**JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER**
Vol. 4. No. 3, 122 - 129, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

# AUTOMORFISMA GRAPH

Suryoto

Jurusan Matematika FMIPA – UNDIP Semarang

**Abstrak**

Automorfisma dari graph sederhana $\Gamma$ adalah suatu permutasi $\Pi$ dari himpunan titik – titik dari $\Gamma$ yang bersifat mengawetkan ketetanggaan. Misalkan A matriks ketetanggaan dari $\Gamma$, maka syarat perlu dan cukup $\Pi$ suatu automorfisma adalah berlakunya hubungan PA = AP, dengan P adalah matriks (permutasi) penyajian dari $\Pi$. Pada tulisan ini hanya akan dikaji graph transitif titik dan graph transitif sisi dengan memanfaatkan konsep aksi dan orbit dari suatu grup. Diperlihatkan juga bahwa kedua tipe graph di atas saling bebas, yaitu bahwa graph transitif titik belum tentu transitif sisi demikian juga berlaku sebaliknya, graph transitif sisi tidak harus berakibat graphnya transitif titik.

Kata kunci : orbit, aksi transitif, matriks ketetanggaan.

## 1. PENDAHULUAN

Salah satu konsep yang cukup penting di dalam teori graph adalah automorfisma graph. Karena dengan konsep automorfisma graph ini kita dapat membuat graph – graph baru seperti : graph transitif titik, graph transitif sisi, graph simetrik dan lain sebagainya (Biggs, 1993).

Seperti diketahui setiap graph senantiasa mempunyai automorfisma trivial, yaitu automorfisma identitas dan pada umumnya tidak semua graph mempunyai automorfisma tak trivial. Suatu graph mempunyai automorfisma tak trivial jika dan hanya jika berlaku sifat komutatif perkalian matriks ketetanggaan dari graph yang bersangkutan dengan matriks permutasi penyajian automorfismanya.

Penamaan suatu graph merupakan graph transitif titik atau graph transitif sisi tergantung pada aksi transitif dari grup automorfismanya terhadap himpunan titik-titik atau himpunan sisi-sisi dari graphnya. Dan dapat dilihat bahwa kedua tipe graph di atas saling bebas, yaitu bahwa graph transitif titik belum tentu transitif sisi, contoh yang paling sederhana adalah graph tangga $L_3$ , demikian juga sebaliknya, graph transitif sisi tidak harus berakibat graphnya transitif titik, contohnya adalah graph bipartit.

Dengan konsep automorfisma ini juga, kita bisa mengkaji spektrum dari graph yang bersangkutan serta hubungan spektrum ini dengan grup automorfismanya (Biggs, 1993).

Sebelum membahas lebih jauh mengenai automorfisma graph ini akan diberikan terlebih dahulu konsep – konsep di dalam teori grup yang menjadi dasar pengkajian daripada automorfisma graph ini.

## 2. AKSI DAN ORBIT

Misalkan G suatu grup dan A himpunan tak hampa. Didefinisikan suatu pemetaan

$\mathbf{.} : G \times A \to A$ ,

dengan pengaitan $(g,\alpha) \to g\mathbf{.}\,\alpha$ , $\forall\,(g, \alpha) \in G \times A$.

Jika dipenuhi :

1) $1\mathbf{.}\,\alpha = \alpha, \forall\, \alpha \in A$
2) $h\mathbf{.}\,(g\mathbf{.}\,\alpha) = (hg)\,\mathbf{.}\,\alpha, \forall\, \alpha \in A$ dan $g,h \in G$,

maka **.** dinamakan suatu aksi dari G pada A.

Selanjutnya aksi **.** dikatakan transitif jika untuk setiap $\alpha$, $\beta \in A$ terdapat $g \in G$ sedemikian hingga berlaku $g\,\mathbf{.}\,\alpha = \beta$.

