JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 5. No. 1, 8 - 13, April 2002, ISSN : 1410-8518

SYARAT PERLU DAN CUKUP SUBMODUL TERKOMPLEMEN

Sri Wahyuni
Jurusan Matematika FMIPA UGM

Abstrak

Dipresentasikan syarat perlu dan cukup agar suatu submodul *S* dalam suatu modul *M* atas ring komutatif dengan elemen satuan *R* merupakan submodul terkomplemen. Diperoleh suatu sifat bahwa jika *S* terkomplemen akan berakibat M/S bebas; dan juga jika *S* terkomplemen maka akan berlaku: untuk setiap $x \in S$ jika berlaku $x = \alpha y$ dengan $y \in M$ dan $\alpha \neq 0$ dalam *R*, maka haruslah y juga barada dalam *M*. Selanjutnya dapat ditunjukkan kebalikannya juga benar jika *M* merupakan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama *R.*

1. PENDAHULUAN

Misalkan *M* merupakan modul atas ringb *R* (*R*-modul *M*) dan $x \neq 0$ merupakan suatu eleman bebas torsi dalam *M* (yaitu Ann (*x*) = (*0*)). Elemen *x* dikatakan primitif jika $x = \alpha y$ untuk suatu $y \in M$ dan $\alpha \in R$, maka α haruslah merupakan suatu unit di *R*. Dari pengertian elemen primitif tersebut, dapat disimpulkan bahwa jika suatu lapangan *F* dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri, maka setiap elemen tak nolnya merupakan elemen primitif. Sedangkan jika *R* sebarang ring komutatif dengan elemen satuan, maka elemen bebas torsi tak nol *x* akan primitif jika dan hanya jika *x* merupakan unit.

Pada *Z*-modul Z^2 elemen *(2,0)* merupakan elemen bebas torsi, namun *(2,0)* bukan primitif sebab $(2,0) = 2(1,0)$ dengan $(1,0) \in Z^2$ tetapi *2* bukan unit di *Z*. Sedangkan pada *Z*-modul *Q*, tidak ada elemen primitif di dalamnya.Pada modul bebas *M* atas daerah ideal utama *R* dengan basis $S = \{x_j\}_{j \in J}$ akan dapat diturunkan bahwa elemen $x = \sum_{j\in J} \alpha_j x_j$ primitif jika dan hanya jika gcd $(\{\alpha_j\}_{j\in J}) = 1$. Selain itu jika M dibangun oleh berhingga elemen dan $x \in M$ dengan Ann(x) = $\{0\}$, maka x dapat dinyatakan dengan $x = \alpha x'$ untuk suatu $\alpha \in R$ dan suatu elemen primitif x' dalam M. (Lihat Lemma 6.13 dan Lemma 6.14, Adkins et.al (1992)).

Lebih dari itu, jika M merupakan modul atas daerah ideal utama R dan $x \in M$ dengan Ann(x) = $\{0\}$, dengan menggunakan uraian di atas disimpulkan $x = \alpha x'$ dengan $\alpha \in R$ dan x' primitif dalam M. Jadi jika $S = \{x_j\}_{j\in J}$ adalah suatu basis M maka dapat ditulis $x' = \sum_{j\in J} \beta_j x_j$ dan $x = \alpha x' = \alpha \sum_{j\in J} \beta_j x_j = \sum_{j\in J} \alpha\beta_j x_j$

$$= \sum_{j\in J} c_j x_j$$

dan karena gcd $(\{b_j\}_{j\in J}) = 1$, maka α = gcd $(\{c_j\}_{j\in J})$.

Elemen α dalam R yang memenuhi $x = \alpha x'$ di atas tertentu secara tunggal oleh x dan selanjutnya disebut *content* dari x dalam M dan ditulis dengan notasi $c(x)$. Jadi setiap $x \in M$ dapat ditulis sebagai $x = c(x)\, x'$ dengan $c(x)$ *content* x dan x' primitif. Teorema berikut menyatakan keistimewaan dari elemen primitif dalam modul atas daerah ideal utama dalam kaitannya dengan memperluas elemen menjadi suatu basis dalam modul yang dibangun secara hingga. Tulisan ini merupakan ulasan dari suatu bagian tulisan Adkins et. al (1992).

