JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 5. No. 1, 1 - 7, April 2002, ISSN : 1410-8518

APLIKASI OPTIMASI DINAMIS DENGAN PENDEKATAN MAXIMUM PRINCIPLE PADA PERTUMBUHAN EKONOMI DAERAH DAN ALOKASI PENDAPATAN BELANJA DAERAH[1]

Yusup Supena dan Yayan
Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Padjajaran

Abstract

This papers derives a applied maximum principle for dynamic system regional development progam with continous lags, i.e. systems governed by integrodifferential equations. The result show that dynamic optimization technically is powerfull analysis to show optimization of government revenue practically.

Keyword : Integrodifferential, maximum principle, tax effort, tax capacity, tax collection lags.

1. PENDAHULUAN

Proses pembangunan di daerah dalam rangka otonom memerlukan suatu pendekatan yang tepat dalam merencanakan proses pembangunan daerah itu sendiri. Ada tiga sisi yang akan dilihat dalam proses pembangunan daerah, yaitu

1. Potensi Daerah, secara potensi ekonomis, demografis, geografis, dan geologis yang telah ada, atau bahkan masih merupakan potensi,
2. Pencarian potensi ekonomi daerah dengan melihat siklus dua sisi yaitu sisi perilaku konsumen dan sisi perilaku produsen yang berdampak pada pertumbuhan ekonomi secara keseluruhan,
3. Alokasi dana yang sesuai dengan dana masuk dan berbanding lurus dengan dana yang keluar.

[1] Makalah ini disampaikan pada Seminar Nasional Dalam Rangka Konferda Himpunan Matematika Indonesia Wilayah Jawa Tengah dan Daerah Istimewa Yogyakarta, 9 Maret 2002, Fakultas MIPA Universitas Diponegoro Semarang.

Seluruh sisi dari proses perencanaan pembangunan memiliki fungsi tujuan yaitu memaksimumkan pendapatan daerah sebagai dana pembangunan dengan melihat pada kesejahteraan rakyat. Maksimisasi tersebut memiliki kendala dari dua sisi, yaitu sisi pemerintah, produksi, dan konsumen. Sisi fiskal atau sisi pemerintah , adalah upaya pemerintah untuk menjaring fiskal dari masyarakat, hal ini mencerminkan baik atau buruknya sistem fiskal dalam usaha pemerintah untuk menghimpun dana fiskal. Usaha pemerintah untuk meningkatkat fiskal ini disebut sebagai "Tax Effort" (Weiss, 1995 : 175). "*Tax Effort*", usaha pemerintah dalam mengumpulkan pajak merupakan fungsi residual dari fungsi kapasitas pajak. Selain itu terhambatnya proses pengumpulan pajak disebabkan pula kelambatan pengumpulan pajak yang dilakukan oleh wajib pajak terhadap pemerintah. Fenomena ini disebut tax collection lag. Melihat fenomena ini perlu dilakukan suatu proses penyederhanaan dan pemecahan masalah secara dinamis bagaimana secara optimal antara dana masuk, proses, dan dialokasikan secara optimal.

Maka penulis coba dengan analisis optimasi dinamis kelambanan kontinyu (*dynamic optimization continous lags*) untuk membuat permodelan secara sederhana optimasi tersebut dengan proses pengumpulan dana, transformasi dana, dan alokasi dana.

2. TINJAUAN LITERATUR

Optimal Control dengan Lag Kontinyu

Model optimal control dengan lag kontinyu diperkenalkan oleh Hartl-Sethi (1984 : 73). Katakan $x(t) \in R^n$ dan $u(t) \in \Omega \subset R^m$ sebagai *state* dan *control trajectory*. Didefinisikan bahwa interval waktu antara $(-\infty, T)$. Ambil $F(x,u,t), f(x,u,t), g(x,u,\tau,t)$ merupakan fungsi kontinyu diferensial terhadap $R^n \times \Omega \times [0,T]$ dan $R^n \times \Omega \times \{(\tau,t) : -\infty < \tau \le t \le T\}$. Kemudian, model *optimal control* menjadi,

$$\max\left\{ J = \int_0^T F(x(t),u(t),t)\,dt \right\} \tag{1}$$

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 5. No. 1, 1 - 7, April 2002, ISSN : 1410-8518

subject to

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) + \int_{-\infty}^{t} g(x(\tau), u(\tau), \tau, t)\,d\tau \tag{2}$$

dengan kondisi awal,

$$\begin{aligned} x(t) &= \underset{\sim}{x}(t) \qquad t \in (-\infty, 0) \\ u(t) &= \underset{\sim}{u}(t) \qquad t \in (-\infty, 0) \end{aligned} \tag{3}$$

