JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 3, 113 - 121, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

EKUIVALENSI INTEGRAL BOCHNER DENGAN INTEGRAL MCSHANE KUAT UNTUK FUNGSI DENGAN NILAI DI DALAM RUANG BANACH

Y.D. Sumanto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Integral McShane fungsi-fungsi bernilai real ekuivalen dengan Integral Lebesque, namun untuk fungsi bernilai vektor tidak selalu demikian. Dapat ditunjukkan bahwa Integral Bochner (Integral Lebesque untuk fungsi bernilai vektor) ekuivalen dengan Integral McShane kuat.

Kata kunci : Integral McShane, Integral McShane kuat, Integral Bochner.

1. PENDAHULUAN

Integral McShane fungsi-fungi dengan nilai di dalam suatu Ruang Banach didefinisikan sejalan dengan Integral McShane fungsi-fungsi bernilai real, yaitu dengan menggantikan tanda nilai mutlak $|\ .\ |$ dengan tanda norm $\|\ .\ \|$. Gordon, 1994, menunjukkan bahwa Integral McShane ekuivalen dengan Integral Lebesque.

Dalam tulisan ini akan didefinisikan Integral McShane Kuat dan ditunjukkan bahwa Integral Bochner ekuivalen dengan Integral McShane Kuat.

Dalam tulisan ini $[a, b]$ merupakan interval tertutup di dalam garis real, X ruang Banach dengan norm $\|\ .\ \|$. Fungsi-fungsi di dalam tulisan ini dengan domain bilangan real dan dengan nilai di dalam X. Fungsi $f : [a, b] \to X$ dikatakan kontinu absolut kuat pada $[a, b]$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $\{[u_k, v_k] : k = 1, 2, \ldots, n\}$

barisan interval tak saling tumpang tindih di dalam $[a,b]$ dengan $\sum_{k=1}^{n}(v_k, u_k) < \delta$ berlaku $\sum_{k=1}^{n}\|f(v_k) - f(u_k)\| < \varepsilon$.

Fungsi $f : [a,b] \to X$ dikatakan terintegral Bochner pada $[a,b]$ jika dan hanya jika ada fungsi-fungsi kontinu absolut kuat F pada $[a,b]$ dengan $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana pada $[a,b]$. Dalam hal ini derivatif F adalah derivatif Frechet.

2. PEMBAHASAN

Berikut ini didefinisikan Integral McShane untuk fungsi bernilai vektor.

Definisi 1

Fungsi $f : [a,b] \to X$ dikatakan terintegral McShane pada $[a,b]$ jika terdapat vektor $A \in X$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ tedapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $\{x_k, [u_k, v_k] : k = 1, 2, \ldots, n\}$ dengan $a = u_1 < v_1 = u_2 < v_2 \ldots\ u_n < v_n = b$ dan $[u_k, v_k] \subset (x_k - \delta(x_k), x_k + \delta(x_k))$ berlaku

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(v_k - u_k) - A \right\| < \varepsilon .$$

Himpunan pasangan titik interval $\{x_k, [u_k, v_k]\}$ seperti dalam Definisi 1 disebut partisi *δ-fine* pada $[a,b]$, dan vektor $A \in X$ dalam definisi tersebut adalah tunggal dan disebut nilai integral f pada $[a,b]$ dan ditulis

$$A = (M)\int_a^b f .$$

Koleksi semua fungsi berniali vektor terintegral McShane pada $[a,b]$ ditulis $M([a,b],\ X)$.

Sejalan dengan Integral McShane fungsi bernilai real dapat ditunjukkan bahwa :

1. Jika f, g $\in$ $M([a,b],\ X)$, maka f + g $\in$ $M([a,b],\ X)$ dan $(M)\int_a^b (f+g) = (M)\int_a^b f + (M)\int_a^b g$
2. Jika f, g $\in$ $M([a,b],\ X)^a$ dan c skalar, maka $c\,f \in M([a,b],\ X)$ dan $(M)\int_a^b cf = c(M)\int_a^b f$.
3. Jika $f \in M([a,b],\ X)$, maka $f \in M([c,d],\ X)$ untuk setiap $[c,d] \subset [a,b]$.
4. Jika f $\in$ $M([a,b],\ X)$ dan c $\in$ $[a,b]$, maka $(M)\int_a^b f = (M)\int_a^c f + (M)\int_c^b f$.

