bahwa S^{\wedge} mempunyai CP.

Klaim 2 : $B^{\wedge} = B \cup S^{\wedge}$ bebas linier.

Andaikan B^{\wedge} bergantung linier, maka terdapat kombinasi linier :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^t \sum_{j=0}^{h_k-1} \alpha_{kj} T^j(x_k) + \sum_{l=0}^{d+h_i-1} \alpha_{il} T^l(z) = 0,$$

dengan $\alpha_{kj}, \alpha_{il} \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, t; k \neq i; j = 0, \dots, d + h_i - 1$, yang dipenuhi oleh α_{kj}, α_{il} yang tidak semuanya nol. Khususnya terdapat r dengan $0 \leq r < d$, sedemikian hingga $\alpha_{ir} \neq 0$. Karena

$0 \leq r < d$, maka r mempunyai nilai minimum, misalkan $s = \min \{ r : \alpha_{ir} \neq 0, \text{ dengan } 0 \leq r < d \}$. Dengan demikian,

$$T^{d-s} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^t \sum_{j=0}^{h_k-1} \alpha_{kj} T^j(x_k) + \sum_{l=0}^{d+h_i-1} \alpha_{il} T^l(z) \right) = 0 \text{ atau diperoleh :}$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^t \sum_{j=d-s}^{h_k-1} \alpha_{k,j-(d-s)} T^j(x_k) + \sum_{l=0}^{h_i-1} \alpha_{i,l+s} T^l(x_i) = 0,$$

suatu kombinasi linier dari unsur-unsur di B yang dipenuhi oleh $\alpha_{is} \neq 0$. Akibatnya B bergantung linier, ini bertentangan dengan B yang bebas linier. Jadi haruslah B^{\wedge} bebas linier.

Klaim 3 : B^{\setminus} mempunyai DP.

Andaikan B^{\setminus} tidak mempunyai DP. Maka menurut lema 3, terdapat $w \in W$ dan $x \in \text{span}(S^{\setminus} - S)$ dengan $\text{dp}(w) = \text{dp}(x)$ dan $\text{dp}(w + x) > \text{dp}(w) = \text{dp}(x)$.

Karena $x \in \text{span}(S^{\setminus} - S) = \text{span}(\{z, \dots, T^{d-1}(z)\})$, tulis $x = \sum_{k=0}^{d-1} \gamma_k T^k(z)$,

dengan $\gamma_k \in C$,

$k = 0, \dots, d-1$. Misalkan $\text{dp}(x) = r$, dengan $0 \leq r < d$, maka

$x = \sum_{k=r}^{d-1} \gamma_k T^k(z)$, dengan $\gamma_r \neq 0$. Tulis $v = w + x$, jelas bahwa $v \in \text{span}(B^{\setminus}) = W^{\setminus}$

dan $\text{dp}(v) > r$.

Dengan demikian $\text{dp}(T^{d-r}(v)) \geq \text{dp}(v) + d - r > r + d - r = d$ (1)

Akan tetapi $T^{d-r}(v) = T^{d-r}(w) + \sum_{k=0}^{d-r-1} \gamma_{k+r} T^k(x_i) \in W = \text{span}(B)$ dan $T^{d-r}(v) \neq 0$, maka

$$\text{dp}(T^{d-r}(v)) = \min \{ \text{dp}(T^{d-r}(w)), \text{dp}(\sum_{k=0}^{d-r-1} \gamma_{k+r} T^k(x_i)) \} = d.$$

Ini bertentangan dengan (1), jadi haruslah B^{\setminus} mempunyai DP.

Kasus 2 : Setiap rantai di B adalah rantai maksimal.

Klaim : Terdapat $v \in V$, $v \notin W = \text{span}(B)$ dengan $\text{ht}(v) = 1$.

Misalkan $u \in V$, $u \notin W$ dengan $\text{ht}(u) = h$. Maka $T^h(u) = 0$ dan $T^{h-1}(u) \neq 0$.