dengan bentuk mentransformasikan persamaan integrodifferential (2), maka dikenalkan variabel state baru y(t,s) didefinisikan dengan $\{(t,s): 0 \le t \le T, 0 \le s \le T - t\}$ dengan

$$y(t,s) \triangleq \int_{-\infty}^{t} g(x(\tau), u(\tau), \tau, t+s)\,d\tau \tag{4}$$

dengan memperlihatkan varibel state distribusi parameter $y(t,\cdot)$, dinotasikan bahwa y(t,s) untuk $s \in [0, T-t]$, maka masalah awal untuk (1) – (3) secara mudah dapat ditransformasikan sesuai dengan masalah,

$$\max\left\{ J = \int_{0}^{T} F(x(t), u(t), t)\,dt \right\}$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) + y(t,0), \tag{5}$$

$$y_t(t,s) = g(x(t), u(t), t, t+s) + y_s(t,s), \tag{6}$$

dengan kondisi awal

$$x(0) = x_0 \triangleq \underset{\sim}{x}(0) \tag{7}$$

$$y(0,s) = h(s) \triangleq \int_{-\infty}^{0} g(\underset{\sim}{x}(\tau), \underset{\sim}{u}(\tau), \tau, s)\,d\tau \tag{8}$$

dengan tanda ~ dibawah berarti devasi parsial. Penambahan persamaan state (6) maka dapat dihitung dengan mudah untuk y_t dan y_s dari (4) serta mengkombinasikannya. Persamaan (5) adalah persamaan parameter kelambanan dan (6) sebagai persamaan parameter distribusi yaitu persamaan turunan parsial; sehingga permasalahan ini tidak dipecahkan dengan parameter distribusi parameter optimal biasa.

Salah satu pendekatan yang terbaik dalam pemecahan masalah optimasi dinamis dapat dipecahkan denga dua pendekatan yaitu Euler Lagrange dan Maximum Principle.

Maximum Principle

Maximum principle adalah salah satu pendekatan yang terbaik dalam pemecahan masalah otpimasi dinamis (Miller, 1979 : 46). Maximum Principle disebut pula sebagai *Pontriyagin Maximum Principle*.

Katakan u(t) adalah optimal control dari permasalahan (1) – (3) dengan trajectory state x(t). Kemudian adanya adjoint fungsi $\lambda(t)$ terhadap $[0,T]$ sehingga dengan Hamiltonian dapat didefinisikan sebagai,

$$H\left[x,u,t,\lambda(\cdot)\right] = F(x,u,t) + \lambda(t)f(x,u,t) + \int_t^T \lambda(\tau)g(x,u,t,\tau)d\tau \qquad (9)$$

maka dengan kondisi yang harus dipenuhi:

$$H\left[x(t),u(t),t,\lambda(\cdot)\right] \geq H\left[x(t),u,t,\lambda(\cdot)\right], \forall u \in \Omega, \qquad (10)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\partial H\left[x(t),u(t),t,\lambda(\cdot)\right]/\partial x, \qquad (11)$$

$$\lambda(T) = 0 \qquad (12)$$

Teorema berdasarkan kondisi optimal control ditunjukkan oleh persamaan (10) – (12) maka syarat cukup untuk optimal jika maksimisasi hamiltonian,

$$H^0 = \max_u H$$

adalah konkav dalam x.

Maka maximum principle dengan memegang fungsi sisa S(x(T)), sehingga fungsi tujuan dalam (1) menjadi,

$$\max\left\{J = \int_t^T F(x(t),u(t),t)dt + Sx(T))\right\}$$

maka transversalitiy condition (22) menjadi

$$\lambda(T) = \partial S(x(T))/\partial x \qquad (13)$$

jika S(x) adalah fungsi konkav.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 5. No. 1, 1 - 7, April 2002, ISSN : 1410-8518

3. APLIKASI

Katakan pad(t) sebagai pendapatan asli daerah dan br(t) dinotasikan sebagai belanja rutin di waktu t. Kemudian, sistem dinamis, dengan pengaruh tax collection lags terhadap tingkat penerimaan, maka dapat ditetapkan model,

$$\dot{pad}(t) = -\tau \cdot pad(t) + \sigma \int_{-\infty}^{t} f(pad(\mu), br(\mu), \mu, t)\, d\mu \tag{14}$$

dengan μ dan σ adalah *tax collection lags* dan respon konstan peneriman pendapatan asli daerah. Patut dicatat bahwa adanya waktu kontinyu dari sistem dinamis tersebut dalam Harthl-Sethi (1984). Fungsi f menunjukkan pengaruh pengeluaran belanja rutin di waktu μ dan pendapatan asli daerah di waktu t. Beberapa hal yang penting yang patut dicatat bahwa fungsi f menunjukkan adanya fungsi produksi suatu daerah. Hal ini disebut pula sebagai Produk Domestik Regional Bruto (PDRB), dimana $f = p(br)z(s)(t-\mu)$ (Harthl-Sethi, 1984 : 84; Burdet-Sethi, 1998; Connors-Teichchroew, 1999), dengan p(u) adalah fungsi produksi dan z(s) dinotasikan sebagai fungsi densitas dari distribusi time lag antara belanja daerah u dan peningkatan di p (produksi).

