**JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER**
Vol. 4. No. 3, 151 -159, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

# APLIKASI METODE BESARAN PIVOTAL DALAM PENENTUAN SELANG KEYAKINAN TAKSIRAN PARAMETER POPULASI.

Agus Rusgiyono
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

**Abstraks**

Diberikan populasi dengan densitas $f(\bullet\,;\theta)$ dengan parameter $\theta$, dan dari padanya diambil sample acak $x_1,\ldots,x_n$. Selanjutnya taksiran titik $\tau(\theta)$ adalah suatu fungsi dari $\theta$ bernilai riil . Interval taksiran terhadap $\tau(\theta)$ berdasarkan taraf keyakinan $100\gamma\%$, dengan $0<\gamma<1$ , ditentukan berdasarkan bantuan besaran pivotal $Q=\zeta\,(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ yang mempunyai distribusi tidak bergantung pada $\theta$. Diketahui $T_1=t_1(X_1,\ldots,X_n)$ dan $T_2=t_2(X_1,\ldots,X_n)$ adalah dua statistik yang memenuhi $T_1\le T_2$ untuk mana $P_\theta(T_1<\tau(\theta)<T_2)=\gamma$ dengan $\gamma$ tidak bergantung pada $\theta$, maka interval acak $(T_1,T_2)$ adalah interval keyakinan $100\gamma\%$ untuk $\tau(\theta)$.

## 1. PENDAHULUAN

Sebuah masalah mendasar yang terkait dalam pengambilan sampel suatu populasi adalah membuat taksiran terhadap parameter baik taksiran titik maupun taksiran selang. Barangkali pula sering dipertanyakan berapa ukuran sampel agar diperoleh taksiran yang paling akurat, tentunya dengan panjang selang taksiran minimal (S.Nasution,2001). Lebih–lebih dengan tidak diketahuinya nilai parameter populasi . Dari kondisi ini biasanya peneliti akan berusaha menaksir nilai parameter berdasarkan statistik dan berusaha mendapatkan selang kepercayaan terhadap taksiran tersebut dengan menggunakan suatu sampel minimal yang cukup.

Sering dipertanyakan oleh para peneliti pemula berapa ukuran sampel minimal yang cukup untuk dapat membuat selang keyakinan taksiran berdasarkan koefisien keyakinan $\gamma$. Demikian pula seberapa besar pengaruh bertambahnya ukuran sampel terhadap berkurangnya panjang interval keyakinan (Schefler, 1979).

Dalam membuat interval keyakinan taksiran parameter, salah satu cara yang dapat ditempuh adalah dengan bantuan besaran pivotal $Q = \zeta\ (X_1, \ldots, X_n; \theta)$, di mana besaran ini mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada parameter $\theta$ (Mood,1974).

Sebagai contoh , misalkan $x_1, \ldots, x_n$ sample acak dari $f(x\ ;\theta) = \Phi_{0,9}(x)$ maka $x - \theta$ adalah besaran pivotal karena $\bar{x} - \theta \sim N(0, 9/n)$, demikian juga $\frac{(\bar{x} - \theta)}{3/\sqrt{n}}$ adalah besaran pivotal karena berdistribusi N(0,1). Di lain pihak $\bar{x}/\theta$ bukan besaran pivotal karena berdistribusi $N(0, 9/\theta^2 n)$ yang masih bergantung pada $\theta$.

## 2. PEMBAHASAN

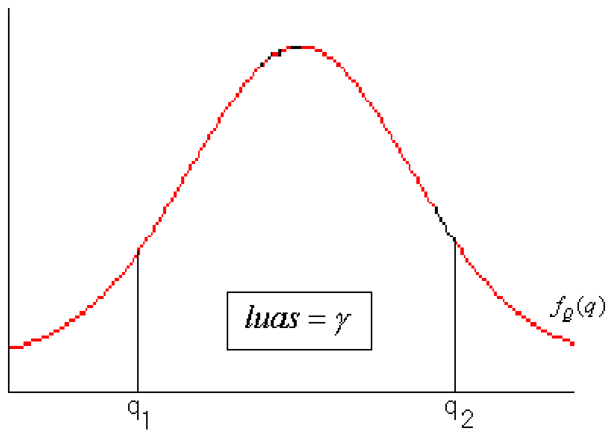
Jika diketahui $x_1, \ldots, x_n$ sample acak dari $N(\mu, \sigma^2)$ dengan $\sigma^2$ tidak diketahui . Selanjutnya $Q = \zeta\ (X_1, \ldots, X_n; \theta)$, kuantitas pivotal dan mempunyai fungsi kepadatan probabilitas, maka untuk suatu $0 < \gamma < 1$ yang ditentukan ,dapat ditemukan $q_1$ dan $q_2$ yang bergantung pada $\gamma$ sedemikian hingga $P(q_1 < Q < q_2) = \gamma$.

