JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 2, 101 - 112, Agustus 2001, ISSN : 1410-8518

PROSES STOKASTIK KELAHIRAN-KEMATIAN DENGAN DUA JENIS KELAMIN SECARA KELOMPOK PADA PROSES YULE-FURRY

Samsuryadi
Jurusan Matematika, FMIPA
Universitas Sriwijaya Inderalaya, Palembang

Abstract

The research is carried out to build stochastic model from cluster birth-death process with two sexes on Yule-Furry process, since the formula or stochastic model from that stochastic process is not presented yet, where as a lot of phenomena are represented about that stochastic process. Model development is basically to find postulate form and differential equation. The final results of this research are postulate and differential equation from stochastic process, partial differential equation for transition probability generating function, and joint moment generating function.

Keywords : stochastic process, cluster birth-death process, Yule-Furry process.

1. PENDAHULUAN

Salah satu proses yang spesifik dari proses stokastik adalah proses stokastik dengan waktu kontinyu dan ruang *state* diskrit. Proses ini disebut dengan proses cacah, sedangkan proses cacah yang berupa suatu model dari fenomena alam dinamakan proses Poisson. Salah satu pengembangan dari proses Poisson adalah mengijinkan suatu peristiwa yang terjadi pada selang waktu tertentu, bergantung pada banyaknya peristiwa yang telah terjadi, contoh dari fenomena ini adalah proses kelahiran, proses kematian, dan proses kelahiran-kematian.

Proses kelahiran-kematian yang telah banyak dibahas dalam literatur adalah proses kelahiran-kematian murni, diantaranya pada Taylor (1984), Papoluis (1984), Cox dan Miller (1987), Srinivasan dan Mehata (1988), Bhattacharya dan Waymire (1990). Sementara itu, banyak fenomena yang ditemukan di lapangan dapat menggambarkan suatu keadaan dimana suatu peristiwa dapat terjadi secara serentak atau bersamaan dalam selang waktu tertentu, misalnya suatu proses memecah diri dan mati secara serentak yang terjadi dalam selang waktu tertentu, atau terjadinya konsentrasi individu pada suatu ruang tertentu dan pada waktu tertentu juga, yang diakibatkan kedatangan dan kepergian individu secara bersamaan. Keadaan ini tidak lain merupakan gambaran dari proses kelahiran-kematian kelompok. Kemudian, di lapangan juga ditemukan kenyataan bahwa suatu individu (makhluk hidup) dapat dibedakan atas dua jenis kelamin, yaitu perempuan dan laki-laki. Oleh karena itu, perlu kiranya untuk dikaji suatu model stokastik dari proses kelahiran-kematian kelompok dengan dua jenis kelamin, melalui penurunan secara matematis sehingga model yang diperoleh dapat mencerminkan fenomena di lapangan.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Proses Poisson

Proses Poisson dapat didefinisikan dengan beberapa postulat seperti tersebut di bawah ini (Taylor, 1984).

Definisi : Sebuah proses Poisson dengan intensitas $\lambda>0$ adalah suatu proses stokastik dengan nilai bilangan bulat $\{N(t);t \geq 0\}$, dimana

(i) Untuk setiap titik waktu $t = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, maka proses inkremental $N(t_2)-N(t_1)$, $N(t_3)-N(t_2)$, …, $N(t_n)-N(t_{n-1})$ adalah peubah acak saling bebas;

(ii) Untuk $\Delta t \geq 0$ dan $t \geq 0$, peubah acak $N(t+\Delta t)-N(\Delta t)$ menyebar menurut distribusi Poisson, yaitu

$$P\{N(t+\Delta t)-N(\Delta t)=k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\text{; untuk } k = 0,1,2, \ldots \text{, dan}$$

(iii) $N(0) = 0$. **(2.1)**

2.2 Proses Poisson Kelompok

Dalam proses Poisson terdapat asumsi bahwa sejumlah peristiwa dapat terjadi secara bersamaan pada suatu saat, yaitu jika terdapat suatu kelompok pada suatu titik (Praptono, 1986), yang memenuhi asumsi-asumsi di bawah ini,

(i) $\boldsymbol{N(t)}$ menyatakan banyaknya kelompok pada waktu $\boldsymbol{t}$**,** merupakan proses Poisson dengan rata-rata $\lambda \boldsymbol{t}$, dengan $\boldsymbol{t}$ adalah titik (waktu) dimana kelompok terjadi.

