JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 2, 82 - 92, Agustus 2001, ISSN : 1410-8518

MATRIKS HANKEL

Hankel Matrices

R. Heru Tjahjana
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstract

In this paper, we talk about Hankel Operator and Hankel Matrix. Operator $H_g:F[z]\rightarrow z^{-1}F[[z^{-1}]]$ defined by $H_g(f)=\pi\_(gf)$ is called the Hankel Operator. Hankel Operator can be represented by a Hankel matrix.

Keywords : Hankel Operator, matrix representation, Hankel matrix

1. PENGANTAR

Aljabar linear memegang peranan penting baik dalam bidang sains maupun teknologi (Howard A, 1981). Secara khusus penulis mendalami topik Operator Hankel dan Matriks Hankel. Hal yang melatarbelakangi pemilihan topik matriks Hankel sebagai bahan yang dipelajari adalah karena hubungannya yang erat dengan masalah-masalah sains dan teknologi khususnya yang berkaitan dengan teori sistem linear (Brewer, 1976).

Fuhrmann (1996) dalam bukunya yang berjudul *A Polynomial Approach to Linear Algebra* menulis materi Operator Hankel dan Matriks Hankel. Penulis mempelajari kembali apa yang dituliskan Fuhrmann dan memberikan bukti yang lebih detail pada teorema dan akibat-akibatnya. Penulis juga menulis contoh aplikasi dari Eising (1981).

2. CARA PENELITIAN

Cara penelitian yang dilakukan adalah studi literatur milik pribadi, milik Perpustakaan Jurusan Matematika dan Perpustakaan Fakultas MIPA UGM.

3. OPERATOR HANKEL DAN MATRIKS HANKEL

Notasi 3.1.1

Berikut akan dituliskan notasi-notasi penting yang digunakan tulisan ini.

Notasi	Arti
π_+	Operator π_+
$\pi\_$	Operator $\pi\_$
$F((z^{-1}))$	Himpunan semua jumlahan tak hingga dengan koefisien anggota lapangan F dan *indeterminates* z dan z^{-1}
F[z]	Himpunan semua polinomial dengan *indeterminates* z
$F[[z^{-1}]]$	Himpunan semua jumlahan tak hingga dengan koefisien anggota lapangan F dan *indeterminates* z^{-1}
F(z)	Lapangan fungsi rasional p/q, dengan p,q anggota F[z]
F_(z)	Himpunan semua fungsi rasional p/q, dengan p,q anggota F[z] dan deg p < deg q
π_q	Operator proyeksi dengan indeks q
X_q	$\{\pi_q f \mid f \in F[z]\}$
X^d	$\{r/d \mid \deg r < \deg d\}$
H_g	Operator Hankel H dengan indeks g

Definisi 3.1.1

1. Didefinisikan operator π_+: $F((z^{-1})) \rightarrow F((z^{-1}))$ dengan rumus $\pi_+ \sum_{j=-\infty}^{n} f_j z^j = \sum_{j=0}^{n} f_j z^j$ dan $\pi\_$: $F((z^{-1})) \rightarrow F((z^{-1}))$ dengan rumus $\pi\_ \sum_{j=-\infty}^{n} f_j z^j = \sum_{j=-\infty}^{-1} f_j z^j$

2. Misalkan $g(z)=\sum_{j=-\infty}^{n} g_j z^j \in F((z^{-1}))$. Didefinisikan operator Hankel H_g :

   $F[z] \rightarrow z^{-1} F[[z^{-1}]]$ dengan rumus $H_g(f)=\pi\_(gf)$ untuk $f \in F[z]$

3. Didefinisikan operator $S_+ : F[z] \to F[z]$ dengan rumus $S_+ (f)=zf$ dan operator $S\_: z^{-1} F[z^{-1}] \to z^{-1} F[z^{-1}]$ dengan rumus $S\_(f)= \pi\_ (zf)$.
4. Untuk $h\in z^{-1} F[[z^{-1}]]$, didefinisikan $p.h=\pi\_(ph)$.

Teorema 3.1.1

Misalkan $g\in F((z^{-1}))$

1. $H_g : F[z]\to z^{-1} F[[z^{-1}]]$, H_g merupakan homomorphisma F[z]-modul.
2. Sebarang homomorphisma F[z]-modul dari $F[z]\to z^{-1} F[[z^{-1}]]$ merupakan operator Hankel.
3. Misalkan $g_1,g_2\in F((z^{-1}))$ maka $H_{g_1} = H_{g_2}$ jika dan hanya jika $g_1-g_2\in F[z]$.