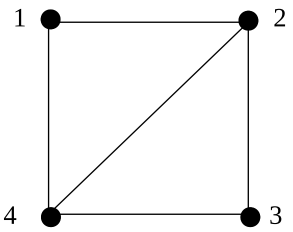
Misalkan $\alpha$ sebarang unsur di A, didefinisikan $O_\alpha = \{\, g\,\mathbf{.}\,\alpha \mid g \in G \,\}$. Jelas bahwa $O_\alpha$ tidak hampa, karena $\alpha = 1\,\mathbf{.}\,\alpha \in O_\alpha$ dan $O_\alpha$ dinamakan orbit dari aksi **.** yang memuat $\alpha$.

## 3. AUTOMORFISMA GRAPH

Misalkan $\Gamma$ ( V , E ) suatu graph sederhana. Automorfisma dari graph $\Gamma$ adalah suatu permutasi $\Pi$ dari himpunan $V(\Gamma)$ yaitu himpunan semua titik – titik dari $\Gamma$, yang bersifat : $(x,y) \in E\,(\Gamma)$ jika dan hanya jika $(\Pi\,(x), \Pi\,(y)) \in E\,(\Gamma)$, yaitu $\Pi$ mengawetkan ketetanggaan pada $\Gamma$.

**Contoh 1 :**

Misal diberikan graph Γ seperti di bawah ini :




Gambar 1.

Automorfisma yang mungkin dari graph di samping adalah :

1. (1) (2) (3) (4)
2. (1) (3) (2 4)
3. (1 3) (2) (4)
4. (1 3) (2 4)

**Catatan :**

Untuk mendapatkan suatu automorfisma Π pengaitan dua buah titik sebarang x , y ∈ V (Γ) melalui Π dapat dilakukan jika dan hanya jika x dan y mempunyai derajat yang sama.

Misalkan Aut (Γ) = { Π | Π : V(Γ) → V(Γ), suatu automorfisma }, terhadap operasi komposisi ( fungsi ) Aut (Γ) membentuk suatu grup dan dinamakan grup automorfisma dari Γ.

Dengan demikian, karena Aut (Γ) suatu grup dan V(Γ) senantiasa tak hampa maka kita dapat mendefinisikan suatu aksi dari Aut (Γ) pada V (Γ) dan juga suatu orbit (Isaacs, 1993).

**Definisi 1**

Misalkan x , y ∈ V (Γ), maka

x dan y dikatakan dalam orbit yang sama jika terdapat automorfisma Π sedemikian hingga Π(x) = y.

**Sifat 1**

Jika x dan y berada dalam orbit yang sama maka x dan y mempunyai derajat yang sama.

**Bukti :** ■

Akibat langsung dari definisi 1.

**Sifat 2**

Misalkan x , y $\in V(\Gamma)$ dan X , Y berturut – turut menyatakan orbit yang memuat x dan orbit yang memuat y, maka $X \cap Y = \emptyset$ atau X = Y.

**Bukti :**

Misalkan X dan Y berturut–turut menyatakan orbit yang memuat x dan orbit yang memuat y, maka

$$X \cap Y = \emptyset \text{ atau } X \cap Y \neq \emptyset.$$

Dalam hal $X \cap Y \neq \emptyset$, akan ditunjukkan bahwa X = Y.

Misalkan $z \in X \cap Y$, maka terdapat $\Pi_1$ , $\Pi_2 \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ sedemikian hingga

$$z = \Pi_1(x) = \Pi_2(y).$$

Karena Aut ($\Gamma$) merupakan grup ( terhadap komposisi fungsi ), maka

$$\Pi_1^{-1}, \Pi_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \text{ dan } \Pi_1^{-1}(\Pi_1(x)) = \Pi_1^{-1}(\Pi_2(y)) \text{ atau}$$

$$(\Pi_1^{-1}\Pi_1)(x) = (\Pi_1^{-1}\Pi_2)(y) \text{ yaitu } x = (\Pi_1^{-1}\Pi_2)(y).$$

Jadi $x \in Y$, dan ini memberikan $X \subseteq Y$.

Selanjutnya dengan mengenakan $\Pi_2^{-1}$ pada kedua ruas persamaan $\Pi_1(x) = \Pi_2(y)$ diperoleh $Y \subseteq X$ dan terbukti bahwa X = Y.■

**Definisi 2**

Suatu graph (sederhana) $\Gamma$ dikatakan transitif titik jika aksi dari Aut ($\Gamma$) pada $V(\Gamma)$ adalah aksi transitif, yaitu jika hanya terdapat satu orbit di $V(\Gamma)$. (Dalam hal ini orbitnya adalah $V(\Gamma)$ sendiri).

