**JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER**
Vol. 5. No. 1, 39 - 46, April 2002, ISSN : 1410-8518

# MENCARI SOLUSI PENAKSIR PARAMETER PADA ANALISIS VARIANSI DENGAN PENDEKATAN GENERAL INVERS

Sukestiyarno
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang

**Abstrak**

Pada model linear metode kuadarat terkecil digunakan untuk mencari penaksir koefisien parameter. Pada model linier analisis regresi akan diperoleh solusi penaksir yang unik (tunggal), karena pada matriks regresornya mempunyai rank penuh. Akan tetapi pada model linear analisis variansi akan diperoleh solusi penaksir yang tidak tunggal. Hal tersebut terjadi karena pada matriks koefisien regresornya mempunyai rank tak penuh (vektor kolom matriks regressor bergantung linier). Untuk mendapatkan solusi yang tunggal maka orang menempuh jalan menambahkan persyaratan dengan memasukkan suatu kendala. Pada makalah ini akan membahas masalah mencari alternatif solusi penaksir parameter dengan tanpa memasukkan kendala. Dengan memilih salah satu general invers perkalian matriks regresor yang mempunyai sifat khusus dapat diperoleh suatu penaksir yang lebih baik dari pada penaksir yang diperoleh dengan memasukkan kendala.

Kata kunci : Model linier, analisis regresi, analisis variansi, general invers.

## 1. LATAR BELAKANG MASALAH

Model linier adalah suatu bentuk hubungan linier antar variabel bebas X dengan variabel bergantung Y. Hubungan tersebut diberikan sebagai berikut :

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p + u, \tag{1}$$

atau ditulis dalam bentuk persamaan matriks :

$$y = X\beta + u, \tag{2}$$

dimana

$y = (y_1,\ldots,y_n)'$ vektor respons (variabel bergantung)

$X = (\iota, X_1, X_2,\ldots,X_p)$ matriks (n x p+1) sebagai matriks regresor (bebas)

$\iota = (1,\ldots,1)'$ vektor satuan

$\beta_0$ = parameter konstan (interecept)

$\beta$ = $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)'$ vektor koefisien parameter

u = $(u_1, \ldots, u_n)'$ vektor galat (error)

$X_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$ vektor (1 x n) sebagai vektor kolom matriks regresor.

Sebagai asumsi untuk memperoleh penaksiran Ordinary Least Squares (OLS) atau dengan metode kuadrat terkecil dipersyaratkan bahwa :

1. Matriks X bukan variabel stokastik melainkan merupakan suatu besaran desain matriks.
2. $u_i$ merupakan variabel stokastik galat (error) berdistribusi normal dengan rataan 0 dan varians $\sigma^2$ ditulis $u \sim N(0,\sigma^2 I)$. Akibatnya Y merupakan variabel stokastik dengan distribusi $Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$.

Dengan Teorema Gauss-Markov yakni metode kuadrat terkecil dengan meminimum-kan fungsi jumlah kuadrat galat :

$$u'u = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$
$$= Y'Y - \beta'X'Y - Y'X\beta + \beta'X'X\beta = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta,$$

terhadap parameter beta ($\beta$) akan diperoleh persamaan yang dinamakan ***persamaan normal*** :

$$X'X\beta = X'Y. \qquad (3)$$

Pada analisis regresi linier solusi persamaan normal tersebut adalah unik karena matriks (X'X) tidak singular, solusinya b (sebagai penaksir $\beta$) adalah

$$b = (X'X)^{-1}X'Y. \qquad (4)$$

Pada analisis variansi solusi persamaan normal tersebut adalah tidak unik karena matriks (X'X) singular (Draper/Smith, 1966). Hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut :

Misalkan diberikan I kelompok data. Akan membandingkan ke I kelompok tersebut dengan analisis variansi. Pengolahan data tersebut dapat didekati seperti pada analisis regresi, yakni data disusun sebagai berikut.

Kelompok

| | 1 | 2 | . | . | . | I |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_{11}$<br>$y_{12}$<br>.<br>.<br>.<br>$y_{1n1}$ | $y_{21}$<br>$y_{22}$<br>.<br>.<br>.<br>$y_{2n2}$ | .<br>.<br>.<br>.<br>.<br>. | .<br>.<br>.<br>.<br>.<br>. | .<br>.<br>.<br>.<br>.<br>. | $y_{I1}$<br>$y_{I2}$<br>.<br>.<br>.<br>$y_{Ini}$ |
| Rata-rata | $\bar{y}_1$ | $\bar{y}_2$ | | | | $\bar{y}_I$ |

Dalam hal tersebut ada I kelompok variabel yang akan dibandingkan. Jadi hipotesis yang akan diuji.

Ho : $\beta_1=\beta_2\ldots=\beta_I=0$

$H_1$ : tidak semua sama dengan nol.

