

**PEMODELAN ALIRAN FLUIDA DIMENSI DUA YANG MELALUI
SILINDER BERPENAMPANG AIRFOIL DARI PENJUMLAHAN DUA
LINGKARAN¹**

Idha Sihwaningrum
Fakultas Biologi UNSOED

Abstract

In two dimensional nonviscous incompressible irrotational fluid flow, the equipotential lines and the streamlines can be related to the real and imaginary part of the complex function respectively. By taking the streamlines equal to zero as the boundary fluid flows, we get several types of fluid flows such as fluid flow past a circular cylinder. Having addition of two cylinder in a certain position result in an airfoil, it is reasonable for asking whether addition of two equation of fluid flow past a cylinder give an equation of fluid flow past an airfoil cylinder. This can be answer by examining a lift from the airfoil equation. It is difficult to obtain the actual value of the lift. To gain an understanding, we examine the change of square of the velocity in the neighbourhood of the airfoil. Bernoulli's equation provides the connection between the pressure and the square of the velocity. Then the knowledge of the square of the fluid flow velocity gives an indication of the pressure. Since the square of the fluid flow velocity in the neighbourhood below the airfoil is smaller than it is in the neighbourhood above the airfoil, then the pressure in the neighbourhood below the airfoil is greater than it is the neighbourhood above the airfoil. This indicates that we have a lift from the equation of fluid flow past an airfoil in which its equation formed by summing two equation of fluid flow past a cylinder.

1. PENDAHULUAN

Persamaan Laplace merupakan persamaan yang banyak digunakan di bidang Fisika, misalnya untuk persamaan medan elektrostatik, persamaan medan gravitasi, dan persamaan aliran fluida. Pada dimensi dua, persamaan ini berbentuk :

¹ Disampaikan dalam Seminar Nasional dalam rangka Konferda Himpunan Matematika Indonesia Wilayah Jawa Tengah dan Daerah Istimewa Yogyakarta pada tanggal 9 Maret 2002 di Semarang.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 0$$

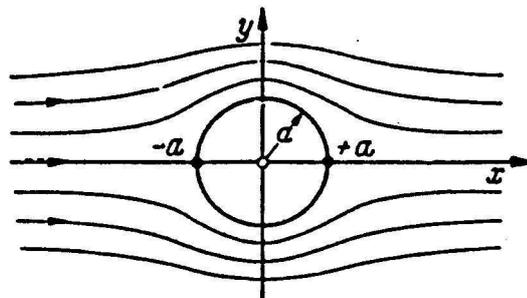
dan diselesaikan menggunakan fungsi kompleks. Dalam koordinat Kartesius, bagian riil $\phi(x, y)$, dan bagian imajiner $\psi(x, y)$ dari fungsi kompleks

$$F(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

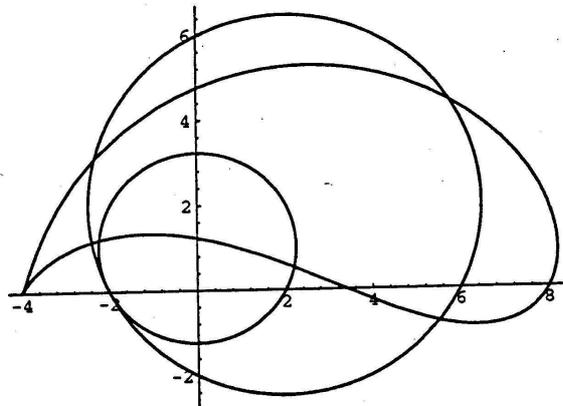
yang disebut juga kompleks potensial, merupakan penyelesaian dari persamaan Laplace. Grafik fungsi $\phi(x, y) = c$ dan $\psi(x, y) = c$, dengan c adalah konstanta, mempunyai berbagai arti fisis. Pada aliran fluida, $\phi(x, y) = c$ menyatakan kecepatan potensial, dan $\psi(x, y) = c$ menyatakan garis alir. Garis alir menunjukkan pola aliran fluida yang melalui suatu benda. Dengan mengambil $\psi(x, y)$ sama dengan nol sebagai batas aliran fluida, pola aliran fluida yang melalui silinder berpenampang lingkaran dengan pusat $(0, 0)$ dan jari-jari a (lihat Gambar 1) diberikan oleh

$$w = A \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

dengan A merupakan konstanta.



Gambar 1. Pola aliran fluida yang melalui silinder berpenampang lingkaran



Gambar 2. Airfoil yang merupakan hasil dari penjumlahan lingkaran berpusat di $(0, 1)$ dengan jari-jari $\sqrt{5}$ dan lingkaran yang berpusat di $(2, 2)$ dengan jari-jari $2\sqrt{5}$.