Teorema 1.

Misalkan M adalah modul bebas atas daerah ideal utama R yang dibangun secara hingga. Jika $x \in M$ merupakan elemen primitif, maka M memuat suatu basis yang memuat x.

Bukti : Lihat Teorema 6.16 hal 150 (Adkins et. Al, 1992).

Secara umum jika M merupakan modul bebas yang dibangun secara hingga atas R dengan basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dan S submodul yang dibangun oleh $\{v_1, \ldots, v_s\}$ dengan $s < n$, maka submodul T yang dibangun oleh $\{v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ akan memenuhi $M \cong S \oplus T$, yaitu $S + T = M$ dan $S \cap T = \{ 0 \}$. Hal di atas memotivasi pembahasan submodul terkomplemen.

2. SUBMODUL TERKOMPLEMEN

Definisi 2

Misalkan M adalah modul atas ring kumutatif R dengan elemen satuan dan S suatu submodul dalam M. Submodul S dikatakan ***terkomplemen*** *jika ada submodul T dalam M dengan sifat* $M \cong S \oplus T$

Dari pengertian submodul terkomplemen di atas, dapat disimpulkan bahwa syarat cukup himpunan bebas linear $W = \{ w_1, w_2,\ldots,w_k\}$ dapat diperluas menjadi basis dalam M adalah submodul yang dibangun oleh W merupakan submodul terkomplemen. Sedangkan jika R merupakan daerah ideal utama, maka kebalikan pernyataan di atas juga benar sebab jika $< W >$ terkomplemen, yaitu ada submodul T sedemikian sehingga

$$< W > \oplus T \cong M$$

maka mengingat R merupakan daerah ideal utama, submodul T merupakan submodul bebas, sebut $\{ x_1,\ldots,x_r \}$ basis T. Dengan mudah dapat di cek bahwa

$$\{ w_1, w_2,\ldots, w_k, x_1,\ldots,x_r \}$$

membentuk basis untuk *M.*

Teorema sebagai berikut memberikan kondisi-kondisi yang ekuivalen untuk submodul terkomplemen dalam modul atas daerah ideal utama

Teorema 3

Misalkan R merupakan daerah ideal utama, dan M merupakan modul bebas atas R dan S suatu submodul dalam M.

Jika didefinisikan 3 pernyataan sebagai berikut :

(1) S terkomplemen dalam M

(2) M/S *modul bebas*

(3) *Jika* $x \in S$ *dan* $x = \alpha y$ *untuk suatu* $y \in M$ *dan* $\alpha \neq 0$ *dalam R, maka* $y \in S$

maka (1) $\Rightarrow$ *(2) dan (2)* $\Rightarrow$ *(3).*

Selanjutnya, jika M dibangun secara hingga, maka juga diperoleh (3) $\Rightarrow$ *(1)*

Bukti :

(1) $\Rightarrow$ (2)

Misalkan S terkomplemen, yaitu ada submodul T dalam M sehingga

$S \oplus T \cong M$……………………………………………………..(1)

Dari (1) diperoleh $M/S \cong T$, sementara itu *T* submodul bebas atas daerah ideal utama *R*, dengan Teorema 6.2 (Adkins et. At, 1992) diperoleh *T* bebas, Jadi M/S juga bebas.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Misalkan M/S modul bebas dan $x \in S$ dengan $x = \alpha y$ untuk suatu $y \in M$, dan $\alpha \neq 0$ dalam *R*. Akan dibuktikan *y* juga dalam *S*. Untuk menunjukkan *y* dalam *S*, cukup ditunjukkan $y + S = S$.