Bukti :

1. $H_g : F[z]\to z^{-1} F[[z^{-1}]]$, H_g merupakan homomorphisma F[z]-modul sebab $H_g (\alpha f_1+\beta f_2) = \pi\_g(\alpha f_1+\beta f_2) = \pi\_g\alpha f_1+ \pi\_g\beta f_2 = \alpha\pi\_gf_1 + \beta\pi\_gf_2 = \alpha H_gf_1+\beta H_gf_2.$
2. Ambil sebarang H homomorphisma F[z]-modul dari $F[z]\to z^{-1} F[[z^{-1}]]$
   Dengan menyajikan $H(1)=g$ dan ambil sebarang $f\in F[z]$
   didapat $H(f)=H(f.1)=f.H(1)=f.g=\pi\_(fg) =\pi\_(gf)= H_g(f)$.
3. $H_{g_1} = H_{g_2}$ jika dan hanya jika $g_1-g_2\in F[z]$
   Dari $H_{g_1} = H_{g_2}$ maka diperoleh $H_{g_1} - H_{g_2} = 0$. Selajutnya $H_{g_1} - H_{g_2} = H_{g_1-g_2}$ sebab
   $H_{g_1-g_2}(f) = \pi\_(g_1-g_2) f = \pi\_(g_1f)-\pi\_(g_2f)= H_{g_1}(f) - H_{g_2}(f) = H_{g_1} - H_{g_2}(f)$
   Sifat akan terbukti bila sifat $H_g=0\Leftrightarrow g\in F[z]$ terbukti.
   $\Rightarrow$
   Diketahui $H_g=0$, artinya $H_g(f)=0$, untuk setiap $f\in F[z]$
   $H_g(f) = \pi\_(gf)=0$, maka $gf=0$, untuk setiap $f\in F[z]$
   Didapat $0=gf\in F[z]$ dan $f\in F[z]$, disimpulkan $g\in F[z]$
   $\Leftarrow$
   Diketahui $g\in F[z]$. Akan dibuktikan $H_g(f)=0$, untuk setiap $f\in F[z]$

Ingat $H_g(f) = \pi\_(gf)$. Karena $F(z)=F[z]\oplus F\_(z)$ dan $gf\in F[z]$ maka

$\pi\_(gf)=0$, untuk setiap $f\in F[z]$

$H_g(f)=0$, untuk setiap $f\in F[z]$

Disimpulkan $H_g = 0$.□

Selajutnya perhatikan persamaan dibawah ini :

$H_g\, S_+(f)=\pi\_(gS_+f)= \pi\_(gzf)= \pi\_z(gf)=\pi\_(zf).\pi\_(gf)= S\_\, H_g(f)$

didapat $H_gS_+(f)= S\_H_g(f)$, persamaan ini merupakan persamaan fungsional operator Hankel.

Akibat 3.1.1

Misalkan $g\in F((z^{-1}))$ maka $H_g:F[z]\rightarrow z^{-1}F[[z^{-1}]]$ tidak invertibel

Bukti :

Andaikan H_g invertibel. Dari $H_gS_+= S\_H_g$ didapat $H_gS_+H_g^{-1}= S\_$, artinya S_+ dan S_ similar.

Perhatikan bahwa $F((z^{-1})) =F[z]\oplus z^{-1}F[[z^{-1}]]$

$S_+:f\in F[z]\mapsto zf\in F[z]$

$S\_: f\in z^{-1}F[[z^{-1}]]\mapsto \pi\_(zf)\in z^{-1}F[[z^{-1}]]$, sehingga $S_+=S|F[z]$ dan $S\_=S|\, z^{-1}F[[z^{-1}]]$.

Karena $F[z] \cap z^{-1}F[[z^{-1}]]=\{0\}$maka $S_+\cap S\_=\{0\}$, akibatnya $S = S_+\oplus S\_$.

S_ tidak injektif sebab Ker $S\_\neq\{0\}$. Alasan Ker $S_\neq\{0\}$sebagai berikut :

Ambil sebarang $v\in$ Ker S_ maka $S\_(v)=0$.