(ii) Setiap kelompok mempunyai bilangan acak yang menunjukkan banyaknya peristiwa yang terjadi, sementara $\boldsymbol{X_i}$ menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi pada kelompok ke-$\boldsymbol{i}$**,** merupakan peuabah acak. Banyaknya peristiwa yang terjadi pada kelompok yang berbeda adalah saling bebas dan berdistribusi peluang sama.

2.3 Rantai Markov (*Markov Chains*)

Pada proses stokastik banyak sekali proses yang mempunyai sifat khas, salah satunya adalah proses yang mempunyai ***sifat Markov.***

Definis i: Jika $\boldsymbol{\{N_n ; n \geq 0\}}$, merupakan suatu proses stokastik dengan sifat

$$P\{N_{n+1}=k \mid N_0, N_1, \ldots, N_n\} = P\{N_{n+1}=k \mid N_n\} \qquad \textbf{(2.2)}$$

untuk semua $\boldsymbol{k \in S}$ (***ruang state***) dan $\boldsymbol{n \geq 0}$**,** maka proses stokastik ini mempunyai ***sifat markov*** atau ***rantai Markov*** (Cinlar;1975).

Untuk semua bilangan bulat taknegatif $\boldsymbol{n}$ dan $\boldsymbol{N_0, N_1, \ldots, N_n, N_{n+1} \in S}$**,** maka peluang bersyaratnya adalah

$$P\{N_{n+1}=k \mid N_n=j\} = P(j,k) \text{ dimana } (j,k) \in S \qquad \textbf{(2.3)}$$

disebut ***peluang transisi*** untuk rantai tersebut.

2.4 Proses Kelahiran-kematian Murni (*Pure Birth-Death Process*)

Misalkan λ dan μ adalah suatu barisan bilangan positif, maka suatu proses kelahiran-kematian murni terdefinisi sebagai suatu proses Markov yang memenuhi postulat di bawah ini.

(i) $\boldsymbol{P\{N(t,t+\Delta t)=1 \mid N(t)=n\} = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t),}$

(*ii*) $\boldsymbol{P\{N(t,t+\Delta t)=-1 \mid N(t)=n\} = \mu_n \Delta t + o(\Delta t),}$

(iii) $\boldsymbol{P\{N(t,t+\Delta t)= 0 \mid N(t)=n\} = 1 - (\lambda_n+\mu_n)\Delta t + o(\Delta t),}$

(iv) $P\{N(t,t+\Delta t)=\pm m \mid N(t)=n\} = o(\Delta t)$,
dengan m = 2,3,4,… dan n = 0,1,2,… **(2.4)**

Untuk $\Delta t > 0$, akan diperoleh persamaan diferensial

$$P_n'(t) = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) \tag{2.5}$$

2.5 Proses Kelahiran-Kematian Yule-Furry

Proses Poisson dimana λ_n dan μ_n merupakan fungsi dari n disebut ***proses kelahiran-kematian murni***, sedangkan untuk $\lambda_n = n\lambda$ dan $\mu_n = n\mu$ yang bersifat linier disebut ***proses Yule-Furry*** (Cox dan Miller;1987). Jika $N(t)$ menyatakan banyaknya populasi pada waktu t, dan jika $P_n(t) = P\{N(t)=n\}$, dengan mengambil $\lambda_n = n\lambda$ dan $\mu_n = n\mu$ maka $P_n(t)$ dapat diperoleh dari persamaan

$$P_n'(t) = -n(\lambda+\mu)P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) \tag{2.6}$$

3. LANGKAH PEMODELAN PROSES STOKASTIK

Pembangunan model proses stokastik ini melalui tahapan sebagai berikut, yaitu: merumuskan postulat yang memenuhi proses Poisson dan Markov, memodelkan postulat ke bentuk persamaan diferensial (PD) dan menggunakan teorema persamaan diferensial parsial untuk fungsi pembangkit peluang transisi, serta membentuk fungsi momen gabungan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Postulat Proses Kelahiran-Kematian Secara Kelompok dengan Dua Jenis Kelamin

Dalam sebuah selang waktu yang kecil, katakanlah $(t,t+\Delta t)$, misalkan $X(t,t+\Delta t)$ menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu $(t,t+\Delta t)$ dan $X(t,t+\Delta t)$ merupakan sebuah peubah acak dengan asumsi-asumsi sebagai berikut (Samsuryadi, 1999) :

