

**METODE ELEMEN HINGGA UNTUK MASALAH SYARAT BATAS  
DARI OPERATOR DIFERENSIAL POSITIF**

Sutrima

Jurusan matematika FMIPA UNS

**Abstract**

The purpose of this research is to investigate numerical solutions of boundary value problems of positive differential operator by finite-element methods. The results showed that the finite-element methods can be implemented to obtained numerical solutions of boundary value problems of second-order positive differential operator. Moreover, rate of convergence of Ritz finite-element with Lagrange quadratic interpolation be  $\alpha = 3$  in the the  $L_2$ -norm and  $\alpha = 2$  in the energy norm.

Keywords : boundary problems, positive differential operator finite-element methods.

**1. PENDAHULUAN**

Banyak permasalahan-permasalahan praktis dalam kehidupan nyata yang dapat diformulasikan ke dalam model matematika, khususnya Persamaan Diferensial (*PD*). Misalnya masalah yang dapat dimodelkan menjadi *PD*

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu=f, \quad 0 < x < L \quad (1)$$

dengan  $p$  fungsi yang mempunyai turunan kontinu,  $q$  fungsi kontinu, dan  $f$  fungsi yang diketahui. Misalkan dari masalah (1) dilengkapi masalah syarat batas Dirichlet atau campuran di 0 dan  $L$ .

Pada kenyataannya banyak model dari masalah syarat batas (1) tidak dapat diselesaikan secara analitis. Oleh karena itu metode penyelesaian secara numerik akan berperan dalam kasus ini. Metode variasional merupakan salah satu metode yang efektif dalam analisis fungsional untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operator positif pada ruang Hilbert. Metode variasional ini didasarkan kepada minimisasi dari fungsional kuadratik terkait dari masalah yang

diberikan. Dari metode variasional inilah metode lemen hingga dikembangkan. Salah satu metode variasional yang terkenal adalah metode variasional Ritz.

Berdasarkan algoritma metode variasional Ritz (Reddy, 1986), untuk kasus masalah kontinu

$$Au = f \text{ pada } \Omega \quad (2)$$

dengan  $A$  operator linear yang definit positif pada  $D_A$  dalam ruang Hilbert  $H$  .. Penyelesaian persamaan (2) yaitu  $u \in D_A$  dapat diperoleh dengan meminimumkan fungsional kuadrat

$$\begin{aligned} J(u) &= \langle Au, u \rangle - 2 \langle f, u \rangle \\ &= B(u, u) - 2 \langle f, u \rangle_H \end{aligned}$$

atau oleh Bader (2001) dapat dinyatakan dengan formulasi variasional.

$$B(v, u) = \langle v, f \rangle_H, \forall v \in H \quad (3)$$

dengan  $B: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi bilinear yang simetris kontinu dan definit positif sehingga

$$B(u, v) = l(v), \text{ untuk setiap } v \text{ didalam } H .$$

untuk suatu fungsional linear kontinu  $l$  pada  $H$  .

Widianto (2001) telah menggunakan metode elemen hingga yang merupakan pengembangan dari metode variasional untuk menyelesaikan masalah persamaan (1) dengan fungsi hampiran untuk tiap-tiap elemen menggunakan interpolasi Lagrange linear. Secara umum prinsip dari metode elemen hingga untuk persamaan (1) adalah membagi domain  $\Omega$  menjadi beberapa subdomain, dalam setiap subdomain digunakan formulasi variasional sesuai dengan metode variasional yang digunakan.

Untuk kasus-kasus tertentu seperti yang telah diberikan oleh Reddy (1984) yaitu persamaan diferensial order empat, penggunaan basis dari interpolasi Lagrange linear lebih sulit untuk digunakan. Sehingga perlu cara lain yang lebih mudah untuk menyelesaikannya. Cara tersebut antara lain adalah menggunakan interpolasi Lagrange kuadrat. Dengan menggunakan interpolasi Lagrange kuadrat diharapkan hasil yang diperoleh lebih baik dari interpolasi Lagrange linear.