Jika $T^{h-1}(u) \notin W$, pilih $v = T^{h-1}(u)$. Sebaliknya jika $T^{h-1}(u) \in W$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat terkecil r dengan $0 < r \leq h - 1$ sedemikian hingga $T^r(u) \in W$.

Karena $u \notin W$ dan $T^{h-1}(u) \in W$, pandang himpunan $N = \{j : T^j(u) \in W, j = 1, \dots, h-1\} \neq \emptyset$. Karena $N \subseteq \{1, \dots, h-1\}$, maka N mempunyai unsur terkecil, misalkan r . Dengan demikian $\text{dp}(T^r(u)) \geq r > 0$ atau $\text{dp}(T^r(u)) \geq 1$. $T^r(u)$

$\in W = \text{span}(B)$, tulis $T^r(u) = \sum_{i=1}^t \sum_{j=0}^{h_i-1} \alpha_{ij} T^j(x_i)$, untuk suatu $\alpha_{ij} \in C$. Karena dp

$(T^r(u)) \geq 1$, maka untuk $j = 0$, $\alpha_{ij} = 0, \forall i = 1, \dots, t$ dan diperoleh

$$T^r(u) = T\left(\sum_{i=1}^t \sum_{j=0}^{h_i-2} \alpha_{i,j+1} T^j(x_i)\right),$$

dimana $\sum_{i=1}^t \sum_{j=0}^{h_i-2} \alpha_{i,j+1} T^j(x_i) \in W$. Jadi terdapat $z \in W$ dan berlaku $T^r(u) = T(z)$.

Tulis $x = z - T^{r-1}(z)$. Jelas bahwa $x \notin W$ dan $x \neq 0$, serta $T(x) = T(z - T^{r-1}(z)) = T(z) - T^r(u) = 0$. Jadi x adalah vektor eigen dari T (yang berpadanan dengan nilai eigen 0).

Dengan demikian klaim telah terbukti.

Pilih $S = \{ u, T(u), \dots, T^{h-1}(u) \}$ rantai dengan panjang terbesar dengan $v = T^{h-1}(u) \notin W$.

Misalkan $B' = B \cup S$. Dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 dapat diperlihatkan bahwa B' bebas linier. Karena $B \cap S = \emptyset$ dan $W = \text{span}(B)$, maka B' basis untuk $W' = W \oplus \text{span}(S)$ dan jelas bahwa W' adalah subruang T -invariant dari V . Lagi dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 dapat ditunjukkan bahwa S mempunyai CP dan B' mempunyai DP.

Sehingga dengan mengulang prosedur di atas diperoleh basis Jordan untuk V , yang merupakan perluasan dari B .

Karakterisasi Subruang Marked

Misalkan B himpunan bagian tak hampa dari V yang bebas linier, didefinisikan :

$$B_h = \{ x \in B : \text{ht}(x) = h \}$$

$$B^d = \{ x \in B : \text{dp}(x) = d \}$$

$$B_h^d = \{ x \in B : \text{ht}(x) = h, \text{dp}(x) = d \}.$$

Selanjutnya untuk $h, d \geq 0$, misalkan

$$K_h = \text{Ker}(T^h) = \{ x \in V : \text{ht}(x) \leq h \}$$

$$I^d = \text{Im}(T^d) = \{ x \in V : \text{dp}(x) \geq d \}$$

$$V_h^d = K_h \cap I^d = \text{Ker}(T^h) \cap \text{Im}(T^d).$$

Karena $V_h^d = I^d$, untuk $d + h \geq \alpha$, dengan $\alpha =$ indeks nilpoten dari pemetaan linier T , pada tulisan ini hanya ditekankan pada kasus $d + h \leq \alpha$. Dengan pendefinisian di atas diperoleh barisan subruang :

$$\{ 0 \} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_\alpha = \dots = K_n = V$$

$$\{ 0 \} = I^n = \dots = I^\alpha \subseteq I^{\alpha-1} \subseteq \dots \subseteq I^0 = V$$

dan dipunyai diagram berikut ini :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ \dots & \subset & V_h^{d+1} & \subset & V_h^d & \subset & V_h^{d-1} & \subset & \dots & \subset & V_h^0 & = & K_h \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\ \dots & \subset & V_{h-1}^{d+1} & \subset & V_{h-1}^d & \subset & V_{h-1}^{d-1} & \subset & \dots & \subset & V_{h-1}^0 & = & K_{h-1} \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \end{array}$$

