

SYARAT PERLU LAPANGAN PEMISAH

Bambang Irawanto

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstact

Field is integral domain and is a such that every non-zero elemen in it has multiplicative inverse. Extension field F of field K is splitting field of collections polinomial $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$ of K if F is the smallest subfield \bar{K} containing K and all the zeros in \bar{K} of the polinomial $f_i(x)$. Elemen $\alpha \in F$ is algebra over K if $f(\alpha) = 0$ for some $0 \neq f(x) \in K[x]$. Splitting field is extension algebra.

Keywords : extension fields, elemen algebra

1. PENDAHULUAN

Lapangan adalah daerah integral yang setiap elemen yang tidak nol mempunyai invers terhadap pergandaan. Lapangan F disebut lapangan perluasan F atas lapangan K jika lapangan merupakan subfield dari lapangan F (Hungerford, T. W, 1984). Polinomial $f(x) \in K[x]$ dan $a \in K$ adalah akar dari $f(x)$ jika dan hanya jika $(x - a)$ faktor dari $f(x)$ (Hungerford T. W, 1984). Lapangan perluasan F disebut lapangan pemisah (splitting field) dari polinomial $f(x) \in K[x]$ jika $f(x)$ terfaktor dalam $F[x]$ dengan akar-akar $f(x)$ berada dalam F (Hungerford T.W, 1984).

Lapangan pemisah F untuk koleksi polinomial $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$ atas K jika F subfield terkecil dalam penutup aljabar \bar{K} yang memuat semua akar-akar dari $f_i(x)$ dan K . (Fraleigh, J. B, 1994). Dalam tulisan ini dipelajari syarat perlu lapangan pemisah dalam hubungan dengan elemen aljabar.

2. LAPANGAN PERLUASAN

Hungerford T.W, (1984), memberikan pengertian lapangan perluasan F atas lapangan K , jika lapangan K merupakan subfield dari lapangan F berdasarkan pengertian ini dibuktikan teorema Kronecker.

Teorema 1. (Teorema Kronecker)

Misal K adalah lapangan dan $f(x)$ polinomial yang tidak konstan dalam $K[x]$, maka terdapatlah lapangan perluasan (Extension field) F dari K , dan elemen $\alpha \in F$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$.

Bukti :

$K[x]$ adalah daerah ideal utama, karena daerah ideal utama merupakan daerah faktorisasi tunggal, maka $f(x) \in K[x]$ dapat difaktorkan secara tunggal sebagai $f(x) = p_1(x) p_2(x) \dots p_n(x)$, dengan $p_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) adalah polinomial prima yang tak tereduksi ; karena $p(x)$ polinomial tak tereduksi maka $\langle p(x) \rangle$

adalah ideal maximal, dalam $K[x]$, dengan $\frac{K[x]}{\langle p(x) \rangle}$ suatu lapangan. Didefinisikan

suatu pemetaan ψ oleh $\psi : K \rightarrow \frac{K[x]}{\langle p(x) \rangle}$ dengan $a \mapsto a + \langle p(x) \rangle$ ψ adalah

pemetaan 1 – 1, sebab $\forall a, b \in K$ jika $\psi(a) = \psi(b)$ maka $a + \langle p(x) \rangle = b + \langle p(x) \rangle$
 $\Leftrightarrow a - b \in \langle p(x) \rangle \Leftrightarrow a - b = k p(x)$, jadi $a - b$ suatu kelipatan $p(x)$ yang berderajat 0
 maka $a - b = 0$ atau $a = b$. ψ homomorfisma ring.

Sehingga $\psi(K) = \{ a + \langle p(x) \rangle \mid a \in K \} \subseteq \frac{K[x]}{\langle p(x) \rangle}$ merupakan sub field dari

$\frac{K[x]}{\langle p(x) \rangle}$, jadi $K \cong \{ a + \langle p(x) \rangle \mid a \in K \}$.

Misal $F = \frac{K[x]}{\langle p(x) \rangle}$ maka F merupakan lapangan perluasan dari K .

Akan dibuktikan $f(\alpha) = 0$, $a \in F = \frac{K[x]}{\langle p(x) \rangle}$, ambil $\alpha \in F$ dengan $\alpha = x + \langle p(x) \rangle$.

