JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 5. No. 2, 47 - 56, Agustus 2002, ISSN : 1410-8518

PENGEFEKTIFAN USAHA MEDIS DALAM MEMBATASI EPIDEMI DENGAN KONTROL BANG-BANG

Heru Cahyadi dan Ponidi
Jurusan Matematika FMIPA UI

Abstrak

Dalam makalah ini akan dibahas mengenai aplikasi kontrol optimal dengan kontrol bang-bang pada efektifitas usaha medis dalam membatasi epidemi. Mula-mula dimodelkan tingkat perubahan jumlah penduduk yang terinfeksi penyakit dengan adanya usaha medis yang dilakukan yang menjadi kendala pada kontrol optimal ini, kemudian dimodelkan fungsi objektif yaitu akan diminimumkannya cost usaha medis dalam membatasi epidemi dengan batas akhir yang ditentukan. Kemudian dengan teori kontrol optimal yang menggunakan kontrol bang-bang akan dihasilkan sistem yang optimal. Dan hasilnya akan disimulasikan dengan kompute menggunakan software Mathlab.

Kata kunci : Prinsip maksimum Pontryagin, kontrol bang-bang.

1. PENDAHULUAN

Penyakit infeksi adalah suatu penyakit pada manusia atau binatang yang terjadi sebagai akibat dari suatu infeksi. Infeksi adalah masuknya suatu agen yang dapat menyebabkan infeksi ke dalam tubuh manusia atau binatang, kemudian di dalamnya agen tersebut berkembang dan memperbanyak diri. Penyakit kontagiosa adalah penyakit infeksi yang ditularkan secara kontak langsung. Epidemi atau penyakit menular adalah suatu penyakit yang disebabkan oleh suatu agen penyakit infeksi atau *toxin* dari agen tersebut, yang terjadi melalui transmisi agen atau *toxin* dari perantara (*reservoir*) tertentu kepada induk semang (*host*) yang rentan tertular penyakit (*susceptible*) baik secara langsung atau tak langsung. Jadi istilah epidemi lebih luas dari penyakit kontagiosa atau penyakit infeksi (Lapau B, 1995).

Pola penyebaran epidemi pada penduduk dipengaruhi oleh beberapa faktor. Faktor yang jelas berpengaruh dalam penyebaran epidemi antara lain yang pertama adalah musim, perbandingan daerah-daerah belahan utara dan belahan selatan juga daerah tropis berguna dalam menunjukan apakah faktor musim memegang peranan penting. Maksudnya pada hal-hal tertentu faktor musim berperan dominan dan pada hal-hal lain tak berpengaruh. Dari data yang diperoleh pada daerah yang memiliki empat musim, pada akhir musim dingin terjadi campak, hepatitis A, pada akhir musim panas terjadi polio, pada awal musim dingin terjadi influenza, pada musim semi terjadi mumps, sedangkan TBC tidak bergantung pada musim. Yang kedua adalah faktor distribusi geografis. Cara klasik untuk melihat terjadinya suatu epidemi adalah dengan memplot setiap kasus baru pada peta dari daerah yang bersangkutan. Distribusi penyakit sering menunjukan adanya konsentrasi pada daerah geografis tertentu. Misalkan polio di Chicago, 1956. Tingkat tertinggi didalam kota, sangat berhubungan dengan konsentrasi penduduk keturunan Negro. St. Louis encephalitis di Houston, 1964. Tingkat tertinggi di dalam kota, tak memandang ras, kasus terbanyak disepanjang sungai yang melalui kota. Sedangkan Hepatitis A di Alabama, 1955. Konsentrasi dekat pelabuhan, di daerah motel dan restoran (Coggon D, 1996).