Dari diagram diperoleh $V_h^{d+1} + V_{h-1}^d \subset V_h^d$, dimana vektor-vektor di ruas kanan yang tidak berada di ruas kiri akan memegang peranan penting di dalam karakterisasi subruang *marked* ini.

Misalkan W subruang T -invariant dari V , jelas bahwa dipenuhi

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d \subseteq W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d). \quad (2)$$

Jika inklusi balikan dari (2) juga berlaku, hal ini akan mengkarakterisasi subruang *marked*, seperti diberikan oleh teorema berikut ini :

Teorema 2

Misalkan W subruang T -invariant dari V . Maka W dikatakan *marked* jika dan hanya jika

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d = W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d),$$

$$\forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$$

Namun sebelum membuktikan teorema di atas akan diberikan terlebih dahulu beberapa lema berikut ini :

Lema 4

Misalkan B basis Jordan untuk V , maka berlaku $V_h^d = [B_h^d] \oplus (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)$,

$$\forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$$

Lema 5

Misalkan W subruang T -invariant dari V dan B basis Jordan untuk W . Jika B dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V , maka berlaku

$$[B_h^d] \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d) = \{0\},$$

$$\forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$$

Lema 6

Misalkan K, K', L dan L' adalah sub-sub ruang dari V , dengan $K' \subseteq K, L' \subseteq L$ sedemikian hingga

$$V = K \oplus L = K' \oplus L', \text{ maka } K' = K \text{ dan } L' = L.$$

Lema 7

Misalkan W subruang T -invariant dari V dan F subruang dari W sedemikian hingga

$$W \cap V_h^d \supseteq F \oplus (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)),$$

dengan $h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$, maka T menginduksi suatu isomorfisma $F \xrightarrow{\sim} T(F)$ dan

$$W \cap V_{h-1}^{d+1} \supseteq T(F) \oplus (W \cap (V_{h-1}^{d+2} + V_{h-2}^{d+1})).$$

Lema 8

Misalkan W subruang T -invariant dari V dan B keluarga dari vektor-vektor di V yang bebas linier sedemikian hingga :

$$W \cap V_h^d = [B_h^d] \oplus (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d),$$

$\forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$. Maka $W = \bigoplus_{h=1}^{\alpha} \bigoplus_{d=0}^{\alpha-h} [B_h^d]$ dan pada khususnya B basis

untuk W .

Lema 9

Misalkan $x \neq 0$, dengan $ht(x) = h > 1$ dan $dp(x) = d \leq \alpha - h$. Maka x mempunyai FCP jika dan hanya jika $x \notin V_h^{d+1} + V_{h-1}^d$.

Sekarang akan dibuktikan teorema 2 di atas.

(\Rightarrow) Misalkan W *marked* dan B basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V . Ambil sebarang $h \geq 1$, $d \geq 0$, dengan $d + h \leq \alpha$. Karena W subruang dari V maka

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d \subseteq W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d) \subseteq W \cap V_h^d. \quad (3)$$

Karena B basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V , maka menurut lema 5 diperoleh $[B_h^d] \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d) = \{0\}$, dan akibatnya

$$[B_h^d] \cap (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)) = \{0\}. \quad (4)$$

Karena $[B_h^d] \subseteq W \cap V_h^d$ serta mengingat (3) dan (4) diperoleh

$$[B_h^d] \oplus (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)) \subseteq W \cap V_h^d. \quad (5)$$

Sebaliknya, ambil sebarang $x \in W \cap V_h^d$, dengan $x \neq 0$, dengan melihat bentuk kombinasi linier x atas B diperoleh $x = x_1 + x_2 + x_3$, dengan $x_1 \in [B_h^d]$, $x_2 \in V_h^{d+1}$ dan $x_3 \in V_{h-1}^d$.