Jika $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n \in K$, maka $p(\alpha) = a_0\alpha^0 + a_1\alpha^1 + \dots + a_n\alpha^n =$
 $\bar{0} \in \frac{K[x]}{\langle p(x) \rangle}$

$P(\alpha) = 0$. Karena $f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \dots p_n(x)$, maka $f(\alpha) = 0$.

Contoh :

Misal $K = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x)$ tak tereduksi dalam \mathbb{R} , maka $\langle x^2 + 1 \rangle$ ideal maksimal dalam $\mathbb{R}[x]$ jadi $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ lapangan dengan

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle} = \{g(x) + \langle x^2 + 1 \rangle \mid g(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Ambil $\alpha = x + \langle x^2 + 1 \rangle$ maka $f(\alpha) = (x + \langle x^2 + 1 \rangle)^2 + 1 = \bar{0} \in \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$.

Elemen $\alpha \in F$ disebut elemen aljabar atas K jika $f(\alpha) = 0$, untuk suatu $0 \neq f(x) \in K[x]$ sebaliknya α bukan aljabar disebut transedental (Fraleigh J.B, 1994).

Selanjutnya dari pengertian aljabar diperoleh pengertian perluasan aljabar.

Definisi 1. F adalah lapangan perluasan atas lapangan K disebut perluasan aljabar jika setiap elemen dari F merupakan aljabar atas K . F dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan K . Dimensi ruang vektor F atas K disebut derajat dari lapangan perluasan F atas K , yang selanjutnya dinotasikan dengan $[F:K]$. Lebih lanjut lapangan perluasan disebut perluasan berhingga bila $[F:K]$ berhingga.

Teorema 2. Setiap perluasan berhingga dari (finite extention) suatu lapangan merupakan perluasan aljabar. (Raisinghanian MD, 1980).

Bukti :

Pandang F perluasan berhingga lapangan K yang mempunyai derajat F atas K berhingga sebut n , maka ruang vektor F atas K memiliki dimensi n . Akan ditunjukkan F adalah perluasan aljabar berarti setiap elemen didalam F adalah aljabar atas K . Ambil α sebarang elemen dalam F , maka $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ elemen-elemen dalam F dan jika 1 adalah unit dari F maka $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ merupakan elemen-elemen di dalam F berjumlah $(n+1)$.

Karena ruang vektor F berdimensi n , maka setiap himpunan $(n+1)$ elemen atau lebih tak bebas linier, sehingga himpunan $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n\}$ tak bebas linear, jadi terdapat elemen-elemen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ dari K yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga,

$$a_0.1 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = 0$$

ini menunjukkan bahwa α adalah akar dari polinomial tidak nol $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ dalam $K[x]$, sehingga α adalah aljabar atas K . Karena α adalah sebarang elemen dalam F , maka F adalah perluasan aljabar.

Himpunan $\bar{K}_F = \{ \alpha \in F / \alpha \text{ aljabar atas } K \}$ merupakan subfield dari F , selanjutnya disebut penutup aljabar (algebraic closure) dari K dalam F (Fraleigh J. B, 1994).

3. LAPANGAN PEMISAH

Definisi 2. Misal K suatu lapangan dengan penutup aljabar (algebraic closure) \bar{K} . $\{ f_i(x) / i \in I \}$ koleksi dari polinomial-polinomial dalam $K[x]$. Suatu lapangan $F \leq \bar{K}$ disebut lapangan pemisah (splitting field) dari $\{ f_i(x) / i \in I \}$ atas K jika F adalah sub field terkecil dari \bar{K} yang memuat K dan semua akar dalam \bar{K} dari setiap $f_i(x)$, untuk $i \in I$. Suatu lapangan $F \leq \bar{K}$ adalah lapangan pemisah (splitting field) atas K , jika $F \leq \bar{K}$ adalah lapangan pemisah (splitting field) dari himpunan sebarang dari polinomial-polinomial dalam $K[x]$.

Dean R. A (1996) menyebutkan bahwa semua lapangan K dan semua $f(x) \in K[x]$ sedemikian sehingga $\deg(f) \geq 1$, terdapatlah perluasan F dari K yang merupakan lapangan pemisah untuk $f(x)$ atas K .