Untuk mengukur besar error dalam elemen hingga dapat digunakan norma kuadrat rata-rata atau norma energi, lihat (Reddy, 1984, 1986) dan (Akin, 2000). Hasil pendekatan elemen hingga  $U_H$  dapat dikatakan konvergen dalam norma energi ke  $u$  jika berlaku

$$\|u - U_H\|_m \leq cH^\alpha \text{ untuk } \alpha > 0 \quad (4)$$

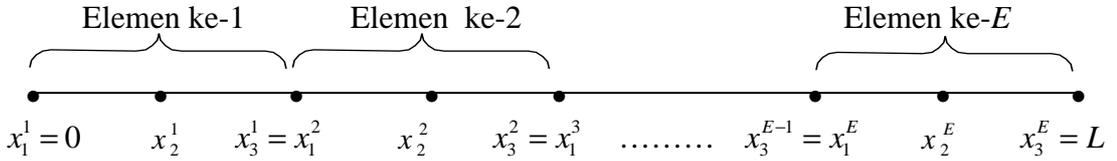
dengan  $c$  adalah konstanta yang besarnya tidak bergantung pada  $u$  dan  $U_H$  (Reddy, 1984). Konstanta  $\alpha$  disebut laju konvergensi.

Eksperimen numerik menunjukkan bahwa laju konvergensi elemen hingga Galerkin yang menggunakan interpolasi Lagrange linear adalah  $\alpha = 2$  terhadap norma kuadrat rata-rata dan  $\alpha = 1$  terhadap norma energi, lihat Widiyanto (2001), Reddy dan Volpi (1992).

Dengan mendefinisikan operator  $A \equiv -\frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q$ , maka dapat dibuktikan operator ini adalah operator linear simetri dan definit positif pada  $D_A$ . Dari fakta-fakta ini layak untuk diteliti tentang aplikasi dari metode elemen hingga untuk menyelesaikan masalah syarat batas (1).

## 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Misal  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  domain dari (1) dengan  $\Omega = (0, L)$  dan  $\Gamma$  himpunan titik-titik limit dari  $\Omega$ . Misal domain  $\bar{\Omega}$  dibagi menjadi  $E$  subdomain  $\bar{\Omega}^e, e = 1, 2, \dots, E$ . Jika digunakan interpolasi Lagrange kudratik sebagai fungsi hampirannya, maka setiap subdomain  $\bar{\Omega}^e, e = 1, 2, \dots, E$  mempunyai sifat  $\bar{\Omega}^e = [x_1^e, x_3^e]$  dengan  $x_1^1 = 0, x_3^E = L$ , dan  $x_3^{e-1} = x_1^e$  untuk indeks  $e = 2, \dots, E$ . Panjang elemen ke- $e$  adalah  $h_1^e + h_2^e$  dengan  $h_1^e = x_2^e - x_1^e$  dan  $h_2^e = x_3^e - x_2^e$ . Karena dalam penelitian ini diambil subdomain yang seragam, maka  $h^e$  cukup ditulis dengan  $h$ . Untuk lebih jelasnya lihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Pembagian subdomain untuk tiap-tiap elemen.

Dengan demikian untuk subdomain ke- $e$  berlaku

$$-\frac{d}{dx}\left(p_e \frac{du}{dx}\right) + q_e u = f_e, \quad x_1^e \leq x \leq x_3^e \quad (5)$$

dengan  $p_e$ ,  $q_e$  dan  $f_e$  secara berurutan adalah fungsi  $p$ ,  $q$  dan  $f$  yang terdefinisi pada domain  $\Omega^e$ .

Dengan algoritma metode variasional Ritz diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Au - f, v \rangle \\ &= \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left[ -\frac{d}{dx}\left(p_e \frac{du}{dx}\right) + q_e u - f_e \right] v \, dx \\ &= \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left( p_e \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q_e u v - f_e v \right) dx + \left[ v \left( -p_e \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_1^e}^{x_3^e}. \end{aligned}$$

Dengan mengambil  $Q_1^e = \left( -p_e \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1^e}$  dan  $-Q_2^e = \left( -p_e \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_3^e}$ , maka hasil terakhir menjadi

$$0 = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left( p_e \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q_e u v - f_e v \right) dx - Q_1^e v(x_1^e) - Q_2^e v(x_3^e)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$0 = B_e(u, v) - l_e(v) \quad (6)$$

dengan

$$B_e(u, v) = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \left( p_e \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q_e u v \right) dx \quad \text{dan} \quad l_e(v) = \int_{x_1^e}^{x_3^e} f_e v \, dx + Q_1^e v(x_1^e) + Q_2^e v(x_3^e).$$

Mudah ditunjukkan bahwa  $B_e(u, v)$  suatu fungsi bilinear yang simetris.