Karena $x_2, x_3 \in W$, maka $x_2 + x_3 \in W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)$ dan akibatnya diperoleh $x \in [B_h^d] + (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d))$ atau

$$W \cap V_h^d \subseteq [B_h^d] + (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)). \quad (6)$$

Sehingga dengan mengingat (5) diperoleh :

$$W \cap V_h^d = [B_h^d] \oplus (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)). \quad (7)$$

Jelas bahwa $[B_h^d] + (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)) \subseteq W \cap V_h^d$.

Sebaliknya, ambil sebarang $x \in W \cap V_h^d$, dengan $x \neq 0$, maka $x = x_1 + x_2 + x_3$, dengan $x_1 \in [B_h^d]$,

$x_2 \in V_h^{d+1}$ dan $x_3 \in V_{h-1}^d$. Karena $x_2, x_3 \in W$, jadi $x_2 \in W \cap V_h^{d+1}$ dan $x_3 \in W \cap V_{h-1}^d$, maka $x \in [B_h^d] + (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d)$ atau $W \cap V_h^d \subseteq [B_h^d] + (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d)$.

Dengan demikian diperoleh $W \cap V_h^d \subseteq [B_h^d] + (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d)$.

Klaim : $[B_h^d] \cap (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d) = \{0\}$.

Misalkan $x = y + z$, dengan $x \in [B_h^d]$, $y \in W \cap V_h^{d+1}$ dan $z \in W \cap V_{h-1}^d$, dan andaikan $x \neq 0$. Maka dipunyai $T^{h-1}(x) = T^{h-1}(y + z) = T^{h-1}(y) \neq 0$. Akibatnya $\dim(T^{h-1}(x)) \geq d + h$.

Akan tetapi $T^{h-1}(x) \in W = \text{span}(B)$, dengan B mempunyai DP, jadi $\dim(T^{h-1}(x)) = d + h - 1$.

Ini bertentangan dengan hasil sebelumnya. Jadi haruslah $x = 0$ dan terbukti bahwa $[B_h^d] \cap (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d) = \{0\}$. Dengan demikian diperoleh

$$W \cap V_h^d = [B_h^d] \oplus (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d). \quad (8)$$

Sehingga dari (7) dan (8) serta dengan mengingat lema 6 diperoleh

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d = W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d).$$

(\Leftarrow) Untuk membuktikan bahwa W *marked*, cukup apabila dapat dikonstruksi suatu basis Jordan untuk W , yang mempunyai CP dan DP. Ambil sebarang $\gamma \in \{1, \dots, \alpha\}$. Akan dikonstruksi basis Jordan untuk W berturut-turut sebagai berikut :

$$W \cap V_\gamma^0 = (W \cap V_\gamma^1 + W \cap V_{\gamma-1}^0) \oplus [B_\gamma^0]$$

$$W \cap V_{\gamma-1}^1 = (W \cap V_{\gamma-1}^2 + W \cap V_{\gamma-2}^1) \oplus [T(B_\gamma^0)] \oplus [B_{\gamma-1}^1]$$

\vdots

$$W \cap V_1^{\gamma-1} = (W \cap V_1^\gamma) \oplus [T^{\gamma-1}(B_\gamma^0)] \oplus [T^{\gamma-2}(B_{\gamma-1}^1)] \oplus \dots \oplus [T(B_2^{\gamma-2})] \oplus [B_1^{\gamma-1}],$$

dan proses ini well defined karena lema 7.