Teorema 4. Misal F lapangan pemisah dari polinomial $f(x) \in K[x]$ atas K , jika E lapangan pemisah dari $f(x) \in K[x]$ yang lain maka terdapatlah isomorfisma $\varnothing : E \rightarrow F$

Bukti :

Pandang polinomial jika $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$, $a_i \in K$, $i = 0, 1, \dots, n$.

F lapangan pemisah dari polinomial $f(x)$ atas K maka akar-akar $f(x)$ berada dalam F . Misal $\alpha \in F$ maka $f(\alpha) = a_0\alpha^0 + a_1\alpha^1 + \dots + a_n\alpha^n = 0$ begitu juga untuk $\beta \in E$ maka $f(\beta) = a_0\beta^0 + a_1\beta^1 + \dots + a_n\beta^n = 0$ (karena E lapangan pemisah dari $f(x)$ atas K).

Bentuk pemetaan $\varnothing : E \rightarrow F$ dengan $\beta \mapsto \alpha$, maka $\forall \beta_1, \beta_2 \in E$ dan $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$ maka $\varnothing (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \varnothing (\beta_1) + \varnothing (\beta_2)$ dan $\varnothing (\beta_1 \cdot \beta_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \varnothing (\beta_1) \cdot \varnothing (\beta_2)$ jadi \varnothing homomorfisma dan jika $\varnothing (\beta_1) = \varnothing (\beta_2)$ maka $\alpha_1 = \alpha_2$ dan $\forall \alpha \in F$ maka terdapatlah $\beta \ni \varnothing (\beta) = \alpha$ jadi \varnothing isomorfisma.

$$\begin{aligned} \text{Dan untuk } \varnothing (f(\beta)) &= \varnothing (a_0\beta^0 + a_1\beta^1 + \dots + a_n\beta^n) \\ &= a_0\varnothing (\beta^0) + a_1\varnothing (\beta^1) + \dots + a_n\varnothing (\beta^n) \\ &= a_0\alpha^0 + a_1\alpha^1 + \dots + a_n\alpha^n \end{aligned}$$

Teorema 5. (Raisinghania, M.D, 1980). Lapangan pemisah merupakan perluasan aljabar.

Bukti :

Pandang F lapangan pemisah dari polinomial $f(x)$ atas lapangan K dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ adalah akar-akar dari $f(x)$, maka F dapat ditulis $F = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ atau

$$\begin{aligned} F_1 &= K(\alpha_1) \\ F_2 &= K_1(\alpha_2) = (K(\alpha_1))(\alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ F_n &= K_{n-1}(\alpha_n) = (K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}))(\alpha_n) = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = F. \end{aligned}$$

Tetapi setiap elemen-elemen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ merupakan akar-akar polinomial tidak nol $f(x)$ atas lapangan K , jadi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ merupakan aljabar atas K , maka F merupakan perluasan berhingga dari lapangan K (sebab $[K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : K]$ berhingga).

Jadi (menurut Teorema 2) F merupakan perluasan ajabar.

Contoh :

Misal $f(x) = x^4 - x = x^2 - x \in \mathbb{Z}_2[x]$, $p = 2$, $n = 2$.

$x^4 - x = x(x-1)(x^2 + x + 1)$. Ambil $\alpha = x + \langle x^2 + x + 1 \rangle$

Maka $0, 1, \alpha, 1 + \alpha$, adalah akar-akar dari $f(x) = x^4 - x$ sehingga $Z_2(\alpha)$ merupakan lapangan pemisah dari $f(x) = x^4 - x$ atas Z_2 yang merupakan suatu perluasan aljabar.

4. KESIMPULAN

1. Setiap perluasan berhingga merupakan perluasan aljabar.
2. Untuk semua lapangan K dan semua $f(x) \in K[x]$ sedemikian sehingga $\deg(f) \geq 1$, terdapatlah perluasan F dari K yang merupakan lapangan pemisah untuk $f(x)$ atas K .
3. Lapangan pemisah merupakan perluasan aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

1. Dean R. A. *Element of Abstract Algebra*, John Wiley & Sons, USA, 1966.
2. Fraleigh, J. B., *A First Course in Abstract Algebra*, Addison – Wesley Publishing Company, USA, 1994.
3. Hungerford, T. W., *Graduate Text in Mathematics Algebra*, Springer Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1984.
4. Raisinghania M. D, Aggarwal R. S, *Modern Algebra*, S Chand & Company Ltd, New Delhi, 1980.