Jika dari setiap nilai sampel $x_1, \ldots, x_n$ memungkinkan untuk mendapatkan $q_1 < \zeta\ (X_1, \ldots, X_n; \theta) < q_2$, bila dan hanya bila $t_1(X_1, \ldots, X_n) < \tau(\theta) < t_2(X_1, \ldots, X_n)$ untuk suatu fungsi $t_1$ dan $t_2$ ( yang tidak bergantung pada $\theta$) , maka $(T_1, T_2)$ adalah selang kepercayaan $100\gamma\%$ untuk $\tau(\theta)$. Dimana $T_i = t_i(X_1, \ldots, X_n), i = 1,2,3,\ldots$ (Mood,1974)

Berkenaan dengan ini ada tiga hal yang perlu di perhatikan :

**Pertama**, $q_1$ dan $q_2$ adalah tidak bergantung pada $\theta$ karena distribusi dari $Q$.

**Kedua**, untuk sembarang $0 < \gamma < 1$ yang ditetapkan, terdapat banyak kemungkinan pasangan bilangan $q_1$ dan $q_2$ yang dapat dipilih sehingga $P(q_1 < Q < q_2) = \gamma$.




Gambar 1.

Pasangan yang berbeda dari $q_1$ dan $q_2$ menghasilkan $t_1$ dan $t_2$ yang berbeda pula. Sehingga sebaiknya dipilih pasangan $q_1$ dan $q_2$ yang membuat pasangan $t_1$ dan $t_2$ tertutup satu sama lain secara bersama.

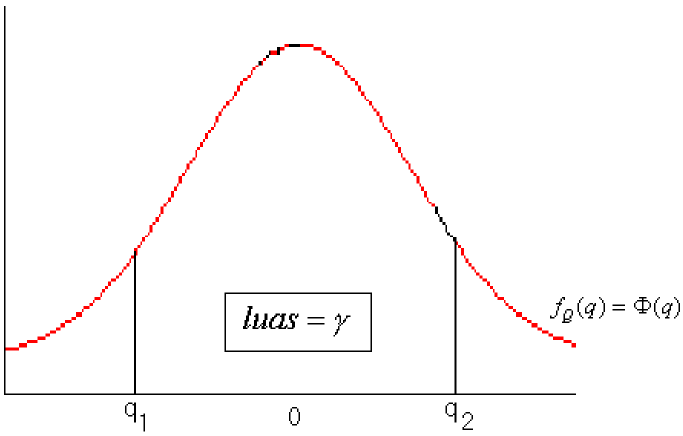
Untuk lebih jelasnya jika $t_2(X_1,\ldots,X_n) - t_1(X_1,\ldots,X_n)$ menyatakan panjang interval kepercayaan yang tidak acak , maka dipilih pasangan $q_1$ dan $q_2$ yang membuat panjang interval menjadi minimal. Atau jika panjang interval kepercayaan bersifat acak maka dipilih pasangan $q_1$ dan $q_2$ yang membuat rataan hitung dari panjang interval menjadi terkecil.

**Ketiga**, secara esensial bentuk metode kuantitas pivotal adalah bahwa ketidaksamaan $q_1 < \zeta\,(X_1,\ldots,X_n;\theta) < q_2$ dapat ditulis kembali atau dapat diinversikan atau di ”pivot” sebagai $t_1(X_1,\ldots,X_n) < \tau(\theta) < t_2(X_1,\ldots,X_n)$ untuk sembarang nilai sample $x_1,\ldots,x_n$ yang diperoleh. Pernyataan terakhir ini mengindikasikan bahwa “kuantitas pivotal” dapat saja tidak bermanfaat secara langsung, karena menurut definisi $Q = \zeta\,(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ dapat saja berupa besaran pivotal yang tidak mungkin dipivot terhadapnya.