Dari 3 dan 4 di atas diperoleh bahwa untuk setiap interval $[u,v] \subset [a,b]$ terdapat vektor F(u,v) = $(M)\int_u^v f$ di dalam X. Dari sini diperoleh integral tak tentu fungsi f pada $[a,b]$, yaitu untuk setiap t $\in$ $[a,b]$

$$F(t) = (M)\int_a^t f.$$

Fungsi f : $[a,b] \to X$ tersebut disebut fungsi primitif f pada $[a,b]$.
Berikut ini didefinisikan Integral McShane Kuat.

Definisi 2

Fungsi f : $[a,b] \to X$ dikatakan terintegral McShane kuat pada $[a,b]$, jika $f \in M([a,b],\ X)$ dan untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{n} \| f(x_k)(v_k - u_k) - F(u_k,v_k)\| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi *δ-fine* $\{(x_k, [u_k, v_k] : k = 1, 2, \dots, n\}$ pada $[a, b]$. Dalam hal ini $F(u_k, v_k) = F(v_k) - F(u_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Koleksi semua fungsi terintegral McShane kuat pada $[a, b]$ ditulis dengan $SM([a, b], X)$. Jelas bahwa jika $f \in SM([a, b], X)$, maka $f \in M([a, b], X)$. Berikut ini akan ditunjukkan bahwa jika $f \in SM([a, b], X)$, maka f terintegral Bochner.

Theorema 3

Jika $f \in SM([a, b], X)$ dengan primitif F, maka F kontinu absolut kuat pada $[a, b]$.

Bukti

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, maka terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| f(x_k)(v_k - u_k) - F(u_k, v_k) \right\| < \varepsilon/2$$

untuk setiap partisi *δ-fine* $\{(x_k, [u_k, v_k] : k = 1, 2, \dots, n\}$ pada $[a, b]$. Karena $[a, b]$ kompak, maka dengan Theorema Heine-Borel terdapat koleksi berhingga interval terbuka $(x_k - \delta(x_k),\ x_k + \delta(x_k))$ $k = 1, 2, \dots, n$,

dengan $x_1 < x_2 < \dots < n_n$ sehingga $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k - \delta(x_k),\ x_k + \delta(x_k))$

dan $(x_{k-1} - \delta(x_{k-1}),\ x_{k-1} + \delta(x_{k-1})) \bigcap (x_{k+1} - \delta(x_{k+1}),\ x_{k+1} + \delta(x_{k+1}))$ kosong.

Diambil $\eta_1 < \frac{1}{2} \min(\delta(x_k) : 1 \le k \le n)$, $\eta_2 < \dfrac{\varepsilon}{2(\text{maks}\{\|f(x_k)\| : 1 \le k \le n\} + 1)}$

dan $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Diambil koleksi interval tak saling tumpang tindih $\{[u_k, v_k] : 1 \le k \le n\}$ dengan $\sum_{k=1}^{n} (v_k - u_k) < \eta$.

Ada dua kemungkinan hubungan antara $[u_k, v_k]$ dengan $(x_k - \delta(x_k),\ x_k + \delta(x_k))$

1. ada k sehingga $[u_k, v_k] \subset (x_k - \delta(x_k),\ x_k + \delta(x_k))$
2. ada k dan

   $c_k \in (x_k - \delta(x_k),\ x_k + \delta(x_k)) \bigcap (x_{k+1} - \delta(x_{k+1}),\ x_{k+1} + \delta(x_{k+1}))$

   yang memenuhi $[u_k, c_k] \subset (x_k - \delta(x_k),\ x_k + \delta(x_k))$

   $[c_k, v_k] \subset (x_{k+1} - \delta(x_{k+1}),\ x_{k+1} + \delta(x_{k+1}))$

Jika $\{[a_j^{(k)},\ b_j^{(k)}] : 1 \le j \le r(k)\}$ menyatakan interval $\{[u_k, c_k],\ [c_k, v_k]\}$ yang termuat di dalam $(x_k - \delta(x_k),\ x_k + \delta(x_k))$, maka