Ingat $v\in z^{-1}F[[z^{-1}]]$, artinya

$v = z^{-1}(\ldots+ g_{-n}z^{-n} + g_{-n+1}z^{-n+1} + \ldots. + g_{-1})$

$v= g_{-n}z^{-n-1} + g_{-n+1}z^{-n} + \ldots + g_{-1}z^{-1}$

$zv=\ldots+ g_{-n}z^{-n} + g_{-n+1}z^{-n+1} + \ldots + g_{-1}$

Perhatikan $S\_(v)= \pi\_(zv)= \ldots+ g_{-n}z^{-n} + g_{-n+1}z^{-n+1} + \ldots. + g_{-2}z^{-2}$.

Karena $S\_(v)= \pi\_(zv)=0$, maka $\ldots+ g_{-n}z^{-n} + g_{-n+1}z^{-n+1} + \ldots + g_{-2}z^{-2} =0$

Didapat $g_{-n} = g_{-n+1} = \ldots\ldots = g_{-2} = 0$.

Jadi $v= z^{-1}(\ldots+0+0+\ldots.+g_{-1})=z^{-1}g_{-1}\neq 0$.Terbukti Ker $S\_\neq\{0\}$.

Sedangkan S_+ injektif karena Ker $S_+ =\{0\}$. Alasan Ker $S_+ =\{0\}$ sebagai berikut :

$S_+(v)=zv=\ldots+g_{-n}z^{-n}+g_{-n+1}z^{-n+1}+\ldots+g_{-1}$

Jika $S_+(v)=0$ maka $\ldots=g_{-n}=g_{-n+1}=\ldots\ldots=g_{-1}=0$.

Ambil $v\in$ Ker S_+ , maka $S_+(v)=zv=0$, akibatnya $v=\ldots+0.z^{-n}+0.z^{-n+1}+\ldots+0=0$

Jadi $v\in\{0\}$.

Ambil sebarang $v\in\{0\}$, maka $v=0$ maka $S_+(v)=S_+(0)=0$. Jadi $v\in$ Ker S_+.

Diperoleh bahwa S_ tidak injektif dan S_+ injektif, akibatnya S_+ dan S_ tidak similar. Kontradiksi didapat maka pengandaian diingkar dan didapat H_g tidak invertibel.□

Teorema 3.1.2 (Kronecker)

1. Operator Hankel H_g mempunyai rank berhingga jika dan hanya jika g fungsi rasional.
2. Jika g=p/q dengan p,q koprima maka Ker $H_{p/q}$ =qF[z] dan Im $H_{p/q}=X^q$.

Bukti:

1. Operator Hankel H_g mempunyai rank berhingga jika dan hanya jika g fungsi rasional

   $\Rightarrow$

   Diketahui H_g mempunyai rank berhingga

   Andaikan g tidak rasional, maka $g\in F[z]$.Ingat $H_g(f)=\pi\_(gf)$.

   Karena $g\in F[z]$ maka $gf\in F[z]$, akibatnya $\pi\_(gf)=0$. Berarti $H_g(f)=0$ dan

   Im $H_g=\{0\}$, artinya H_g tidak mempunyai rank. Kontradiksi dengan H_g mempunyai rank berhingga. Jadi pengandaian diingkar, terbukti g rasional.

   $\Leftarrow$

   Perhatikan bahwa $F(z)=F[z]\oplus F\_[z]$

   Misalkan g=p/q maka $H_{p/q}(f)=\pi\_((p/q)f)=\pi\_(pf/q)$

   $pf/q\in F[z]$ maka $\pi\_(pf/q)\in F\_[z]$. Jadi $\pi\_(pf/q)$ merupakan polinomial berbentuk r/q dengan deg r < deg q.

   $H_g(f)=\pi\_((p/q)f)=\pi\_(pf/q)=\{r/q \mid \deg r<\deg q\}=X^q$

   Perhatikan bahwa $X^q\cong X_q$ dan dim X_q = deg q

Jadi dim Im H_g = dim X_q = deg q < ~. Kesimpulan rk(H_g) berhingga.