Sebagai gambaran :

Misalkan $x_1,\ldots,x_n$ sample acak dari $f(x;\theta)=\Phi_{0,1}(x)$, untuk mengestimasi $\tau(\theta)=\theta$, $Q=\zeta\,(X_1,\ldots,X_n;\theta)=\dfrac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{1/n}}\sim N(0,1)$ sehingga merupakan besaran pivotal $f_Q(q)=\Phi(q)$.

Untuk $\gamma$ yang ditetapkan ada $q_1$ dan $q_2$ sedemikian sehingga $P(q_1<Q<q_2)=\gamma$.




Gambar 2.

selanjutnya :

$$\left\{q_1<\frac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{1/n}}<q_2\right\}\Leftrightarrow\left\{\overline{X}-q_2\sqrt{1/n}<\theta<\overline{X}-q_1\sqrt{1/n}\right\}$$

sehingga :

$\left(\overline{X}-q_2\sqrt{1/n}\,;\,\overline{X}-q_1\sqrt{1/n}\right)$ adalah suatu interval keyakinan $100\gamma\%$ untuk $\theta$.

Panjang interval ini adalah $\left((\overline{X}-q_1\sqrt{1/n})-(\overline{X}-q_2\sqrt{1/n})\right)=(q_2-q_1)\sqrt{1/n}$

Sehingga panjang dapat dibuat menjadi minimal dengan memilih $q_1$ dan $q_2$ sehingga $q_2-q_1$ menjadi minimal dibawah batasan syarat : $\gamma=P(q_1<Q<q_2)=\Phi(q_2)-\Phi(q_1)$

Selanjutnya dinyatakan bahwa $q_2-q_1$ menjadi minimum jika $q_1=-q_2$. (Sumargo, 1984).

**JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER**
Vol. 4. No. 3, 151 -159, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

## 2.1 EXISTENSI BESARAN PIVOTAL

Apakah besaran pivotal senantiasa ada untuk setiap kasus?

Jika $x_1, \ldots, x_n$ sample acak dari $f(\bullet;\theta)$, yang berkorespondensi dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x\,;\theta)$ yang kontinu pada X maka dengan transformasi integral probabilitas, $F(x\,;\theta)$ mempunyai distribusi uniform pada interval (0,1).

Jadi $-\log F(x\,;\theta)$ mempunyai $e^{-\mu} I_{(0,1)}(u)$ karena

$P[-\log F(X_i;\theta) \geq \mu] = P[-\log F(X_i;\theta) < -\mu]$

$= P\left[F(X_i;\theta) \leq e^{-\mu}\right] = e^{-\mu} \quad , \quad u > 0$

Akhirnya $-\sum \log F(X_i;\theta)$ mempunyai sebuah distribusi gamma dengan parameter n dimana :

$$P\left[-\log q_2 < -\sum_{i=1}^{n} \log F(X_i;\theta) < -\log q_1\right]$$

$$= \int_{-\log q_2}^{-\log q_1} \frac{1}{\Gamma(a)} Z^{n-1} e^{-z}\, dz$$

$$= P\left[q_1 < \prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta) < q_2\right] \text{untuk } 0< q_1 < q_2 <1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.1)$$

Sehingga ;

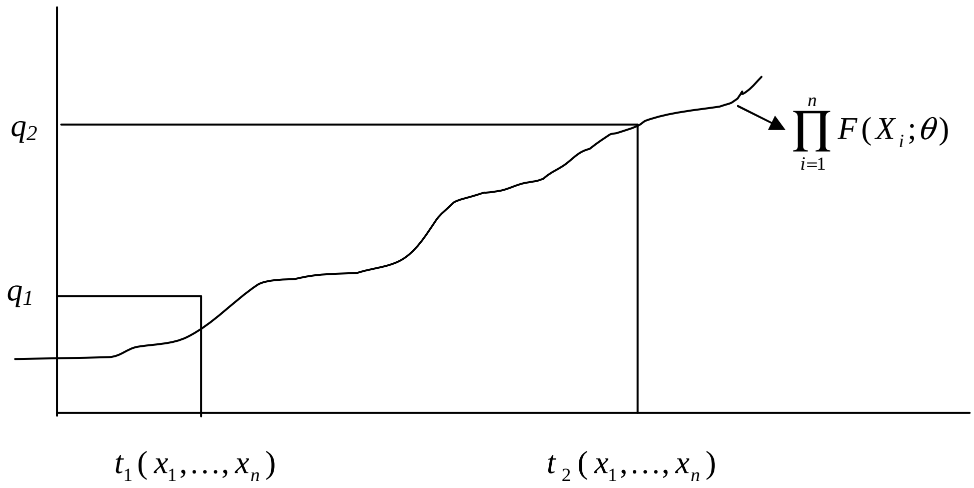
$\prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta)$ atau $-\sum_{i=1}^{n} \log F(X_i;\theta)$ adalah besaran pivotal.