(i) $\boldsymbol{N(t,t+\Delta t)}$ menyatakan banyaknya kelompok pada waktu $\boldsymbol{(t,t+\Delta t)}$, dan $\boldsymbol{N(t,t+\Delta t)}$ merupakan proses Poisson dengan rata-rata $\boldsymbol{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)\ \Delta t}$ dengan $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1$ dan μ_2 berturut-turut menyatakan rata-rata kelahiran wanita, rata-rata kelahiran laki-laki, rata-rata kematian wanita dan rata-rata kematian laki-laki.

(ii) Tiap kelompok mempunyai bilangan acak yang menunjukkan banyaknya peristiwa yang terjadi. $\boldsymbol{X_i}$ menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi pada kelompok ke-$\boldsymbol{i}$, dan $\boldsymbol{X_i}$ merupakan sebuah peubah acak. Banyaknya peristiwa yang terjadi pada kelompok yang berbeda adalah saling bebas dan berdistribusi peluang sama.

Anggaplah sekarang $\boldsymbol{X(t)}$, sebuah peubah acak, adalah banyaknya individu pada waktu $\boldsymbol{t}$, dan $\boldsymbol{P\{X(t)=n\}}$ dinyatakan dengan $\boldsymbol{P_n(t)}$. Dalam selang waktu $\boldsymbol{(t,t+\Delta t)}$, kemungkinan peristiwa yang terjadi pada proses stokastik kelahiran-kematian kelompok dengan dua jenis kelamin adalah ***terjadi satu atau lebih kelahiran wanita***, atau ***terjadi satu atau lebih kelahiran laki-laki***, atau ***terjadi satu atau lebih kematian wanita***, atau ***terjadi satu atau lebih kematian laki-laki***, atau ***tidak terjadi satu atau lebih kelahiran atau kematian baik wanita maupun laki-laki***.

Selanjutnya, misalkan untuk proses linier (proses Yule-Furry) $\boldsymbol{\{\lambda_n = n\lambda\}}$ dan $\boldsymbol{\{\mu_n = n\mu\}}$ adalah suatu barisan bilangan positif. Jika dalam selang waktu $\boldsymbol{(t,t+\Delta t)}$ setiap anggota populasi mempunyai peluang $\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$ untuk lahirnya satu atau lebih individu wanita yang baru, $\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_2\Delta t + o(\Delta t)$ untuk lahirnya satu atau lebih individu laki-laki yang baru, $\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_1\Delta t + o(\Delta t)$ untuk matinya satu atau lebih individu wanita dan $\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_2\Delta t + o(\Delta t)$ untuk matinya satu atau lebih individu laki-laki, maka suatu proses stokastik kelahiran-kematian kelompok dengan dua jenis kelamin pada proses Yule-Furry didefinisikan sebagai suatu proses Markov yang juga memenuhi postulat di bawah ini,

(i) $P\{X(t,t+\Delta t)= \sum X_i \mid X(t)=i,j\} = i\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_1\Delta t + o(\Delta t),$

(ii) $P\{X(t,t+\Delta t)= \sum X_i \mid X(t)= i,j\} = i\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_2\Delta t + o(\Delta t),$

(iii) $P\{X(t,t+\Delta t)=- \sum X_i \mid X(t)= i,j\} = i\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_1\Delta t + o(\Delta t),$

(iv) $P\{X(t,t+\Delta t)=- \sum X_i \mid X(t)= i,j\} = j\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_2\Delta t + o(\Delta t),$

(v) $P\{X(t,t+\Delta t)=0 \mid X(t)=i,j\} = 1 - \left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right](i\lambda_1+i\lambda_2+i\mu_1+j\mu_2)\Delta t + o(\Delta t)$,

(vi) $P\{X(t,t+\Delta t)=\pm m\sum X_i \mid X(t)=i,j\} = o(\Delta t)$,

dengan m = 2,3,4,… **(4.1)**

Catatan: *Banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu* **$(t,t+\Delta t)$** *saling bebas dengan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu* **$(0,t)$.**