Salah satu masalah yang muncul dari fenomena di atas adalah bagaimana cara membatasi penyakit menular yang efektif dapat dilakukan. Sampai saat ini ada dua cara yang sering dilakukan, yang pertama pengurangan kontak antara kasus yang *infectious* dan susceptible misalnya dengan karantina. Cara ini adalah suatu cara yang sangat efektif, akan tetapi sangat sulit diterapkan dalam kehidupan sekarang ini. Oleh karena itu cara tersebut tidak menjadi perhatian dalam makalah ini. Sedangkan yang kedua adalah pengurangan susceptible. Pendekatan seperti ini dapat dilakukan dengan usaha-usaha medis. Masalahnya adalah seringkali usaha medis yang dilakukan tidak optimal sehingga justru menimbulkan cost yang cukup besar dibandingkan dengan keefektifan usaha tersebut dalam membatasi epidemi. Selanjutnya dalam makalah ini akan dijelaskan suatu model matematis dari optimisasi usaha medis dalam membatasi epidemi ini.

2. PROSES PEMODELAN

Dalam membatasi epidemi, salah satu masalah yang dihadapi oleh tenaga medis adalah seringkali usaha medis yang dilakukan untuk membatasi epidemi tersebut kurang efektif, sehingga justru cost yang dikeluarkan dari usaha medis ini sangat besar jika dibandingkan dengan keberhasilan dalam pembatasan epidemi tersebut. Sehingga cost dari usaha medis dan dari akibat mewabahnya epidemi tersebut perlu diminimumkan, dan hal inilah yang akan dijadikan fungsi objektif dari permasalahan di atas. Sedangkan yang menjadi kendala dari masalah ini adalah perlu diperhatikannya jumlah total penduduk dan usaha medis maksimum yang dapat dilakukan, juga jumlah orang yang terinfeksi suatu penyakit pada awal dan akhir waktu yang sudah ditentukan sehingga diperoleh model perubahan jumlah orang yang terjangkit penyakit epidemi.

Misalkan pada saat t jumlah orang yang terinfeksi suatu penyakit adalah x(t). Asumsikan bahwa sebelumnya tidak ada vaksinasi. Laju pertumbuhan dari jumlah orang yang terinfeksi suatu penyakit adalah $\dot{x}(t)$, dimana $\dot{x}(t)$ proporsional terhadap x(t) saat x(t) kecil dan positif, tetapi $\dot{x}(t)$ akan menurun jika x(t) sangat besar, ini disebabkan jumlah orang yang terinfeksi akan semakin sedikit karena batas maksimum dari jumlah penduduk pada daerah yang terkena epidemi, sehingga didapat model matematika persamaan logistik sebagai berikut,

$$\dot{x}(t) = bx(t)[N - x(t)] \qquad \ldots(2.1)$$

dengan b suatu konstanta dan N jumlah total maksimum penduduk yang mungkin pada daerah yang terkena epidemi.

Persamaan diferensial (2.1) di atas merupakan suatu persamaan yang menunjukan bahwa laju infeksi sebelum adanya usaha medis yang dilakukan untuk membatasi epidemi. Selanjutnya jika dilakukan usaha medis u(t), maka usaha ini akan mengurangi laju yang terkena infeksi sebesar u(t)x(t). Disini u(t) (terletak $0 < u(t) < U$) adalah suatu ukuran dari usaha medis (dengan batas atasnya U) dan laju dari usaha medis yang dilakukan proporsional dari banyaknya orang yang terinfeksi penyakit. Dengan memperhatikan persamaan logistik dan usaha medis ini didapat

$\dot{x}$ (t) = bx(t)[N-x(t)] – x(t)u(t) …(2.2)

dengan $x(0) = x_0, x(T) = x_T$, $0 \le x(t) \le N$, $0 \le u(t) \le U$, $\forall$ t

Selanjutnya persamaan (2.2) digunakan sebagai kendala dari model kontrol optimal yang dibahas. Sedangkan fungsi objektif dari masalah ini adalah akan diminimumkannya cost dari usaha medis yang dilakukan akibat adanya epidemi. Misalkan x(t) menunjukan jumlah orang yang terkena infeksi pada waktu t, dari keseluruhan penduduk sebanyak N, dan u(t) menunjukan intensitas usaha medis yang dilakukan pada waktu t. Dalam pembentukan fungsi objektif persamaan x(t) dan u(t) masing-masing perlu dikalikan dengan suatu parameter, misalkan k dan K. Parameter k dan K secara berturut menunjukan suatu unit biaya yang digunakan untuk usaha medis dan dampak dari jumlah orang yang terinfeksi akibat epidemi.