Maka hal ini dapat ditunjukkan dengan metode *maximum principle*, dengan mempertimbangkan model *optimal control*:

$$\max\left\{ J = \int \exp(-rt)\left[\pi\, pad(t) - br(t)\right] dt \right\} \tag{15}$$

subject to

$$\dot{p}(t) = -\tau\, pad(t) + \sigma \int_{-\infty}^{t} p(pad(\mu), br(\mu)) z(s)(t-\mu)\, d\mu \tag{16}$$

dan

$pad(t) = pad, br(t)$ untuk $t \le 0$.

r dinotasikan sebagai sebagai tingkat bunga yang konstan, dan π adalah parameter laba yang berhubungan dengan fungsi produksi terhadap pendapatan asli daerah, dan p(pad,u) adalah fungsi produksi output PDRB dengan pembelanjaan sebagai input.

Maka digunakan asumsi *maximum principle* dengan menggunakan teorema Hamiltonian,

$$H = (\pi pad - br)\exp(-rt) - \lambda\tau pad + \sigma p(pad(t), br(t))\int_{-\infty}^{T} \lambda(\mu) z(\mu - t) d\mu$$

maka

$$\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = -\pi \exp(-rt) + \lambda\tau + \sigma\left[\partial p(pad(t), br(t)) / \partial pad\right]\int_{-\infty}^{T} \lambda(\mu) z(\mu - t) d\mu \tag{17}$$

dengan transversality condition adalah,

$\lambda(T) = 0$

untuk menggambarkan adanya monotonisitas hasil dari br, akan dibuat dengan asumsi sederhana,

$p(pad, br) = p(br)$

sehingga *adjoint equation* menjadi,

$$\dot{\lambda}(t) = \lambda\tau - \pi \exp(-rt),\ \lambda(T) = 0 \tag{18}$$

Melihat kaidah maximum principle yaitu adanya varibel pengontrol yaitu br yang *decreasing return to scale* maka maksimisasi Hamiltonian menjadi,

$$\partial H / \partial u = -\exp(-rt) + \sigma p'(br)\int_{t}^{T} \lambda(\mu) z(s)(\mu - t) d\mu = 0 \tag{19}$$

dengan memasukkan fungsi implisit teorema ke (44), dibuat ke dalam fungsi limit sebagai $t \to T$ dalam (6) maka diperoleh,

$$\lim_{t \to \infty} - \exp(-rt) \tag{20}$$

maka (7) sama dengan (6) sehingga dengan kebijakan biaya rutin/ pembelanjaan yang optimal pembelanjaan / biaya ruitn terkonsentrasi di titik awal interval, sehingga secara monoton menurun dan menuju nol di terminal waktu T.

Semakin efektifnya fungsi linear p(br), dan fungsi adjoin $\lambda(t)$ adalah menurun secara monoton. Hal ini sesuai dengan konsitensi dengan interpretasi $\lambda(t)$, bayang fungsi produksi / PDRB, dimana keuntungan dari penambahan unit di waktu t dapat melebihi [t,T), dengan menurun dan t meningkat.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 5. No. 1, 1 - 7, April 2002, ISSN : 1410-8518

4. KESIMPULAN

Dalam paper ini penulis telah menunjukkan turunan alternatif maximum principle dengan kelambanan kontinyu. Dengan menggunakan metode programasi dinamis, dapat menghasilkan fungsi adjoint dan kondisi optimal dengan interpretasi ekonomi yang sepadan.

REFERENSI

1. Burdet C. A, Suresh Sethi, *On the Maximum Principle for a Class of Discrete Dynamical Systems with Lags*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1998, 19.

2. Connors M. M, Teichroew D, *Optimal Control of Dynamic Operations Research Models*, International Textbook Company, Pennsylvania, 1999.

3. Hartl R. F, S. P. Sethi, *Optimal Control of a Class of Systems with Continuous Lags : Dynamic Programming Approach and Economic Interpretations. Journal of Optimization Theory and Applications,* May 1984, 43 : 1.

4. Weiss, John, *Economic Policy in Developing Countries : The Reform Agenda*, Great Britain, Prentice-Hall, 1995.