Hasil ini menunjukkan bahwa pada sembarang waktu dimana sample dari suatu populasi mempunyai fungsi distribusi kumulatif kontinu maka besaran pivotal senantiasa ada.

Tetapi ini tidak memberi jaminan apakah besaran pivotal ini berguna bagi penyusunan interval.

## 2.2 JAMINAN DAPAT DIGUNAKANNYA BESARAN PIVOTAL

Selanjutnya jika $F(x\,;\theta)$ monoton dalam $\theta$ untuk setiap X maka $\prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta)$ juga monoton dalam $\theta$ untuk setiap $x_1,\ldots,x_n$ dan dengan sifat kemonotonan ini memungkinkan untuk mendapatkan interval keyakinan bagi $\theta$.




Gambar : 3

Dapat dilihat bahwa $q_1 < \prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta) < q_2 \Leftrightarrow t_1(x_1,\ldots,x_n) < \theta < t_2(x_1,\ldots,x_n)$

dimana $t_1$ dan $t_2$ fungsi yang tidak bergantung pada $\theta$.

## 2.3 INTERVAL KEYAKINAN UNTUK RATA-RATA PADA DISTRIBUSI NORMAL

Jika diketahui $x_1,\ldots,x_n$ sample acak dari $N(\mu\,,\sigma^2)$ dengan $\sigma^2$ tidak diketahui. Dalam kasus ini $\theta = (\mu\,,\sigma)$

Dan $\tau(\theta) = \mu$. Sedangkan kuantitas pivotal yang kita perlukan adalah

$$Q = \zeta\,(X_1,\ldots,X_n;\theta) = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

**JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER**
Vol. 4. No. 3, 151 -159, Desember 2001, ISSN : 1410-8518

Tetapi $\{q_1 < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2\}$ tidak dapat diinversikan untuk mendapatkan $t_1(x_1,\ldots,x_n) < \mu < t_2(x_1,\ldots,x_n)$ untuk suatu statistik $t_1$ dan $t_2$. Masalah ini muncul karena besaran $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ masih bergantung pada $\sigma$.Jadi diperlukan besaran pivotal yang hanya bergantung $\mu$ saja. Seperti diketahui bersama bahwa $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ berdistribusi student dengan derajad kebebasan n-1

Sehingga $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ mempunyai densitas yang independen terhadap $\mu$ dan $\sigma$, maka juga merupakan besaran pivotal.

Sehingga sekarang diperoleh $\left\{q_1 < \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < q_2\right\} \Leftrightarrow \left\{\overline{X} - q_2 \, s/\sqrt{n} < \mu < \overline{X} - q_1 \, s/\sqrt{n}\right\}$

Dimana $q_1$ dan $q_2$ memenuhi persamaan $P\left\{q_1 < \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < q_2\right\} = \gamma$ akibatnya $\left\{\overline{X} - q_2 \, s/\sqrt{n} \,;\, \overline{X} - q_1 \, s/\sqrt{n}\right\}$ adalah interval kepercayaan $100\gamma\%$ untuk $\mu$.

Panjang interval kepercayaan adalah $\frac{(q_2 - q_1)s}{\sqrt{n}}$ dan bersifat acak. Untuk sembarang sampel yang diperoleh panjangnya dapat diminimalkan jika $q_1$ dan $q_2$ dipilih sehingga $q_2 - q_1$ minimal , dalam bentuk lain masalah ini dapat dapat dinyatakan dalam :

Peminimalan fungsi $L = \frac{(q_2 - q_1)s}{\sqrt{n}}$ di bawah syarat

$$\int_{q_1}^{q_2} f_T(t)\,dt = \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.1)$$

dimana $f_T(t)$ adalah densitas distribusi t dengan derajad kebebasan n-1.