4.2 Model PD Proses Kelahiran-Kematian secara Kelompok dengan Dua Jenis Kelamin

Penjelasan postulat (4.1) di atas dapat dinyatakan dalam bentuk pernyataan peluang sebagai berikut :

$$P_{i,j}(t) = P\{X(t)=i,j\}$$

atau $$P_{i,j}(t+\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=i,j\} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Persamaan **(4.3)** dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} P_{i,j}(t+\Delta t) = P\{ & X(t)=i,j \text{ dan } X(t,t+\Delta t)=0 \text{ atau } X(t)=i-\sum X_i,j \text{ dan } X(t,t+\Delta t)=\sum X_i \text{ atau} \\ & X(t)=i,j-\sum X_i \text{ dan } X(t,t+\Delta t)=\sum X_i \text{ atau } X(t)=i+\sum X_i,j \text{ dan } X(t,t+\Delta t)=-\sum X_i \text{ atau} \\ & X(t)=i,j+\sum X_i \text{ dan } X(t,t+\Delta t)=-\sum X_i \text{ atau } X(t)=i\mp m\sum X_i,j \text{ dan} \\ & X(t,t+\Delta t)=\pm m\sum X_i \text{ atau } X(t)=i,j\mp m\sum X_i \text{ dan } X(t,t+\Delta t)=\pm m\sum X_i\} \quad \textbf{atau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{i,j}(t+\Delta t) = {} & P\{X(t)=i,j\}.\, P\{X(t,t+\Delta t)=0 \mid X(t)=i,j\} + \\ & P\{X(t)=i-\sum X_i,j\}.\, P\{X(t,t+\Delta t)=\sum X_i \mid X(t)=i-\sum X_i,j\} + \\ & P\{X(t)=i,j-\sum X_i\}.\, P\{X(t,t+\Delta t)=\sum X_i \mid X(t)=i,j-\sum X_i\} + \\ & P\{X(t)=i+\sum X_i,j\}.\, P\{X(t,t+\Delta t)=-\sum X_i \mid X(t)=i+\sum X_i,j\} + \\ & P\{X(t)=i,j+\sum X_i\}.\, P\{X(t,t+\Delta t)=-\sum X_i \mid X(t)=i,j+\sum X_i\} + \\ & P\{X(t)=i\mp m\sum X_i,j\}.\, P\{X(t,t+\Delta t)=\pm m\sum X_i \mid X(t)=i\mp m\sum X_i,j\} + \\ & P\{X(t)=i,j\mp m\sum X_i\}.\, P\{X(t,t+\Delta t)=\pm m\sum X_i \mid X(t)=i,j\mp m\sum X_i\} \qquad \textbf{(4.4)} \end{aligned}$$

Persamaan **(4.4)** dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ini :

$$\begin{aligned} P_{i,j}(t+\Delta t) - P_{i,j}(t) = {} & -\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right](i\lambda_1+i\lambda_2+i\mu_1+j\mu_2)\Delta t.P_{i,j}(t) + \\ & (i-\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_1\Delta t.P_{i-\sum X_i,j}(t) + \end{aligned}$$

$$\mathbf{i}\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_2\Delta t.P_{i,j-\sum Xi}(t) +$$
$$(\mathbf{i}+\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_1\Delta t.P_{i+\sum Xi,j}(t) +$$
$$(\mathbf{j}+\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_2\Delta t.P_{i,j+\sum Xi}(t) +$$
$$[P_{i,j}(t) + P_{i-\sum Xi,j}(t) + P_{i,j-\sum Xi}(t) + P_{i+\sum Xi,j}(t) +$$
$$P_{i,j+\sum Xi}(t) + P_{i\mp m\sum Xi,j}(t) + P_{i,j\mp m\sum X}(t)].\ o(\Delta t)$$

Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan **Δt,** dan untuk **$\Delta t \to 0$,** maka akan diperoleh

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{i,j}(t+\Delta t)-P_{i,j}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} -\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right](i\lambda_1+i\lambda_2+i\mu_1+j\mu_2).P_{i,j}(t) +$$
$$(i\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_1.P_{i\sum Xi,j}(t) +$$
$$i\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_2.P_{i,j\sum Xi}(t) +$$
$$(i+\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_1.P_{i+\sum Xi,j}(t) +$$
$$(j+\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_2.P_{i,j+\sum Xi}(t) +$$
$$[P_{i,j}(t) + P_{i-\sum Xi,j}(t) + P_{i,j-\sum Xi}(t) + P_{i+\sum Xi,j}(t) + P_{i,j+\sum Xi}(t) +$$
$$P_{i\mp m\sum Xi,j}(t) + P_{i,j\mp m\sum Xi}(t)].\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \qquad \textbf{(4.5)}$$