Dikonstruksikan penyelesaian Ritz  $\bullet_e(x) = \sum_{j=1}^n \bullet_j^e \psi_j^e(x)$  pada domain  $\bar{\Omega}^e$ .

Jika diambil  $v = \psi_i^e$ , sehingga dari persamaan (6) diperoleh

$$0 = \sum_{j=1}^n k_{ij}^e v_j^e - f_j^e, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dengan

$$k_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} (p_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + q_e \psi_i^e \psi_j^e) dx \quad \text{dan} \quad f_i^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} f_e \psi_i^e dx + Q_1^e \psi_i^e(x_1^e) + Q_2^e \psi_i^e(x_3^e).$$

Untuk selanjutnya bentuk tersebut dapat disajikan dalam persamaan matriks

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \tag{7}$$

dengan  $\mathbf{K}^e = [k_{ij}^e]$ ,  $\mathbf{f}^e = [f_i^e]$  dan  $\mathbf{u}^e = [\bullet_j^e]$ .

Jika digunakan ide interpolasi Lagrange kuadratik maka fungsi  $\bullet_e(x)$  menjadi

$$\bullet_e(x) = \sum_{i=1}^3 \bullet_i^e \psi_i^e \tag{8}$$

dengan basis  $\psi_i^e = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{x - x_j^e}{x_i^e - x_j^e}$ . Anggota basis  $\psi_i^e$  ini sering juga disebut dengan

fungsi bentuk, dan bersifat  $\psi_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \neq j \\ 1 & \text{untuk } i = j \end{cases}$ . Selanjutnya, jika diambil

transformasi  $x = x_1^e + \xi$  dengan  $h_e = x_2^e - x_1^e = x_3^e - x_2^e$  dan  $0 < \xi < 2h_e$ , dan

disubstitusikan kedalam basis akan diperoleh entri-entri dari  $\mathbf{K}^e$  dan  $\mathbf{f}^e$ ,

$$k_{ij}^e = \int_0^{2h_e} (\hat{p}_e \frac{d\psi_i^e}{d\xi} \frac{d\psi_j^e}{d\xi} + \hat{q}_e \psi_i^e \psi_j^e) d\xi, \quad f_1^e = \int_0^{2h_e} \hat{f}_e \psi_1^e d\xi + Q_1^e, \quad f_2^e = \int_0^{2h_e} \hat{f}_e \psi_2^e d\xi,$$

dan 
$$f_3^e = \int_0^{2h_e} \hat{f}_e \psi_3^e d\xi + Q_2^e \tag{9}$$

dengan  $\hat{p}_e \equiv p_e(x_e + \xi)$ ,  $\hat{q}_e \equiv q_e(x_e + \xi)$  dan  $\hat{f}_e \equiv f_e(x_e + \xi)$ .

Perakitan dari semua matriks  $K^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e, e = 1, 2, \dots, E$  diperoleh

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{33}^{E-1} + k_{11}^E & k_{12}^E & k_{13}^E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{21}^E & k_{22}^E & k_{23}^E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{31}^E & k_{32}^E & k_{33}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ \vdots \\ U_{2E-1} \\ U_{2E} \\ U_{2E+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \\ \vdots \\ f_3^{E-1} + f_1^E \\ f_2^E \\ f_3^E \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \tag{10}$$

yang berlaku pada domain  $\bar{\Omega} = [0, L]$ . Matriks  $K$  dalam persamaan (10) sering disebut sebagai matriks kekakuan. Dengan menerapkan syarat batasnya terhadap (10) akan diperoleh penyelesaian hampiran elemen hingga.