Persamaan (2.3.1) memberikan $q_2$ sebagai suatu fungsi dari $q_1$ dan pendeferensialannya terhadap $q_1$ menghasilkan $f_T(q_2)\dfrac{dq_2}{dq_1} - f_T(q_1) = 0$. Untuk meminimalkan L diperlukan syarat $\dfrac{dL}{dq_1} = 0$ sehingga diperoleh $\dfrac{dL}{dq_1} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}(\dfrac{dq_2}{dq_1} - 1) = 0$. Tetapi $\dfrac{s}{\sqrt{n}}(\dfrac{dq_2}{dq_1} - 1) = \dfrac{s}{\sqrt{n}}(\dfrac{f_T(q_1)}{f_T(q_2)} - 1) = 0$

maka $f_T(q_1) = f_T(q_2) \Leftrightarrow q_1 = q_2 \; atau \; q_1 = -q_2$.

Jika $q_1 = q_2$ maka $\int_{q_1}^{q_2} f_T(t)dt \neq \gamma$. Jadi $q_1 = -q_2$ dipandang sebagai suatu solusi dengan $q_1$ dan $q_2$ dapat diperoleh dari tabel distribusi student.

Kalau diperhatikan rumusan interval kepercayaan di atas bertalian dengan akar dari n berarti ada keuntungan yang menurun dalam usaha terus memperbesar ukuran sampel (Schefler, 1979). Untuk menjelaskan ini andaikan ingin ditaksir rataan suatu populasi dengan kepercayaan 95 %. Untuk ini diambil tiga sampel, berturut-turut sebesar n = 100, 1000 dan 10.000. Misalkan setiap sampel menghasilkan rataan sebesar 50 dengan simpangan baku 10. Jika dihitung selang kepercayaan 95 % untuk masing-masing sampel itu diperoleh :

$$48{,}04 < \mu < 51{,}96 \quad (n = 100)$$

$$49{,}37 < \mu < 50{,}63 \quad (n = 1000)$$

$$49{,}80 < \mu < 50{,}20 \quad (n = 10.000)$$

Jika diperhatikan ketiga taksiran memang memberikan taksiran yang lebih seksama .Misal peningkatan sampel dari 100 menjadi 1000 menghasilkan taksiran yang lebih pendek 2,66 selanjutnya peningkatan sampel menjadi dari 1000 menjadi 10.000 memperpendek taksiran 0,86 saja. Di sini perlu dipertanyakan apakah peningkatan keseksamaan ini ada keuntungannya dibanding pengelolaan sampel sebesar itu yang memerlukan tambahan beaya, waktu dan tenaga.

## 3. KESIMPULAN

Pada berbagai penelitian ukuran sampel yang makin besar justru menimbulkan banyak beban baik dari segi biaya, pengelolaan sampel yang membutuhkan banyak tenaga dan ketidak- telitian dalam pengamatan yang menjadi sumber bias yang justru akan menyesatkan kesimpulan. Sebaliknya pada setiap ukuran sampel yang diambil , interval taksiran parameter dengan koefisien kepercayaan yang ditetapkan dapat dibuat minimal. Interval kepercayaan sendiri dapat dibuat dengan bantuan besaran pivotal yang dijamin ada pada berbagai kasus asalkan $x_1, \ldots, x_n$ sample acak dari $f(\bullet;\theta)$, yang berkorespondensi dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x\,;\theta)$ yang kontinu pada X dan besaran pivotal ini dapat digunakan untuk menyusun interval kepercayaan taksiran jika $F(x\,;\theta)$ monoton dalam $\theta$ untuk setiap X. Jadi dalam meningkatkan kualitas penelitian disarankan untuk berkonsentrasi pada setiap sampel yang diperoleh dan usaha menambah ukuran sampel perlu dipertimbangkan dengan efisiensi waktu, beaya, tenaga dan tujuan penelitian.

## DAFTAR PUSTAKA

1. Mood, Alexander M, *Introduction to The Theory of Statistics,* Third Edition, Mc-Graw Hill, 1974.
2. Nasution S, *Metode Research*, PT. Bumi Aksara, 2001.
3. Schefler, William C, *Statistics for the Biological Sciences*, Second edition, Addison - Wesley Publishing Company, 1979.
4. Sumargo Chr H, *Pendahuluan Teori Kemunngkinan dan Statistika*, ITB, 1984.