2. Dari butir 1 didapat dim Im H_g = dim X_q sehingga Im H_g= X_q

   Selanjutnya akan dibuktikan Ker $H_{p/q}$ =qF[z]. Ambil sebarang f∈ qF[z]

   $f=q.(\alpha_0+\alpha_1 z^1+\ldots+\alpha_n z^n)=(\beta_0+\beta_1 z^1+\ldots+\beta_n z^n).(\alpha_0+\alpha_1 z^1+\ldots+\alpha_n z^n)$

   $$=\beta_0\alpha_0+(\beta_1\alpha_0+\beta_0\alpha_1)z^1+\ldots+\sum_{\substack{i+j=1\\ i=0,1,2,\ldots,m\\ j=0,1,2,\ldots,n}}^{m+n}\beta_i\alpha_j\, z^{m+n}$$

   $H_{p/q}(f)=\pi\_((p/q)f)=\pi\_(p/q).\pi\_(f)=\pi\_(p/q).0=0$. Jadi f∈Ker $H_{p/q}$.

   Ambil sebarang f∈Ker $H_{p/q}$,

   maka $H_{p/q}(f)=\pi\_((p/q)f)=0$. Karena $\pi\_((p/q)f)=0$ maka (p/q)f tidak memuat z pangkat negatif.

   $(p/q)f=\gamma_0+\gamma_1 z^1+\ldots+\gamma_n z^n$,dengan $\gamma_i\in F$

   $f=(q/p)\ \gamma_0+\gamma_1 z^1+\ldots+\gamma_n z^n=q.(\ (\gamma_0+\gamma_1 z^1+\ldots+\gamma_n z^n)/p)$. Perhatikan bahwa

   $(\gamma_0+\gamma_1 z^1+\ldots+\gamma_n z^n)/p\in F[z]$ sebab pf dibagi q sisanya 0, berarti q|pf. Karena p,q koprima maka q bukan pembagi p, artinya q|f. Jadi f∈qF[z].□

Selanjutnya akan dicari matriks representasi operator Hankel $H_g:F[z]\to z^{-1}F[[z^{-1}]]$ dengan $H_g(f)=\pi\_(gf)$, untuk g $=\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^{-j}\in F((z^{-1}))$ khusus yang indeksnya positif,

Basis F[z]={$1,z^1,\ldots,z^n,\ldots$ }

Basis Im H_g = Basis Im $H_{g/1}$ =Basis X^1 =Basis{r/1 | deg r < 0}=

Basis{$\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}+\ldots+\alpha_n z^{-n}\ |\alpha_i\in F,\ \alpha_n\neq 0, n\in z^{-1}$ }={$z^{-1},z^{-2},\ldots,{}_n z^{-n},\ldots$}

$$H_g(1)=\pi\_(g.1)=\pi\_(\sum_{j=1}^{\sim} g_j z^{-j})=g_1 z^{-1}+g_2 z^{-2}+\ldots+g_n z^{-n}+\ldots$$

$$H_g(z)=\pi\_(g.z)=\pi\_(\sum_{j=1}^{\sim} g_j z^{-j}.z)=\pi\_(\sum_{j=1}^{\sim} g_j z^{-j+1})=g_2 z^{-1}+g_3 z^{-2}+\ldots+g_{n+1}z^{-n}+\ldots$$

$$H_g(z^2)=\pi\_(g.z^2)=\pi\_(\sum_{j=1}^{\sim} g_j z^{-j}.z^2)=\pi\_(\sum_{j=1}^{\sim} g_j z^{-j+2})=g_3 z^{-1}+g_4 z^{-2}+\ldots+g_{n+2}z^{-n}+\ldots$$

Vol. 4. No. 2, 82 - 92, Agustus 2001, ISSN : 1410-8518

⋮

maka matriks representasi operator Hankel H_g:F[z]→z^{-1}F[[z^{-1}]] dengan H_g(f)= π_(gf) adalah H= $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & .... \\ g_2 & g_3 & g_4 & .... \\ g_3 & g_4 & g_5 & .... \\ ... & & & \\ ... & & & \end{pmatrix}$. Selanjutnya sebarang matriks tak hingga (g_{ij}) dengan g_{ij}=g_{i+j-1} disebut matriks Hankel.

Dengan menyebut operator Hankel sebagai matriks Hankel tak hinggga maka teorema 3.1.2 dapat ditulis kembali sebagai teroema 3.1.3 berikut :

Teorema 3.1.3

Matriks Hankel tak hingga H mempunyai rank hingga jika dan hanya jika g(z)= $\sum_{j=1}^{\sim} g_j z^{-j}$ adalah fungsi rasional.

Definisi 3.1.2

Diberikan fungsi rasional sejati g, didefinisikan derajad Mc Milan dinotasikan sebagai δ yaitu δ(g)=rank Hg.