Jadi, persamaan diferensial untuk proses stokastik kelahiran-kematian dengan dua jenis kelamin secara kelompok pada proses Yule-Furry adalah :

$$P'_{i,j}(t) = -\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right](i\lambda_1+i\lambda_2+i\mu_1+j\mu_2).P_{i,j}(t) + (i-\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_1.P_{i-\sum Xi,j}(t) +$$
$$i\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_2.P_{i,j-\sum Xi}(t) + (i+\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_1.P_{i+\sum Xi,j}(t) +$$
$$(j+\sum X_i)\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_2.P_{i,j+\sum Xi}(t) \qquad \textbf{(4.6)}$$

Penentuan fungsi pembangkit peluang transisi Persamaan **(4.6)** dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 4.1 (Samsuryadi, 1999) :
Persamaan diferensial parsial untuk fungsi pembangkit peluang transisi dari sebuah proses stokastik kelahiran-kematian dengan dua jenis kelamin secara kelompok pada proses Yule-Furry dengan syarat

$$\boldsymbol{G(z_1,z_2;t)} = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j P_{i,j}(t) \tag{4.7}$$

adalah

$$\frac{\partial G}{\partial t} = [1/\sum X_i]E[X_i][-\mu_1 z_1 - (\lambda_1+\lambda_2)z_1 + \mu_1 + \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_1 z_2]\frac{\partial G}{\partial z_1} +$$

$$[1/\sum X_i]E[X_i]\,\mu_2(1-z_2)\frac{\partial G}{\partial z_2} \tag{4.8}$$

Bukti :

Diketahui bahwa

$$\boldsymbol{G(z_1,z_2;t)} = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j P_{i,j}(t)$$

Jika persamaan di atas diturunkan, maka akan diperoleh

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j P'_{i,j}(t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j \left[\frac{P_{i,j}(t+\Delta t) - P_{i,j}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j \left[P_{i,j}(t+\Delta t) - P_{i,j}(t)\right]$$

dan karena menurut Bhattacharya dan Waymire (1990) $P_{i,j}(t+\Delta t) = P_{i,j}(t).E[Z^{X(t+\Delta t)-X(t)}]$, maka

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j \left[P_{i,j}(t).E[Z^{X(t+\Delta t)-X(t)}] - P_{i,j}(t)\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j P_{i,j}(t)\left[E[Z^{X(t+\Delta t)-X(t)}] - 1\right]$$

Selanjutnya, karena

$E[Z^{X(t+\Delta t)-X(t)}] - 1 =$ [***P*{*X*(*t*+Δ*t*) - *X*(*t*) = 0} – 1**] + z_1 **. *P*{*X*(*t*+Δ*t*) - *X*(*t*)**

= ∑*X_i*} + z_2 **. *P*{*X*(*t*+Δ*t*) - *X*(*t*)**

= ∑*X_i*} + z_1^{-1}**.*P*{*X*(*t*+Δ*t*) - *X*(*t*)**

= -∑*X_i*} + z_2^{-1}**.*P*{*X*(*t*+Δ*t*) - *X*(*t*)**

= -∑*X_i*} + $z_1^{\pm m\sum X_i}$ **.*P*{*X*(*t*+Δ*t*) - *X*(*t*)**

$$= \pm m\sum X_i\} + z_2^{\pm m \sum X_i} .P\{X(t+\Delta t) - X(t)$$

$$= \pm m\sum X_i\}$$

dan sifat saling bebas inkremental dari proses stokastik, yaitu

$$E[Z^{X(t+\Delta t)-X(t)}] = E[Z^{X(t+\Delta t)-X(t)} \big| X(t) = i, j],$$

maka

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j P_{i,j}(t)\ \{[\mathbf{1}\text{-}\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right](\mathbf{i}\lambda_1+\mathbf{i}\lambda_2+\mathbf{i}\mu_1+\mathbf{j}\mu_2)\ \Delta t + o(\Delta t)] - \mathbf{1} +$$

$$z_1[\mathbf{i}\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)] + z_2[\mathbf{i}\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\lambda_2\Delta t + o(\Delta t)] +$$