Data tersebut dapat ditulis dalam bentuk model linier:

$Y_{ij} = \mu_i + \beta_i + u_{ij}$, $j=1,2,\ldots,n_i$ ; $i = 1,2,\ldots,I.$ , dimana

$Y_{ij}$ adalah pengamatan ke j dalam kelompok i. $\mu$ adalah parameter interecept, sedangkan $\beta_i$ adalah koefisien parameter yang akan ditaksir.

Dalam lambang matriks persamaan tersebut di atas dapat ditulis:

$$Y = X\beta + u, \tag{5}$$

dengan

$Y = (y_{11},\ldots y_{1n1},y_{21}\ldots,y_{2n2},\ldots y_{I1},\ldots,y_{InI})'$,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \beta_1 \\ .. \\ \beta_I \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_{11} \\ \ldots \\ u_{1n1} \\ u_{21} \\ \ldots \\ u_{2n2} \\ .. \\ u_{I1} \\ \ldots \\ u_{InI} \end{bmatrix}.$$

Jika kita perhatikan matriks regresor X terlihat bahwa menjumlahkan kolom ke 2 sampai dengan kolom ke I akan sama hasilnya dengan kolom 1. Hal ini menunjukkan bahwa matriks kolomnya saling bergantung linier. Akibatnya dengan metode kuadrat terkecil diperoleh persamaan normal (3) dimana matriks X'X adalah singular.

Agar persamaan normal mempunyai solusi yang tunggal, maka selama ini orang mema-sukkan kendala dalam sistem persamaan tersebut. Kendala yang dipilih adalah (Sembiring, 1989):

$$n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + \ldots + n_I\beta_I = 0. \quad (6)$$

Dengan metode kuadrat terkecil diperoleh pesamaan normal:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & \ldots & n_I \\ n_1 & n_1 & 0 & \ldots & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ n_I & 0 & 0 & \ldots & n_I \end{bmatrix}}_{X'X} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ .. \\ \beta_I \end{bmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} n\bar{y} \\ n_1\bar{y}_1 \\ .. \\ n_I\bar{y}_I \end{bmatrix}}_{X'Y}$$

Bentuk matriks X'X adalah singular, kemudian orang mengambil langkah memasukkan kendala (6) pada persamaan normal tersebut. Dengan demikian diperoleh solusi b (sebagai penaksir $\beta$) :

$$b_0 = \bar{y},\ b_1 = \bar{y}_1 - \bar{y}, \ldots\ b_I = \bar{y}_I - \bar{y}. \quad (7)$$

Timbul pemikiran, apabila persamaan normal (3) tersebut diteruskan dicari solusi (dengan tanpa menambah kendala), maka akan diperoleh solusi yang banyak sekali (tidak tunggal). Hal tersebut disebabkan matriks X'X adalah singular. Yang menjadi masalah dalam tulisan ini adalah bagaimana mendapatkan solusi yang tidak tunggal tersebut, apakah diantara solusi tersebut dapat dipilih salah satu general invers yang lebih baik dari pada solusi yang diperoleh dengan memasukkan kendala persamaan (6)?

## 2. MATRIKS GENERAL INVERS

Misalkan X adalah suatu matriks. Matriks X dikatakan general invers dari matriks sebarang A, jika dipenuhi persamaan AXA = A, dengan notasi ditulis $X=A^-$.

Sifat-sifat yang berlaku pada matriks general invers:

- untuk matriks tak singular, matriks $A^-$ sama dengan matriks invers.
- setiap matriks sebarang A dengan ordo mxn maka $A^-$ pasti ada.
- $(A^-)^- = A$.

Untuk memperoleh matriks general dapat ditempuh dengan cara melakukan operasi baris elementer dan operasi kolom elementer (Searle, 1971). Misalkan A matriks sebarang berordo mxn, pasti mempunyai rank r (dimana r<n<m). Maka pasti ada matriks non singular P dan Q sedemikian hingga berlaku PAQ = $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dimana P dan Q adalah hasil ganda matriks elementer. Jadi dapat diperoleh $A = P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$, dengan mengambil $X = Q\begin{bmatrix} I_r U \\ VW \end{bmatrix}P$ dengan U,V,W sebarang matriks yang sesuai. Dapat ditunjukkan berlaku AXA =A. Jadi $X = A^-$ . Dengan demikian akan diperoleh solusi yang banyak sekali dengan memilih sebarang U, V dan W.

Atau alternatif lain, dengan cara mengganti semua unsur n-r kolom dan baris dengan nol, sedang unsur yang lain diganti dengan unsur matriks invers unsur yang tidak dinolkan (Searle,1971).

Dalam hal khusus matriks X'X adalah simetris, maka matriks general invers dapat dicari sebagai berikut. Dijamin ada matriks ortogonal P sehingga berlaku: P'X'XP = $\begin{bmatrix} A_{11}A_{12} \\ A_{12}A_{22} \end{bmatrix}$ dimana $A_{11}$ matriks persegi yang mempunyai rank penuh yang sama dengan rank matriks X'X. Dengan memilih

$$G = P\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P' \tag{8}$$

sebagai matriks general invers, maka berlaku GX'XG' = G.