### 3. IMPLEMENTASI KASUS

**Kasus 1.** Perhatikan masalah syarat batas

$$-\frac{d}{dx} \left( (x^2 + 1) \frac{du}{dx} \right) + 12u = 18x, \quad 0 < x < 1 \tag{11}$$

dengan syarat batas Dirichlet  $u(0) = 0$  dan  $u(1) = 1$ . Penyelesaian eksak dari

masalah ini adalah  $u(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$ , (Reddy, 1986).

Dalam hal ini  $D_A = \{v \in C^2[0, 1] : v(0) = 0 \text{ dan } v(1) = 1\}$ . Pada artikel ini pembagian domain seragam, artinya panjang karakteristik  $H$  dari semua subdomain sama. Misal banyaknya elemen adalah  $E$ . Dapat ditentukan subdomain ke- $e$  adalah  $\bar{\Omega}^e = \left[ \frac{e-1}{E}, \frac{e}{E} \right]$ ,  $e = 1, 2, \dots, E$  dan  $h = h^e = \frac{1}{2E}$ . Jelas

panjang karakteristik dari tiap subdomain adalah  $H = 2h^e = \frac{1}{E}$ .

Untuk mencari penyelesaiannya digunakan persamaan (9) dan (10) dengan syarat batas terkait. Misal banyaknya elemen adalah 2, sehingga dari proses pembagian subdomain diperoleh  $\bar{\Omega}^1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $\bar{\Omega}^2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  dan  $h = \frac{1}{4}$ . Dengan menerapkan persamaan (9) dan (10) diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{224}{15} & -\frac{29}{5} & 0 \\ -\frac{29}{5} & \frac{202}{15} & -\frac{107}{15} \\ 0 & -\frac{107}{15} & \frac{304}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{409}{30} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (11) ini diperoleh  $U_2 = 0.367363$ ,  $U_3 = 0.687234$ ,  $U_4 = 0.914586$  dan dari syarat batas diketahui  $U_1 = 0$  dan  $U_5 = 1$ . Dalam hal ini telah ditentukan bahwa  $\bullet_1^1 = U_1$ ,  $\bullet_2^1 = U_2$ ,  $\bullet_3^1 = U_3 = \bullet_1^2$ ,  $\bullet_2^2 = U_4$ , dan  $\bullet_3^2 = U_5$ . Sehingga penyelesaian hampiran adalah

$$U_H(x) = \begin{cases} 1.5644x - 0.3799x^2 & , 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -0.1933 + 2.3288x - 1.1355x^2 & , \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

Untuk banyaknya elemen  $E = 2$ ,  $E = 4$ ,  $E = 8$ ,  $E = 16$ ,  $E = 32$  hasilnya dapat dilihat pada Tabel 1 dan besar error dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 1.  $u$  dan  $U_H$  dengan  $E = 2$ ,  $E = 4$ ,  $E = 8$ ,  $E = 16$ , dan  $E = 32$  untuk Kasus 1.

$x$	$E=2$	$E=4$	$E=8$	$E=16$	$E=32$	$u(x)$
0	0	0	0	0	0	0
0.25	0.367363	0.367176	0.367187	0.367187	0.367187	0.367188
0.5	0.687234	0.687483	0.687499	0.687500	0.687500	0.687500
0.75	0.914586	0.914049	0.914062	0.914062	0.914062	0.914063
1	1	1	1	1	1	1

Tabel 2. Error  $U_H$  untuk Kasus 1.

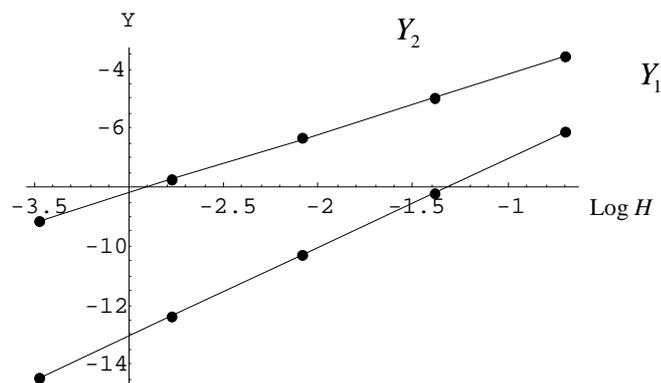
$E$	$\ u - U_H\ _0$	$\ u - U_H\ _1$
2	0.002174	0.028140
4	0.000270	0.007001
8	0.000033	0.001748
16	$4.212 \times 10^{-6}$	0.000437
32	$5.265 \times 10^{-7}$	0.000109