Tulis $B^{*i}_{\gamma-i} = \bigcup_{j=0}^i T^{i-j}(B_{\gamma-j}^j)$, $i = 0, \dots, \gamma - 1$. Maka $B^{*i}_{\gamma-i}$ basis untuk

$\bigoplus_{j=0}^i [T^{i-j}(B_{\gamma-j}^j)]$. Dengan demikian $\bigoplus_{j=0}^i [T^{i-j}(B_{\gamma-j}^j)] = [B^{*i}_{\gamma-i}]$, dan diperoleh

$$W \cap V_{\gamma-i}^i = (W \cap V_{\gamma-i}^{i+1} + W \cap V_{\gamma-i-1}^i) \oplus [B^{*i}_{\gamma-i}], i = 0, \dots, \gamma - 1.$$

Sedangkan lema 8 menjamin bahwa gabungan $B^* = \bigcup_{\gamma=1}^{\alpha} \bigcup_{i=0}^{\gamma-1} B^{*i}_{\gamma-i}$ adalah basis untuk W .

Tinggal diperlihatkan bahwa B^* mempunyai CP dan DP.

Ambil sebarang $b \in B^*$, maka $b \in B^{*i}_{\gamma-i}$, untuk suatu $i \in \{0, \dots, \gamma - 1\}$ dan $\gamma \in \{1, \dots, \alpha\}$. Akibatnya $b \in W \cap V_{\gamma-i}^i$. Karena $W \cap V_{\gamma-i}^i = [B^{*i}_{\gamma-i}] \oplus (W \cap V_{\gamma-i}^{i+1} + W \cap V_{\gamma-i-1}^i)$ atau

$[B^{*i}_{\gamma-i}] \oplus (W \cap V_{\gamma-i}^{i+1} + W \cap V_{\gamma-i-1}^i) = \{0\}$ dan mengingat $b \in [B^{*i}_{\gamma-i}]$ serta $b \neq 0$, maka diperoleh $b \notin W \cap V_{\gamma-i}^{i+1} + W \cap V_{\gamma-i-1}^i$. Karena $W \cap V_{\gamma-i}^{i+1} + W \cap V_{\gamma-i-1}^i = W \cap (V_{\gamma-i}^{i+1} + V_{\gamma-i-1}^i)$ dan $b \in W$, maka $b \notin V_{\gamma-i}^{i+1} + V_{\gamma-i-1}^i$. Maka berdasarkan lema 9, b mempunyai FCP atau rantai $\{b, T(b), \dots, T^{\gamma-i-1}(b)\}$ mempunyai CP. Dengan demikian B^* mempunyai CP.

Selanjutnya dengan menggunakan induksi matematika dan menerapkan lema 3 dapat dibuktikan bahwa B^* mempunyai DP. Dengan demikian karena B^* basis Jordan untuk W mempunyai CP dan DP, maka terbukti bahwa W *marked*.

KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan :

1. Salah satu ciri yang mengkarakterisasi subruang *marked* adalah eksistensi dari basis Jordan dari subruang yang bersangkutan yang mempunyai CP dan DP.
2. Karakterisasi yang lain untuk suatu subruang *marked* W dari V adalah dipenuhinya hubungan :

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d = W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d), \quad \forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha,$$

dimana α adalah indeks nilpoten dari pemetaan linier T .

DAFTAR PUSTAKA

1. Arifin, A., *Aljabar Linier*, Penerbit ITB, Bandung, 1995.
2. Bru, R., L. Rodman and H. Schneider, *Extensions of Jordan Bases for Invariant Subspace of a Matrix, Linear Algebra and Its Applications*, 1991, 150 : 209 – 225.
3. Burton, D. M., *Abstract and Linear Algebra*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1972.
4. Ferrer, J., F. Puerta and X. Puerta, *Geometric Characterization and Classification of Marked Subspaces, Linear Algebra and Its Applications*, 1996, 235 : 35 – 46.
5. Friedberg, S., A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York, 1992.
6. Gohberg, I., P. Lancaster and L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*, John Willey & Sons, New York, 1986.
7. Jacob, B., *Linear Algebra*, W. H. Freeman and Company, New York, 1990.
8. Roman, S., *Advanced Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1992.