## 3. SOLUSI PERSAMAAN NOMAL DENGAN MEMILIH SUATU GENERAL INVERS

Perhatikan kembali persamaan normal (3) untuk model linier analisis variansi. Persamaan tersebut memiliki komponen matriks X'X yang singular. Misalkan general invers matriks tersebut adalah G, maka solusi persamaan normal tersebut adalah:

$$b = G\,X'Y, \tag{9}$$

dimana berlaku X'XGX'X = X'X.

Nilai harapan solusi tersebut adalah E(b) = GX'XE(Y) = GX'X$\beta$. Sedangkan varian untuk solusi tersebut adalah var(b) = var (GX'Y)= GX'var(Y)XG' = GX'XG' $\sigma^2$ .

Misalkan $G_1$ dan $G_2$ adalah general invers matriks X'X. Dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa solusi $b_1 = G_1X'Y$ dan $b_2 = G_2X'Y$ adalah bersifat invarian terhadap pemilihan matriks general inversnya. Artinya $Xb_1 = Xb_2$ atau $XG_1X'=XG_2X'$ (Sukestiyarno, 1990).

Untuk matriks singular X'X, dengan memilih matriks general invers

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D\{1/n_i\} \end{bmatrix} \tag{10}$$

akan diperoleh penaksir parameter b=GX'Y dengan total var(b) = $\sum_{i=1}^{I} 1/n_i$ .

Apabila kita perhatikan solusi penaksir (7) yang diperoleh dengan memasukkan kendala, yakni b = ($\bar{y}$, $\bar{y}_1$ - $\bar{y}$,… $\bar{y}_I$ - $\bar{y}$)', bila dihitung akan mempunyai total var(b)= $1/n_I$ + $\sum_{i=1}^{I} 1/n_i$ . Dalam hal ini total varian penaksir dengan pengambilan matriks general invers(10) lebih kecil dari total varians penaksir dengan memasukkan kendala. Dengan perkataan lain penaksir dengan pengambilan matriks general invers (10) lebih baik dari pada penaksir yang diperoleh dengan memasukkan kendala (3).

Untuk memperjelas permasalahan tersebut di atas diberikan contoh penggunaan sebagai berikut :

Contoh akan membandingkan suatu metode diajarkan oleh 4 orang guru. Setelah dilakukan tes diperoleh nilai sebagai berikut :

| Guru | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| Siswa 1 | 8 | 7 | 8 | 12 |
| Siswa 2 | 6 | 10 | 11 | 9 |
| Siswa 3 | 20 | 10 | 8 | 9 |
| Siswa 4 | | 11 | 7 | |

Apakah ada perbedaan dari ke 4 guru tersebut terhadap pengajarannya dilakukan uji analisis varian.

Dengan menyusun dalam bentuk matriks diperoleh:

Y = ( 8 6 10 7 10 10 … 12 9 9)'

$$X'X = \begin{bmatrix} 14 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad X'Y = \begin{bmatrix} 136 \\ 34 \\ 38 \\ 34 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Dengan memasukkan kendala $3\beta_1 + 4\beta_2 + 4\beta_3 + 3\beta_4 = 0$, diperoleh:

$b_1 = (9 \;\; -1 \;\; 0.5 \;\; -0.5 \;\; 1)'$ dengan Total varian $(b_1) = 1/14 + 1/3 + 1/4 + 1/4 + 1/3$ .

Apabila kita memilih matriks general invers:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

maka akan diperoleh $b_2 = (0 \;\; 11.33 \;\; 9.5 \;\; 8.5 \;\; 10)'$ dengan

Total varian $(b_2) = 0 + 1/3 + 1/4 + 1/4 + 1/3$.

## 4. PENUTUP

Berdasarkan informasi seperti tersebut di atas dapatlah disumpulkan bahwa permasalahan mencari solusi persamaan normal pada analisis variansi dengan cara memasukkan suatu kendala agar diperoleh solusi yang tunggal, karena dalam persamaan tersebut mengandung matriks yang singular. Dengan melanjutkan mencari mencari solusi persamaan normal yang mengandung matriks singular tersebut yakni dengan memerankan matriks general invers akan diperoleh solusi yang tak hingga jumlahnya (tidak unik). Dengan memilih matriks general invers dimana unsur-unsurnya adalah nol kecuali unsur diagonal utama mulai dari baris kedua adalah $1/n_i$ , $i=1,2,\ldots I$ dimana $n_i$ adalah banyaknya unsur tiap kelompok, akan memberikan penaksir yang lebih baik dari pada penaksir yang diperoleh dengan memasukkan kendala.

## DAFTAR PURTAKA


1. Draper N, Smith H, *Applied Regression Analyssis*, John Wiley & Sons, New York, 1966.

2. Searle SR, *Linear Models*, John Wiley & Sons, New York, 1971.

3. Sembiring K, *Analisa Regresi*, Percetakan ITB Bandung, 1989.

4. Sukestiyarno, *Penaksiran dan Uji Hipotesis pada Model Linier Rank Penuh dan Rank tak Penuh*, Thesis, ITB Bandung, 1990.