Untuk mencari laju konvergensi error dari Kasus 1 dapat digunakan ide dari Reddy dan Volpi [1992], sehingga dapat ditentukan  $Y_1 = \text{Log} \|u - U_H\|_0$  dan  $Y_2 = \text{Log} \|u - U_H\|_1$ . Dari Gambar 2 terlihat bahwa  $Y_1$  dan  $Y_2$  bentuknya mendekati garis lurus. Dengan data error dari Tabel 3 dan menggunakan metode pendekatan kuadrat terkecil dapat diperoleh bahwa

$$Y_1 = \text{Log} \|u - U_H\|_0 \approx 3.0027 \text{Log} H - 4.0502$$

dan

$$Y_2 = \text{Log} \|u - U_H\|_1 \approx 2.0022 \text{Log} H - 2.1846. \quad (12)$$



Gambar 2. Plot  $Y_1$  dan  $Y_2$  terhadap  $\text{Log} H$  untuk Kasus 1.

Berdasarkan persamaan (12) dapat diketahui bahwa gradien  $Y_1$  terhadap  $\text{Log} H$  mendekati 3 dan  $Y_2$  terhadap  $\text{Log} H$  mendekati 2. Dengan kata lain konvergensi

error untuk Kasus 1 adalah  $\alpha = 3$  terhadap norma kuadrat rata-rata dan  $\alpha = 2$  terhadap norma energi.

**Kasus 2.** Perhatikan masalah syarat batas

$$-\frac{d}{dx} \left( (x+1) \frac{du}{dx} \right) + x u = -2e^x - 2x, \quad 0 < x < 1 \quad (13)$$

dengan syarat batas campuran  $u(0) = 0$  dan  $u'(1) = e - e^{-1}$ . Penyelesaian eksak dari (13) adalah  $u(x) = e^x + e^{-x} - 2$ , [Reddy, 1986].

Proses pembagian domain dilakukan sama seperti pada Kasus 1. Subdomain ke- $e$  adalah  $\bar{\Omega}^e = \left[ \frac{e-1}{E}, \frac{e}{E} \right]$ ,  $e = 1, 2, \dots, E$  dengan  $h = h^e = \frac{1}{2E}$  dan  $E$  banyaknya elemen.

Fungsi hampiran untuk setiap elemen dipilih sesuai persamaan (8).

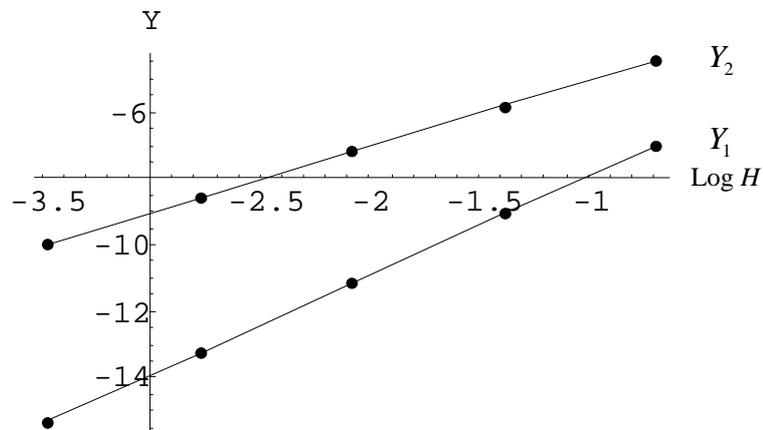
Selanjutnya dapat diterapkan persamaan (9) dan (10) untuk mencari penyelesaiannya. Untuk nilai  $E = 2, E = 4, E = 8, E = 16$ , dan  $E = 32$  hasilnya dapat dilihat pada Tabel 3. Sedangkan besar errornya disajikan pada Tabel 4.