$$\underset{u}{Min}\, J(u) = \int_0^T e^{-\delta t} \,[ku(t) + Kx(t)]\, dt \qquad \text{…(2.3)}$$

Dari kedua proses pemodelan di atas, didapat model kontrol optimal masalah pembatasan epidemi

$$\underset{u}{Min}\, J = \int_0^T e^{-\delta t} \,[ku(t) + Kx(t)]\, dt \qquad \text{…(2.4)}$$

dengan kendala

$\dot{x}$ (t)= bx(t)[N – x(t)] – x(t)u(t) ; $x(0) = x_0, x(T) = x_T$,

$0 \le x(t) \le N$, $0 \le u(t) \le U$, $\forall$ t

Di sini u(t) adalah fungsi kontrol dan x(t) adalah fungsi keadaan.

3. PENYELESAIAN

Pada bagian ini akan dicari fungsi kontrol $\hat{u}$, yang merupakan penyelesaian dari (2.4). Perhatikan bahwa model epidemi ini fungsi kontrolnya linear pada fungsi objektif dan kendalanya dibatasi pada $0 \le u(t) \le U$. Menurut prinsip maksimum Pontryagin bahwa Hamiltonian akan minimal tergantung dari fungsi kontrolnya. Karena dalam masalah ini Hamiltonian memiliki fungsi kontrol yang linear dengan $0 \le u(t) \le U$ maka fungsi kontrolnya adalah 0 atau U, kecuali jika koefisien u(t) pada Hamiltonian adalah nol dimana untuk kasus ini nilai fungsi kontolnya terletak antara 0 dan U. Kasus yang pertama ini disebut kontrol bang-bang (fungsi kontrol melompat antara 0 dan U), dan kasus yang kedua disebut kondisi singular.

Pada model epidemi ini mula-mula optimalisasi terjadi pada interval bang-bang, kemudian suatu kondisi singular, selanjutnya interval bang-bang yang lain (yang akan mencapai syarat $x(T) = x_T$). Untuk lebih jelasnya perhatikan proses penyelesaian berikut ini. Dari prinsip maksimum Pontryagin didapat bahwa Hamiltonian dari masalah (2.4) adalah

$$H = e^{-\delta t}\,[ku(t) + Kx(t)] + p_1(t)\{bx(t)[N - x(t)] - u(t)x(t)\} \qquad \text{…(3.1)}$$

Untuk mencari u sehingga meminimalkan fungsi objektif (2.4), berdasarkan prinsip maksimum Pontryagin, didapat:

$$H[\hat{x}(t),\hat{u}(t),t,p(t)] \le H[\hat{x}(t),u(t),t,p(t)]; \qquad \forall\, u(t)\in U \qquad \text{…(3.2)}$$

atau

$$e^{-\delta t}\,[k\hat{u}(t) + K\hat{x}(t)] + p_1(t)\{b\hat{x}(t)\,[N - \hat{x}(t)] - \hat{u}(t)\,\hat{x}(t)\} \le$$
$$e^{-\delta t}\,[ku(t) + K\hat{x}(t)] + p_1(t)\{b\hat{x}(t)\,[N - \hat{x}(t)] - u(t)\,\hat{x}(t)\} \qquad \text{…(3.3)}$$

Dengan hanya memperhatikan suku-suku pada persamaan (3. 3) yang mengandung u(t) maka masalah yang bersesuaian dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\min_u\; e^{-\delta t}ku(t) - p_1(t)\,x(t)u(t);\; 0 \le u(t) \le U\,;\, \forall\, t \in [0,T] \qquad \text{…(3.4)}$$