Teorema 3.1.4

Misalkan g=p/q dengan p,q koprima dengan g fungsi rasional sejati maka δ(g) = deg q

Bukti:

Dengan teorema 3.1.2 didapat Im $H_{p/q}$ = X^q dan δ(g) = rank H_g = rank $H_{p/q}$ = dim Im $H_{p/q}$ = dim X^q = deg q.□

Teorema 3.1.5

Misalkan g_i =p_i /q_i fungsi rasional dengan p_i dan q_i koprima maka

1. Im $H_{g_1+g_2}$ ⊂ Im H_{g_1} + Im H_{g_2} dan δ(g_1+g_2)≤ δ(g_1)+ δ(g_2)
2. δ(g_1+g_2)= δ(g_1) + δ(g_2) jika dan hanya jika q_1 ,q_2 koprima

Bukti :

1. Akan dibuktikan Im $H_{g_1+g_2} \subset$ Im H_{g_1} +Im H_{g_2}

   Perhatikan bahwa

   Im $H_{g_1} = X^{q_1}$, Im $H_{g_2} = X^{q_2}$,

   Im $H_{g_1+g_2} = \{\pi\_(g_1+g_2)f \mid f \in F[z]\}$

   Ambil sebarang $f \in$ Im $H_{g_1+g_2}$,maka $f=\pi\_(g_1+g_2)h$, untuk suatu $h\in F[z]$

   $f=\pi\_(g_1+g_2)h=\pi\_(g_1h+g_2h) =\pi\_(g_1h)+\pi\_(g_2h)= H_{g_1}(h)+H_{g_2}(h)$

   Jadi $f \in$ Im H_{g_1} +Im H_{g_2}

   Akan dibuktikan $\delta(g_1+g_2)\leq \delta(g_1)+ \delta(g_2)$, artinya harus dibuktikan

   rank $H_{g_1+g_2} \leq$ rank H_{g_1} + rank H_{g_2}

   dim (Im $H_{g_1+g_2}$)$\leq$ dim Im (H_{g_1})+ dim (Im H_{g_2})

   dim ($\pi\_(g_1+g_2)F[z]$) $\leq$ dim X^{q_1} + dim X^{q_2}

   dim ($\pi\_(g_1+g_2)F[z]$) $\leq$ deg q_1+ deg q_2.

   Perhatikan lagi bahwa

   $\pi\_((g_1+g_2)f) =\pi\_(g_1f+g_2f) =\pi\_(g_1f) +\pi\_(g_2f) =\pi\_(\frac{p_1}{q_1} f) +\pi\_(\frac{p_2}{q_2} f)$.

   Jadi dim $\pi\_((g_1+g_2)f)$ = dim $\pi\_(\frac{p_1}{q_1} f) +\pi\_(\frac{p_2}{q_2} f) \leq$ deg q_1+ deg q_2.

   Terbukti $\delta(g_1+g_2)\leq \delta(g_1)+ \delta(g_2)$.

2. Akan dibuktikan $\delta(g_1+g_2)= \delta(g_1)+ \delta(g_2)$ jika dan hanya jika q_1, q_2 koprima

   $\Rightarrow$

   Diketahui $\delta(g_1+g_2)= \delta(g_1)+ \delta(g_2)$, artinya dim (Im $H_{g_1+g_2}$)= dim X^{q_1} + dim X^{q_2}

   Andaikan q_1,q_2 tidak koprima maka Im $H_{g_1+g_2} \neq X^{q_1q_2}$,

   berarti dim Im $H_{g_1+g_2} \neq$ dim $X^{q_1q_2}$.

   Selajutnya diperoleh

   dim (Im $H_{g_1+g_2}$)$\neq$ dim X^{q_1} +dim Im X^{q_2}. Kontradiksi dicapai, pengandaian dingkar sehingga terbukti q_1,q_2 koprima.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 2, 82 - 92, Agustus 2001, ISSN : 1410-8518

$\Leftarrow$

Diketahui q_1,q_2 koprima, akan dibuktikan $\delta(g_1+g_2)= \delta(g_1)+ \delta(g_2)$.