Karena pada posisi tertentu penjumlahan dua buah lingkaran menghasilkan airfoil (Gambar 2), maka sangatlah relevan untuk mempertanyakan apakah penjumlahan dari dua buah persamaan aliran fluida yang melalui silinder berpenampang lingkaran merupakan persamaan aliran fluida melalui silinder berpenampang airfoil. Hal ini berarti bahwa persamaan aliran fluida yang dihasilkan dengan cara menjumlahkan dua persamaan aliran fluida yang melalui silinder berpenampang lingkaran merupakan persamaan aliran fluida yang melalui silinder berpenampang airfoil apabila persamaan tersebut memenuhi kriteria aerodinamik, yaitu apabila dari persamaan tersebut dapat diperoleh gaya angkat (*lift*).

2. FLUIDA DAN SIFAT-SIFATNYA

Fluida didefinisikan oleh Chorlton (1967), sebagai zat yang mengalami perubahan bentuk bila mendapat tekanan, meskipun tekanan tersebut sangat kecil. Fluida dapat dipandang sebagai struktur molekul atau media kontinu, tetapi untuk memodelkan fluida secara matematis, maka fluida diasumsikan sebagai media kontinu (Streeter, 1981). Karena fluida dipandang sebagai media kontinu, sifat-sifat fluida yang perlu diperhatikan adalah tekanan, kecepatan, kepadatan,

kecepatan, suhu, dan keenceran. Dalam pembicaraan selanjutnya, fluida yang dibicarakan adalah fluida dimensi dua yang tunak (steady), encer (inviscid), tak termampatkan (incompressible), dan tak berputar (irrotational) sehingga sifat fluida yang menjadi perhatian hanyalah kepadatan (dilambangkan dengan ρ), kecepatan (dilambangkan dengan \mathbf{v}), dan tekanan (dilambangkan dengan p). Ketiga sifat fluida ini dihubungkan dengan persamaan kekekalan massa dan persamaan kekekalan momentum.

3. FLUIDA DIMENSI DUA

Fluida dimensi dua adalah fluida yang gerak dan kecepatannya pada semua bidang sejajar dengan gerak dan kecepatannya di bidang-xy (Kreyszig, 1993). Kecepatan fluida di titik (x, y) mempunyai besar dan arah sehingga kecepatan ini merupakan vektor. Karena setiap bilangan a di bidang kompleks menyatakan vektor (dari titik asal ke titik yang berpadanan dengan a), maka vektor kecepatan aliran fluida dapat dinyatakan oleh variabel kompleks (Kreyszig, 1993). Vektor \mathbf{v} mempunyai dua komponen: v_1 yang merupakan komponen vektor yang searah sumbu-x dan v_2 yang merupakan komponen vektor yang searah sumbu-y. Vektor kecepatan ini menyinggung lintasan gerak partikel fluida, yang disebut dengan garis alir dari gerak fluida.

Dengan asumsi tertentu, terdapat fungsi analitis untuk aliran fluida, yaitu

$$F(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

yang disebut potensial kompleks dari aliran fluida sedemikian rupa sehingga garis alir diberikan oleh $\psi(x, y) = c$, dengan c konstanta, dan garis ekuipotensial diberikan oleh $\phi(x, y) = c$, dengan c konstanta. Selanjutnya, menurut Kreyder (1985), fungsi $\psi(x, y)$ disebut fungsi alir, dan $\phi(x, y)$ disebut kecepatan potensial.

Karena $F(z)$ merupakan fungsi analitis, maka fungsi alir dan kecepatan potensial memenuhi persamaan Laplace $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$. Fungsi alir mengukur

banyaknya fluida yang mengalir melalui permukaan luasan sehingga fungsi ini

menjamin hukum kekekalan massa fluida (Chorlton, 1967). Sementara itu, garis alir menggambarkan pola aliran fluida.

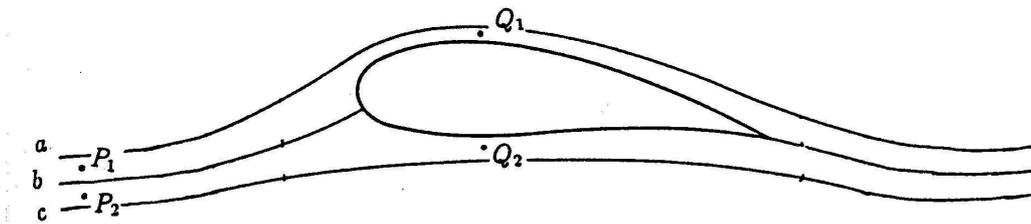
Disamping digambarkan dengan fungsi alir, fluida dimensi dua yang tidak berputar (*irrotational*) juga dapat digambarkan dengan kecepatan ekuipotensial (Kundu, 1990). Fungsi ekuipotensial yang konstan, yaitu $\phi(x, y) = c$ yang disebut garis ekuipotensial, tegak lurus dengan garis alir. Garis ekuipotensial bersama-sama dengan garis alir membentuk jaring alir (*flow net*) fluida.