Dari definisi 2 di atas, jika x dan y adalah dua buah titik sebarang di $V(\Gamma)$ maka terdapat automorfisma $\Pi$ dan memenuhi $\Pi(x) = y$.Titik x dan y di atas disebut titik transitif (titik simetri).

**JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER**
Vol. 4. No. 3, 122 - 129, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

**Contoh 2 :**

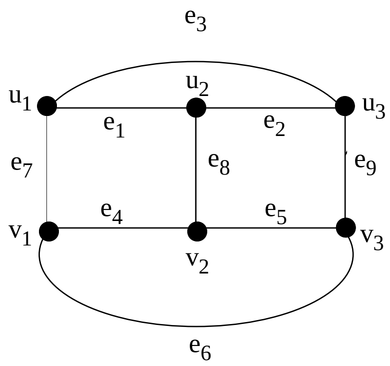
Pada graph di contoh 1 di atas, titik 1 dan 3 adalah contoh titik transitif karena terdapat automorfisma yang memetakan 1 ke 3, dalam hal ini (1 3)(2 4) dan (1 3)(2)(4). Akan tetapi graph $\Gamma$ di atas tidak transitif titik, karena terdapat dua orbit di $V(\Gamma)$, yaitu orbit yang memuat 1dan 3 dan orbit yang memuat 2 dan 4.

Perhatikan bahwa aksi dari Aut $(\Gamma)$ pada $V(\Gamma)$ menginduksi aksi pada E $(\Gamma)$, yaitu dengan aturan $\Pi(x , y) = (\Pi(x) , \Pi(y))$.

Selanjutnya $\Gamma$ dikatakan transitif sisi jika aksi di atas transitif. Dengan perkataan lain, jika diberikan sepasang sisi sebarang dari suatu graph maka terdapat suatu automorfisma yang memetakan sisi yang satu ke sisi yang lain.

**Contoh 3 :**

Contoh graph yang transitif titik tetapi tidak transitif sisi adalah graph tangga ( Ladder Graph ) $L_3$.




Gambar 2. Graph tangga $L_3$.

Di mana graph tangga $L_h$, dengan $h \geq 3$ adalah graph regular dengan derajat 3 dan mempunyai 2h buah titik, yaitu $u_1, \ldots, u_h, v_1, \ldots, v_h$ di mana titik–titik $u_1, \ldots, u_h$ dan $v_1, \ldots, v_h$ membentuk sikel dengan panjang h dan sisi sisanya berbentuk pasang ( $u_i , v_i$ ), dengan $1 \leq i \leq h$.

Sedangkan contoh untuk graph yang transitif sisi tetapi tidak transitif titik diberikan oleh preposisi berikut ini :

**Preposisi 1**

Misalkan $\Gamma$ suatu graph terhubung. Jika $\Gamma$ transitif sisi tetapi tidak transitif titik maka $\Gamma$ bipartit.

**Bukti :**

Misalkan ( x , y ) sebarang sisi dari $\Gamma$ dan X, Y adalah orbit yang berturut – turut memuat x dan memuat y terhadap aksi dari Aut ($\Gamma$) pada V($\Gamma$). Berdasarkan sifat 2, maka $X \cap Y = \emptyset$ atau X = Y. Selanjutnya ambil sebarang titik $z \in V(\Gamma)$. Karena $\Gamma$ terhubung maka z termuat dalam suatu sisi (z, w). Lagi, karena $\Gamma$ transitif sisi maka $z \in X$ atau $z \in Y$. Akibat $X \cup Y = V(\Gamma)$.

Andaikan X = Y. Maka kita mempunyai X = Y = V ($\Gamma$), yaitu $\Gamma$ transitif titik, ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa $\Gamma$ tidak transitif titik. Jadi haruslah $X \cap Y = \emptyset$. Dengan demikian setiap sisi dari $\Gamma$ berlaku ujung yang satu berada di X dan ujung yang lainnya di Y. Jadi $\Gamma$ suatu graph bipartit. ■

Contoh lain dari graph yang transitif sisi tetapi tidak transitif titik dapat dilihat pada ( Bouwer, 1972 ).