$$z_1^{-1}[\ \mathbf{i}\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_1\Delta t + o(\Delta t)] + z_2^{-1}[\ \mathbf{j}\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_2\Delta t + o(\Delta t)] +$$

$$z_1^{\pm m\sum X_i}\ o(\Delta t) + z_2^{\pm m\sum X_i}\ o(\Delta t)\}$$

Untuk $\Delta t \to 0$, akan diperoleh

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j=0}^{\infty} i z_1^i z_2^j P_{i,j}(t)\ \left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right][-\lambda_1-\lambda_2-\mu_1+z_1\lambda_1+z_2\lambda_2+z_1^{-1}\mu_1] +$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} j z_1^i z_2^j P_{i,j}(t)\ \left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right][-\mu_2+z_2^{-1}\mu_2]$$

Selanjutnya, jika Persamaan **(4.7)** diturunkan terhadap z_1 dan z_2, maka akan diperoleh

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} i z_1^i z_2^j P_{i,j}(t) = z_1\frac{\partial G}{\partial z_1} \text{ dan } \sum_{i,j=0}^{\infty} j z_1^i z_2^j P_{i,j}(t) = z_2\frac{\partial G}{\partial z_2}$$

sehingga

$$\frac{\partial G}{\partial t} = z_1\frac{\partial G}{\partial z_1}\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right][-\lambda_1-\lambda_2-\mu_1+z_1\lambda_1+z_2\lambda_2+z_1^{-1}\mu_1] +$$

$$z_2\frac{\partial G}{\partial z_2}\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\ [-\mu_2+z_2^{-1}\mu_2]$$

Jadi,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right][-\mu_1 z_1 - (\lambda_1+\lambda_2)z_1 + \mu_1 + \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_1 z_2]\ \frac{\partial G}{\partial z_1} +$$

$$\left[1/\sum X_i\right]E\left[X_i\right]\mu_2(1-z_2)\ \frac{\partial G}{\partial z_2} \quad \text{(terbukti).}$$

Selanjutnya untuk memperoleh rata-rata dan variansi dari Persamaan **(4.8)** tentang banyaknya individu wanita dan laki-laki pada waktu ***t*,** terlebih dahulu ditransformasikan

$$z_1 = e^{-\theta_1} \;;\; z_2 = e^{-\theta_2} \;;\; \boldsymbol{K(\theta_1,\, \theta_2; t) = log(}\, e^{-\theta_1} \boldsymbol{,}\, e^{-\theta_2} \boldsymbol{;t)} \qquad \textbf{(4.9)}$$

sedemikian sehingga ***K*(*θ*₁, *θ*₂;*t*)** merupakan fungsi pembangkit momen gabungan.
Jika z_i (untuk i = 1, 2) Persamaan **(4.9)** diturunkan terhadap θ didapat

$$\frac{\partial z_i}{\partial \theta_i} = -e^{-\theta_i} \text{ atau } \frac{\partial}{\partial z_i} = -e^{\theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \qquad \textbf{(4.10)}$$

dan hasilnya disubstitusikan ke Persamaan **(4.8)**, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \left[1/\sum X_i\right] E\left[X_i\right] [\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 e^{\theta_1} - \lambda_1 e^{-\theta_1} - \lambda_2 e^{-\theta_2}]\, \frac{\partial K}{\partial \theta_1} -$$

$$\left[1/\sum X_i\right] E\left[X_i\right] \mu_2 (e^{\theta_2} - 1)\, \frac{\partial K}{\partial \theta_2} \qquad \textbf{(4.11)}$$

Selanjutnya, perluas pangkat dari $\boldsymbol{\theta_1}$ dan $\boldsymbol{\theta_2}$ kemudian samakan koefisien yang berhubungan dengan pangkatnya. Misalkan $\boldsymbol{K_{i,j}(t)}$ menyatakan kumulan gabungan dari *order* **(*i,j*)**. Sebagai contoh $\boldsymbol{K_{1,0}(t)}$ adalah rata-rata banyaknya individu wanita, $\boldsymbol{K_{1,1}(t)}$ adalah kovariansi dari banyaknya individu wanita dan laki-laki, dan seterusnya, dengan cara menentukan solusi bentuk-bentuk berikut :

$$K'_{1,0}(t) = \left[1/\sum X_i\right] E\left[X_i\right] (\lambda_1 - \mu_1)\, K_{1,0}(t),$$