Tabel 3.  $u$  dan  $U_H$  dengan  $E = 2, E = 4, E = 8, E = 16$ , dan  $E = 32$  untuk Kasus 2.

$x$	$E=2$	$E=4$	$E=8$	$E=16$	$E=32$	$u(x)$
0	0	0	0	0	0	0
0.25	0.062637	0.06286	0.062826	0.062826	0.062826	0.062826
0.5	0.255224	0.25525	0.255252	0.255252	0.255252	0.255252
0.75	0.58897	0.589363	0.589366	0.589367	0.589367	0.589367
1	1.08606	1.08606	1.08606	1.08606	1.08606	1.08606

Tabel 4. Error  $U_H$  untuk Kasus 2.

$E$	$\ u - U_H\ _0$	$\ u - U_H\ _1$
2	0,0008875	0.0114916
4	0,0001137	0.0029463
8	0,0000143	0.0007412
16	$1.7964 \times 10^{-6}$	0.0001856
32	$2.2211 \times 10^{-7}$	0.0000464



Gambar 3. Plot  $Y_1$  dan  $Y_2$  terhadap  $\text{Log } H$  untuk Kasus 2.

Dengan data error dari Tabel 4 disimpulkan bahwa

$$Y_1 = \text{Log} \|u - U_H\|_0 \approx 2.992 \text{Log } H - 4.943$$

dan 
$$Y_2 = \text{Log} \|u - U_H\|_1 \approx 1.99 \text{Log } H - 3.008. \quad (14)$$

Dari persamaan (14) dapat diketahui bahwa gradien  $Y_1$  terhadap  $\text{Log } H$  mendekati 3 dan gradien  $Y_2$  terhadap  $\text{Log } H$  mendekati 2, lihat Gambar 3. Dengan kata lain laju konvergensi error untuk Kasus 2 ini adalah  $\alpha = 3$  terhadap norma kuadrat rata-rata dan  $\alpha = 2$  terhadap norma energi.

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari yang telah diuraikan bahwa :

1. Metode elemen hingga Ritz dengan interpolasi Lagrange kuadratik dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah syarat batas (1).
2. Berdasarkan eksperimen numerik dalam implementasi kasus, laju konvergensi elemen hingga Ritz dengan interpolasi Lagrange kuadratik adalah  $\alpha = 3$  terhadap norma kuadrat rata-rata dan  $\alpha = 2$  terhadap norma energi.

#### 5. UCAPAN TERIMA KASIH

Artikel ini adalah sebagian dari hasil penelitian hibah dari Proyek DUE UNS Tahun 2001. Untuk itu peneliti mengucapkan terima kasih kepada Proyek DUE UNS atas dana yang dipercayakan kepada peneliti.

**DAFTAR PUSTAKA**

1. Akin J. E, *Finite Element Analysis with Error Estimation*, Rice, University, Department of Mechanical Engineering and Materials Science, Houston, 2000.
2. Bader, Mathias, *Energy Minimization Methods for Feature Displacements in Map Generalization*, Dissertation zur Erlangung der naturwissenschaftlichen Doktorwurde vorgelegtde Mathematisch - naturwissenschaftlichen Fakultat der Universitat Zurich, Zurich, 2001.
3. Dwi Widiyanto, *Analisis Elemen Hingga Galerkin untuk Persamaan Aliran Laminer*, Skripsi Mahasiswa FMIPA UNS, Universitas Sebelas Maret Surakarta, 2001.
4. Reddy B.D, Volpi, M. B, *Mixed Finite Element Methods for the Circular Arch Problem*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Zengineering Elsevier Science Publishers*, North-Holland, 1992, 97 : 125 - 145.
5. Reddy J. N, *An Introduction to The Finite Element Method*, Mc Graw-Hill Inc, New York, 1984.
6. Reddy J. N, *Applied Functional Analysis and Variational Method in Engineering*, Mc Graw-Hill Inc, Singapore, 1986.