Di mana Bouwer memberikan contoh graph regular yang transitif sisi tetapi tidak transitif titik adalah graph “ kubus Rubik “.

Misalkan $\Gamma$ suatu graph dengan himpunan titik – titiknya $V(\Gamma) = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Suatu permutasi$\Pi$ dari V ($\Gamma$) dapat disajikan dengan matriks permutasi $P = ( P_{ij} )$ di mana :

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika } v_i = \Pi(v_j) \\ 0, \text{ lainnya} \end{cases}$$

**Preposisi 2**

Misal diberikan graph $\Gamma$ dengan A matriks ketetanggaan dari $\Gamma$ dan $\Pi$ suatu permutasi dari V ($\Gamma$). Maka $\Pi$ suatu automorfisma jika dan hanya jika PA = AP, di mana P adalah matriks penyajian dari $\Lambda$.

**Bukti :**

Misalkan $\Pi$ permutasi dari V $(\Gamma)$. Ambil $v_i$, $v_j \in$ V $(\Gamma)$ dan misalkan $\Pi(v_i) = v_h$ dan $\Pi(v_j) = v_k$ . Maka diperoleh

$$(PA)_{hj} = \sum P_{hl}\, a_{lj} = a_{ij}$$

$$(AP)_{hj} = \sum a_{hl}\, P_{lj} = a_{hk}$$

Akibatnya kita mempunyai,

PA = AP $\Leftrightarrow$ $v_i$ dan $v_j$ bertetangga jika $v_h$ dan $v_k$ bertetangga.

$\Leftrightarrow$ $( v_i , v_j ) \in E(\Gamma)$ jhj $( v_h , v_k ) \in E(\Gamma)$

$\Leftrightarrow$ $\Pi$ suatu automorfisma. ■

Misalkan $\Gamma$ suatu graph terhubung dan $\partial(u , v)$ menyatakan jarak antara titik u dan v di $\Gamma$, maka untuk setiap automorfisma $\Pi$ kita mempunyai $\partial(u , v) = \partial(\Pi(u) , \Pi(v))$.

Jadi automorfisma $\Pi$ bersifat mengawetkan jarak.

Berkaitan dengan konsep di atas kita mempunyai definisi berikut :

**Definisi 3**

Misalkan $\Gamma$ suatu graph dengan grup automorfisma Aut $(\Gamma)$. Maka graph $\Gamma$ dikatakan simetrik jika untuk setiap titik u , v, x , y di $\Gamma$, dengan u dan v bertetangga dan x dan y bertetangga, terdapat automorfisma $\Pi$ di Aut $(\Gamma)$ sedemikian hingga $\Pi(u) = x$ dan $\Pi(v) = y$. Dan $\Gamma$ dikatakan transitif jarak, jika untuk setiap titik u, v, x, y di $\Gamma$ dengan $\partial(u , v) = \partial(x , y)$, terdapat suatu automorfisma $\Pi$ di Aut $(\Gamma)$ dan memenuhi $\Pi(u) = x$ dan $\Pi(v) = y$.

Dengan demikian kita memperoleh hasil :

$\Gamma$ transitif jarak $\Rightarrow$ $\Gamma$ simetrik $\Rightarrow$ $\Gamma$ transitif titik.

## 4. KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan :

1) Automorfisma graph bisa dibentuk lewat pengaitan titik–titik dalam graph yang mempunyai derajat yang sama.

2) Syarat perlu dan cukup eksistensi automorfisma graph adalah berlakunya sifat komutatif perkalian matriks ketetanggaan dengan matriks penyajian dari permutasinya.
3) Automorfisma graph di samping mengawetkan ketetanggaan juga bersifat mengawetkan jarak.

**DAFTAR PUSTAKA**

1. Biggs, Norman, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, New York, 1993.

2. Bouwer I. Z, *On edge-but not vertex-transitive regular Graph*, JTC (B), 1972, 12 : 32 – 40.

3. Isaacs I, Martin, *Algebra*, Brooks / Cole Publishing Company, California, 1993.