Selanjutnya diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} \| F(v_k) - F(u_k) \|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{r(k)} \| F(b_j^{(k)}) - F(a_j^{(k)}) \|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{r(k)} \| F(b_j^{(k)}) - F(a_j^{(k)}) - f(x_k)(b_j^{(k)} - a_j^{(k)}) \|$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{r(k)} \| f(x_k) \| (b_j^{(k)} - a_j^{(k)})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \text{maks}(\| f(x_k) \| : 1 \le k \le n) \sum_{k=1}^{n} (v_k - u_k)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi F kontinu absolut kuat.

Theorema 4

Jika $f \in SM([a, b],\ X)$ dengan primitif F, maka $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana pada $[a, b]$.

Bukti

Diambil A himpunan $t \in [a, b]$ sehingga F (t) tidak mempunyai darivatif atau $F'(t) \neq F(t)$. Akan ditunjukkan bahwa $\mu(A)$ dengan $\mu(A)$ ukuran luar A. Karena $f \in SM([a, b],\ X)$, maka untuk setiap $\varepsilon < 0$

terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $\{(x_k, [u_k, v_k]\}_{k=1}^{n}$ partisi δ-*fine* pada $[a,b]$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| f(x_k)(v_k - u_k) - F(u_k - v_k) \right\| < \varepsilon$$

Tanpa mengurangi sifat umum diambil $\delta_k(t) \leq \delta(t)$ dan $\lim_{k\to\infty} \delta(t) = 0$ untuk $t \in [a,b]$. Diambil $t \in A$, maka ada $\eta(t) > 0$ sehingga untuk setiap $\delta_k(t)$ terdapat $u_k \in (t, t+\delta_k(t))$ sehingga

$$\left\| F(u_k) - F(t) - f(t)(u_k - t) \right\| \geq \eta(t)(u_k - t)$$

atau terdapat $v_k \in (t - \delta_k(t), t)$ sehingga

$$\left\| F(t) - F(v_k) - f(t)(t - v_k) \right\| \geq \eta(t)(t - v_k)$$

Namakan

$$A_n = \left\{ t \in A : \eta(t) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

$n = 1, 2, \ldots,$ maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Diperoleh bahwa (t, u_k) dan (v_k, t) $k = 1, 2, \ldots$ merupakan liput Vitali dari A_n, maka untuk $\varepsilon > 0$ di atas terdapat $\{[v_k, u_k]\}_{k=1}^{r}$ sehingga

$$\mu(A_n) \leq \sum_{k=1}^{r} (u_k, v_k) + \varepsilon,$$

dengan $u_k = a_k$ atau $v_k = a_k$ dan $a_k = A_n$. Karena $|u_k - v_k| < \delta(a_k)$ maka $\{(a_k, [v_k, a_k]) : 1 \leq k \leq r\}$ merupakan partisi δ-*fine*.

Jadi

$$\mu(A_n) \leq \sum_{k=1}^{r} (u_k - v_k) + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{k=1}^{r} \frac{\left\| F(u_k) - F(u_k) - f(a_n)(u_k - v_k) \right\|}{\eta(a_n)} + \varepsilon$$

$$< n\varepsilon + \varepsilon$$

Jadi $\mu(A_n) = 0$, yang berarti $\mu(A) = 0$.

Dari kedua theorema di depan diperoleh bahwa jika $f \in SM([a,b],\ X)$, maka f terintegral Bochner pada $[a,b]$.

Fungsi $f : [a,b] \to X$ terintegral Bochner pada $[a,b]$ jika terdapat fungsi sederhana $w_n(x)$ pada $[a,b]$ sehingga $\lim_{n\to\infty} w_n(x) = f(x)$ h.d. pada $[a,b]$ dan $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|f(x) - w_n(x)\| = 0$. Integral Bochner f pada $[a,b]$ adalah

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b w_n$$

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa jika f terintegral Bochner maka f terintegral McShane kuat.