4. PERSAMAAN BERNOULLI

Dalam Gambar 3, misalkan a, b, dan c merupakan garis alir. b merupakan perpanjangan garis alir yang membentuk airfoil, sedangkan a dan c merupakan garis alir yang masing-masing terletak di atas dan di bawah airfoil. Di tempat yang jauh dari airfoil, garis alir a dan c berjarak sama terhadap b. Akan tetapi di dekat airfoil, a berada lebih dekat dengan airfoil ketimbang c. Pada posisi P_1 dan P_2 , besarnya tekanan dan kecepatan sama. Selanjutnya akan diperhatikan posisi P_1 dan Q_1 . Karena bentuk airfoil berubah dari lebar ke sempit, maka kecepatan dari P_1 dan Q_1 semakin meningkat. Dari persamaan Bernoulli

$$p_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2} v_1^2,$$

tekanan di Q_1 lebih kecil dari tekanan di P_1 .



Gambar 3.

Menurut Moran (1984), karena lengkungan garis alir di sekitar Q_2 tidak sedalam lengkungan garis alir di sekitar Q_1 , maka kecepatan di Q_2 lebih kecil daripada kecepatan di Q_1 . Dengan demikian, tekanan di Q_2 lebih besar ketimbang tekanan di Q_1 . Hal ini menunjukkan bahwa pada airfoil tersebut ada gaya angkat.

5. AIRFOIL

Dalam Gambar 2 ditunjukkan bahwa penjumlahan dua lingkaran dengan posisi tertentu menghasilkan airfoil. Selanjutnya, potensial kompleks dari aliran fluida yang pada sudut θ melau silinder berpenampang lingkaran dengan pusat c_1 dan jari-jari a_1 mempunyai persamaan

$$w_1 = A \left[(z - c_1)e^{-i\theta} + \frac{a_1^2 e^{i\theta}}{z - c_1} \right] \quad (1)$$

dan potensial kompleks dari aliran fluida yang pada sudut θ melau silinder berpenampang lingkaran dengan pusat c_2 dan jari-jari a_2 mempunyai persamaan

$$w_2 = A \left[(z - c_2)e^{-i\theta} + \frac{a_2^2 e^{i\theta}}{z - c_2} \right]. \quad (2)$$

Jumlah dari kedua kompleks potensial di atas

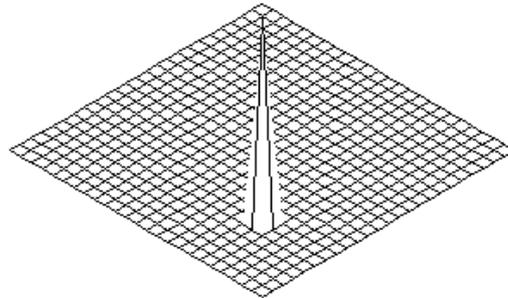
$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ &= A \left[(z - c_1)e^{-i\theta} + \frac{a_1^2 e^{i\theta}}{z - c_1} \right] + A \left[(z - c_2)e^{-i\theta} + \frac{a_2^2 e^{i\theta}}{z - c_2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Kecepatan kompleks dari persamaan (3) diberikan oleh

$$v = A \left[\left(\frac{a_2^2}{(z - c_2)^2 - 1} \right) (\cos \theta + i \sin \theta) + \left(\frac{a_1^2}{(z - c_1)^2 - 1} \right) (\cos \theta - i \sin \theta) \right] \quad (4)$$

Nilai sebenarnya dari gaya angkat ini tidaklah mudah untuk dihitung sehingga perlu cara untuk memberikan gambaran tentang gaya angkat ini yaitu dengan menghitung v^2 (kuadrat kecepatan aliran fluida di sekitar airfoil). Karena persamaan Bernoulli memberikan hubungan antara kecepatan dan tekanan, maka pengetahuan tentang kecepatan aliran fluida memberikan petunjuk mengenai tekanan. Gambar 4 menunjukkan bahwa kuadrat kecepatan aliran fluida di sekitar bawah airfoil lebih kecil ketimbang di sekitar atas airfoil. Dengan demikian tekanan di sekitar bawah airfoil lebih besar daripada tekanan di sekitar atas airfoil. Ini menunjukkan bahwa ada gaya angkat untuk airfoil yang persamaan aliran

fluidanya dibentuk dengan cara menjumlahkan dua persamaan aliran fluida yang melalui silinder berpenampang lingkaran.



Gambar 4. Kuadrat kecepatan untuk $-2 \leq x \leq 2$ dan $-2 \leq y \leq 2$.

6. KESIMPULAN

Karena ada gaya angkat, maka persamaan yang dibentuk dengan cara menjumlahkan dua persamaan aliran fluida yang melalui silinder berpenampang lingkaran merupakan persamaan aliran fluida yang melalui airfoil.

DAFTAR PUSTAKA

1. Chorlton, Frank, *Textbooks of Fluid Dynamics*, D. Van Norstrand Company, Ltd. London, 1967.
2. Kreider, Jan F, *Principles of Fluid Mechanics*, Allyn and Bacon. McGraw-Hill, Inc. New York, 1985.
3. Kreyzig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons Inc, New York, 1993.
4. Kundu, Pijush K, *Fluid Mechanics*, Academic Press Inc, San Diego, 1990.
5. Moran, Jack, *An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics*, John Wiley and Sons Inc, 1984.