Pada umumnya berlaku $\text{Im } H_{g_1+g_2} \subseteq \text{Im } H_{g_1} + \text{Im } H_{g_2}$

Untuk membuktikan $\text{Im } H_{g_1+g_2} = \text{Im } H_{g_1} + \text{Im } H_{g_2}$, tinggal ditunjukkan bahwa $\text{Im } H_{g_1} + \text{Im } H_{g_2} \subseteq H_{g_1+g_2}$. Ambil sebarang $f\in \text{Im } H_{g_1} + \text{Im } H_{g_2}$,maka $f=f_1+f_2$, dengan $f_1 \in \text{Im } H_{g_1} = X^{q_1}$, dan $f_2\in \text{Im } H_{g_2} = X^{q_2}$, sehingga $f\in X^{q_1} + X^{q_2}$.

Karena q_1,q_2 koprima maka $X^{q_1 \; q_2} = X^{q_1} + X^{q_2}$.

Jadi $f\in X^{q_1 \; q_2}$, artinya $f\in \text{Im } H_{g_1+g_2}$. Terbuktilah $\text{Im } H_{g_1+g_2} = \text{Im } H_{g_1} + \text{Im } H_{g_2}$,

artinya terbukti pula dim (Im $H_{g_1+g_2}$)=dim(Im H_{g_1})+dim(Im H_{g_2}), sehingga terbukti

rank $H_{g_1+g_2}$ = rank H_{g_1} + rank H_{g_2}, terbukti $\delta(g_1+g_2)= \delta(g_1)+ \delta(g_2)$.$\square$

Berikut ini akan disajikan suatu penerapan matriks Hankel dalam teori realisasi. Sebelumnya akan dituliskan dulu definisi realisasi dan hal-hal terkait yang perlu diketahui.

Definisi 3.1.3

Diberikan ring komutatif R. Sistem (H,F,G) dengan H matriks atas R bertipe pxn, F matriks atas R bertipe nxn, dan G matriks atas R bertipe nxm yang memenuhi $M_i=HF^{i-1}G$, dengan $i\geq 1$ disebut realisasi untuk { M_i }. Selanjutnya koleksi matriks { M_i } disebut pemetaan input-output atau pemetaan i/o dan setiap M_i adalah matriks bertipe pxm.

Definisi 3.1.4

Misalkan Ei=Baris ke i dari In, W_n adalah himpunan seluruh fungsi $\omega:\{1,2,\ldots,n\}\rightarrow\{1,2,\ldots,n\}$, dan P_ω adalah matriks bertipe nxn dengan baris ke i P_ω = $E_{\omega}(i)$. Jika $\omega\in W_n$ bijektif maka P_ω disebut matriks permutasi.

Contoh berikut merupakan aplikasi matriks Hankel dalam proses penentuan realisasi pemetaan i/o pada sistem atas Z yang diberikan oleh Eising(1981).

Contoh 3.1.1

Jika diberikan pemetaan i/o ={M_i} atas Z sebagai berikut

$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $M_3 = M_4 = \ldots\ldots = 0$. Akan dihitung ralisasi pemetaan i/o ini.

Mula-mula ditulis pemetaan i/o sebagai matriks Hankel

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \cdots \\ M_2 & M_3 & \cdots \\ M_3 & M_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$M_{2,2} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa rank $M_{2,2} = 2$.

Selanjutnya dikerjakan proses faktorisasi $\prod M_{t,k}$ V=[A,0] hasilnya diperoleh (Ari Suparwanto, 1998),

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Pi M_{2,2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$H = [I_2,0]\, M_{2,2}\, V \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AF = \prod \sigma(M_{2,2}) V \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} F = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Pi\sigma(M_{2,2})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Dengan menyelesaikan persamaan ini diperoleh $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$AG = \prod M_{2,2} \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} G = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Pi M_{2,2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Dengan menyelesaikan persamaan ini diperoleh G $= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4. KESIMPULAN

Misalkan $g \in F((z^{-1}))$ Operator $H_g : F[z] \to z^{-1} F[[z^{-1}]]$, dengan rumus $H_g(f) = \pi\_(gf)$ disebut operator Hankel. Operator Hankel dapat diwakili oleh matriks Hankel.

DAFTAR PUSTAKA

1. Brewer, *Linear System Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, New York, 1976.
2. Eising R and Hautus M, *Realization algorithms for system over a principal ideal domain*, *Mathematical System Theory 14*, 1981, 353-366.
3. Fuhrmann, *A Polynomial Approach to Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1996.
4. Howard A, *Elementary Linear Algebra*, John Wiley and Sons, New York, 1981.
5. Suparwanto A, *Teori Realisasi Atas Ring Komutatif*, Tesis, Program Pascasarjana UGM,Yogyakarta, 1998.