$$K'_{0,1}(t) = \left[1/\sum X_i\right] E\left[X_i\right] [\lambda_2 K_{1,0}(t) - \mu_2 K_{0,1}(t)],$$

$$K'_{2,0}(t) = \left[1/\sum X_i\right] E\left[X_i\right] [2(\lambda_1 - \mu_1)\, K_{2,0}(t) + (\lambda_1 - \mu_1)\, K_{1,0}(t)],$$

$$K'_{1,1}(t) = \left[1/\sum X_i\right] E\left[X_i\right] [\lambda_2 K_{2,0}(t) + (\lambda_1 - \mu_1 - \mu_2)\, K_{1,1}(t)],$$

$$K'_{0,2}(t) = \left[1/\sum X_i\right] E\left[X_i\right] [2\lambda_2 K_{1,1}(t) - 2\mu_2 K_{0,2}(t) + \lambda_2 K_{1,0}(t) - \mu_2 K_{0,1}(t)] \qquad \textbf{(4.12)}$$

Persamaan **(4.12)** dapat diselesaikan secara rekursip, persamaan-persamaan tersebut menyatakan distribusi *marginal* dari banyaknya individu wanita, yang menyatakan sebuah proses stokastik kelahiran-kematian.

Jika $\boldsymbol{n_1}$ menyatakan banyaknya individu wanita pada saat awal dan $\boldsymbol{n_2}$ menyatakan banyaknya individu laki-laki pada saat awal, maka penyelesaian untuk rata-rata adalah

$K_{1,0}(t) = n_1 e^{[1/\Sigma X_i]E[X_i](\lambda_1-\lambda_2)t}$ dan

$$K_{0,1}(t) = \frac{\lambda_2 n_1}{\lambda_1 - \mu_1 + \mu_2} e^{[1/\Sigma X_i]E[X_i](\lambda_1-\lambda_2)t} + \left(n_2 - \frac{\lambda_2 n_1}{\lambda_1 - \mu_1 + \mu_2}\right) e^{-[1/\Sigma X_i]E[X_i]\mu_2 t} \quad \textbf{(4.13)}$$

Jadi, jika $\boldsymbol{\lambda_1 > \mu_1}$ maka limit rasio banyaknya individu wanita dan laki-laki yang diharapkan adalah $\dfrac{(\lambda_1 - \mu_1 + \mu_2)}{\lambda_2}$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian ini diperoleh model persamaan diferensial parsial proses stokastik kelahiran-kematian dengan dua jenis kelamin secara kelompok pada proses Yule-Furry ditunjukkan pada Persamaan **(4.6)**, dengan teorema fungsi pembangkit peluang transisi Persamaan **(4.8)** dan fungsi pembangkit momen gabungannya pada Persamaan **(4.11)** yang berguna dalam menentukan lahir atau matinya individu wanita maupun laki-laki.

Hasil penelitian ini dapat dikaji ulang dengan pendekatan lain atau tanpa proses Yule-Furry dan dikembangkan lebih lanjut dengan memperhatikan faktor migrasi.

DAFTAR PUSTAKA

1. Bhattacharya R. N and Waymire E. C, *Stochastic Processes with Application*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
2. Cinlar, Erhan, *Introduction to Stochastic Processes.* Prentice-Hall Inc, New Jersey, 1975.
3. Cox D. R and Miller H.D, *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, London, 1987.
4. Goodman L. A, *Population Growth of the Sexes*, Biometrics, 1953, 9 : 212-225.

5. Kendall D. G, *Stochastic Processes and Population Growth*, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 1949, 2 : 230-264.
6. Papoluis, Athanasios, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes,* Second Edition, Mc.Graw-Hill Book Campany, New York, 1984.
7. Praptono, *Pengantar Proses Stokastik I,* Penerbit Karunika, Jakarta, 1986.
8. Samsuryadi, *Model Persamaan Diferensial Proses Kelahiran-Kematian dengan Dua Jenis Kelamin secara Kelompok,* Laporan Penelitian Dana DIK-S Unsri Tahun 1999, Tidak dipublikasikan, 1999.
9. Srinivasan S. K and Mehata K. M, *Stochastic Processes,* Tata Mc. Graw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 1988.
10. Taylor H. M, A*n Introduction to Stochastic Modelling*, Academic Press Inc, Florida, 1984.