Mengingat $x = \alpha y$ berada dalam *S* maka

$$x + S = S$$

$$\alpha y + S = S$$

$$\alpha(y + S) = S$$

$$\alpha \bar{y} = \bar{0}$$

Karena M/S bebas (yang berarti M/S bebas torsi), maka mengingat $\alpha \neq 0$, maka diperoleh $\bar{y} = 0$ atau $y \in S$. Misalkan M dibangun secara hingga dan S submodul dalam M yang memenuhi kondisi (3). Kemudian dibentuk barisan eksak pendek.

$$0 \to S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/S \to 0 \text{ ………………………………………… (2)}$$

dengan i pemetaan inklusi dan π pemetaan kanonik. Pernyataan (3) ekuivalen dengan mengatakan bahwa M/S bebas torsi yang berarti M/S bebas (Teorema 6.6, Adkins et.al., 1992). Dari sini dapat disimpulkan bahwa M/S proyektif, sehingga dapat disimpulkan bahwa barisan (2) terpisah, yaitu ada f: $M/S \to M$ sedemikian hingga $f \circ \pi = I_M$, ini berarti

$$M \cong S \oplus Im\,(f)$$

atau S terkomplemen.

Sebagai akibat dari Teorema 2 di atas dapat diturunkan sifat sebagai berikut :

Akibat 3 :

Jika S terkomplemen dalam suatu modul M atas daerah ideal utama R yang dibangun secara hingga, maka setiap basis S dapat diperluas menjadi basis untuk M.

Contoh: Pandang Z-modul Z, dan submodul $S = <2>$.

Submodul S tak terkomplemen sebab

$$Z/S = Z/<2> = \{\,\overline{0}, \overline{1}\,\} = Z_2$$

sebagai modul atas Z tidak bebas; hal ini disebabkan Z_2 tidak mempunyai basis.

Berikut ini suatu sifat tentang kekomplemenan dari Kernel dan Image dari suatu homomorphisma modul.

Teorema 5.

Misalkan R merupakan daerah ideal utama, M dan N modul-modul bebas yang dibangun secara hingga atas R. Jika f: M $\to$ N merupakan homomorphisma modul maka

(1). Ker(f) terkomplemen

(2) Im(f) belum tentu terkomplemen

Bukti :

1. Dari Teorema 3, untuk membuktikan $S = Ker(f)$ terkomplemen, cukup apabila pernyataan (3) berlaku pada $S = Ker(f)$.

   Ambil $x \in Ker(f)$ dan $\alpha \neq 0$ dalam R dan $y \in M$ dengan $x = \alpha y$.

   Karena $f(x) = 0$ maka $f(\alpha y) = 0$; sehingga akan diperoleh $\alpha f(y) = 0$.

   Selanjutnya karena N bebas atas d.i.u dan $\alpha \neq 0$, maka $f(y) = 0$ atau $y \in Ker(f)$.

2. Untuk menunjukkan bahwa belum tentu $Im(f)$ merupakan submodul terkomplemen, cukup dengan menunjukkan **ada** homomorphism modul $f : M \rightarrow N$ dengan $Im(f)$ tak terkomplemen. Untuk itu pandang

   $$f : Z \rightarrow Z$$

   dengan $f(n) = 2n$. Jelas f merupakan Z homomorphisma modul dan $Im(f) = 2Z = <2>$ dan tadi sudah ditunjukkan bahwa $<2>$ tak terkomplemen.

Sebagai penutup, jika S dan T keduanya terkomplemen belum tentu $S + T$ terkomplemen walaupun pada suatu modul atas daerah ideal utama sekalipun. Contohnya pada modul

$$Z^2 = \{(x, y) | \; x, y \in Z\}$$

atas daerah ideal utama Z. Jika diambil $S = <(1,1)>$ dan $T = <(1,-1)>$ maka S dan T keduanya terkomplemen dalam Z^2 , tetapi $S + T$ tidak terkomplemen sebab $2(1,0) = (2,0) = (1,1) + (1,-1) \in S + T$ tetapi $(1,0) \notin S + T$ yang berarti $S + T$ tak terkomplemen.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins W. A, Weintraub S. H, *Algebra : An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.