Theorema 5

Jika f terintegral Bochner pada $[a,b]$, maka $f \in SM([a,b],\ X)$.

Bukti

Diketahui f terintegral Bochner pada $[a,b]$, maka terdapat barisan fungsi sederhana $w_n(x)$ pada $[a,b]$ sehingga $\lim_{n\to\infty} w_n(x) = f(x)$ h.d. pada $[a,b]$ dan $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|f(x) - w_n(x)\| = 0$. Mudah ditunjukkan bahwa untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N_1 sehingga jika $n, m \geq N_1$ berlaku

$$\int_a^b \|w_n(x) - w_m(x)\| < \varepsilon .$$

Untuk $\varepsilon > 0$ tersebut terdapat barisan berhingga interval tak saling tumpang tindih $\{[a_k, b_k] : 1 \leq k \leq r\}$ dengan $a = a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_r \leq b_r = b$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{r} \|W_n(a_k, b_k) - W_m(a_k, b_k)\| < \varepsilon$$

dengan $W_n(u,v) = \int_u^v w_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$.

Karena $\lim_{n\to\infty} w_n(x) = f(x)$ h.d. pada $[a,b]$, maka tanpa mengurangi arti untuk setiap $x \in [a,b]$ dan untuk bilangan $\varepsilon > 0$ di depan terdapat bilangan asli N, sehingga jika $n \geq N_2$, maka berlaku

$$\|w_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Dapat ditunjukkan bahwa setiap fungsi sederhana terintegral McShane kuat. Oleh karena itu, untuk $\varepsilon > 0$ di atas terdapat fungsi positif δ_n pada $[a,b]$, sehingga jika $\{(x_k,[a_k,b_k]) : 1 \leq k \leq r\}$ partisi δ_n-*fine* pada $[a,b]$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{r}\|w_n(x_k)(b_k - a_k) - W_n(a_k,b_k)\| < \varepsilon \quad ■$$

Untuk setiap $n = 1, 2, \ldots$ $\delta_n(x) \leq \delta_{n-1}(x)$ $(x) \in [a,b]$. Dari sini diperoleh bahwa untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{r}\|W_n(a_k,b_k) - F(a_k,b_k)\| < \varepsilon \quad ■$$

Selanjutnya diambil $n \geq N$ dan $\delta(x) = \delta_n(x)$ pada $[a,b]$, maka untuk partisi δ-*fine* $\{(x_k,[a_k,b_k]) : 1 \leq k \leq r\}$ pada $[a,b]$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{r}\|f(x_k)(b_k - a_k) - F(a_k,b_k)\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{r}\|f(x_k)(b_k - a_k) - w_n(x_k)(b_k - a_k)\| + \sum_{k=1}^{r}\|w_n(x_k)(b_k - a_k) - W_n(a_k,b_k)\| + \\
&\quad \sum_{k=1}^{r}\|W_n(a_k,b_k) - F(a_k,b_k)\| \\
&< \sum_{k=1}^{r}\|f(x_k) - w_n(x_k)\|\,(b_k - a_k) + \varepsilon + \varepsilon \\
&< \varepsilon(b-a) + 2\varepsilon = \varepsilon'
\end{aligned}$$

Jadi $f \in SM([a,b], X)$.

Dari Theorema 3, 4, dan 5 diperoleh bahwa $f \in SM([a,b], X)$, jika dan hanya jika f terintegral Bochner pada $[a,b]$.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 3, 113 - 121, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

DAFTAR PUSTAKA

1. Congxin, W U dan Xiaobo Yao, *A Riemann-Type Definition of the Bochner Integra, Journal of Mathematical Study : Xiamen*, China, 1994.

2. Gordon, Russell A, *The Integrals of Lebesque, Denjoy, Perron, and Henstock,* American Mathematical Society, USA, 1994.