Untuk memudahkan penyelesaian definisikan $\mu(t) = e^{\delta t} p_1(t)$. Dan karena faktor $e^{\delta t}$ selalu positif, maka masalah yang bersesuaian menjadi

$$\min_u\; [k - \mu(t)\,x(t)]u(t);\; 0 \le u(t) \le U \qquad \text{…(3.5)}$$

Dan persamaan diferensial adjointnya adalah

$$-\dot{p}_1(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = Ke^{-\delta t} + p_1(t)\,\{bN - 2bx(t) - u(t)\} \qquad \text{…(3.6)}$$

atau

$$\dot{p}_1(t) + \{bN - 2bx(t) - u(t)\}\,p_1(t) = -K\,e^{-\delta t} \qquad \text{…(3.7)}$$

Jika persamaan (3.6) dikalikan dengan $e^{\delta t}$ maka didapat

$$e^{\delta t}\,\dot{p}_1(t) + \{bN - 2bx(t) - u(t)\}\,e^{\delta t}\,p_1(t) = -K \qquad \ldots(3.8)$$

dan persamaan (3. 8) dapat juga ditulis sebagai

$$e^{\delta t}\,\dot{p}_1(t) + \delta\,e^{\delta t}\,p_1(t) + \{-\delta + bN - 2bx(t) - u(t)\}e^{\delta t}\,p_1(t) = -K \quad \ldots(3.9)$$

Karena $\dot{\mu}(t) = e^{-\delta t}[\dot{p}_1(t) + \delta p_1(t)]$ maka persamaan diferensial adjointnya menjadi

$$\dot{\mu}(t) + \{-\delta + bN - 2bx(t) - u(t)\}\,\mu(t) = -K \qquad \ldots(3.10)$$

Dari persamaan (3.5) masalah yang bersesuaian diperoleh dengan kontrol bang-bang

$\hat{u}$ (t) = 0 ; jika $\mu(t)$ x(t) < k

$\hat{u}$ (t) = U; jika $\mu(t)$ x(t) > k

Jika x(t) menyentuh batas, di 0 atau N, maka u(t) harus dimodifikasi agar x(t) tidak melewati batas.

Tinjau persamaan diferensial yang diberikan pada (2.1) untuk x(t), untuk u(t) = 0 pada suatu interval waktu t, dan untuk u(t) = U pada suatu interval waktu t yang lain.

Jika u(t) = 0 maka dari persamaan (2.2) didapat

$\dot{x}$ (t)= bx(t)[N – x(t)]

sehingga diperoleh

$\hat{x}$ (t) = N/(1 + αe^{-Nbt}), dimana α adalah suatu konstanta integrasi.

Jika u(t) = U maka dari persamaan (2.2) di dapat

$\dot{x}$ (t) = (bN – U)x(t) – b(x(t))^2

Pertama tinjau jika b < U/N, maka

$\dot{x}$ (t) = -b(gx(t) + (x(t))^2); dengan g = (U/b) – N > 0.

Sehingga diperoleh

$\hat{x}$ (t) = g/($\beta e^{gbt} - 1$) , dimana β adalah suatu konstanta integrasi.

Kedua, tinjau jika b > U/N, maka

$\dot{x}$ (t) = -bx(t)(-h + x(t)); dengan h = -(U/b) + N > 0.

Sehingga diperoleh

$\hat{x}$ (t) = h/(1 - γe^{-hbt}); dimana γ adalah suatu konstanta integrasi.

Optimalisasi usaha medis di atas merupakan kontrol bang-bang kecuali bagi kondisi singular pada suatu T* dimana u(t) diatur (dalam (0,U)) untuk memenuhi syarat akhir $x(T) = x_T$.

Bagaimana jika $\mu(t)\,x(t) = k$? Ketika interval t = T^*, pertimbangkan sebuah solusi kondisi singular yang mungkin, dimana $x(t) \equiv x^*$, $\mu(t) \equiv \mu^*$, dengan $x^* \mu^* =$ k dan $u(t) \equiv u^*$. Solusi ini menunjukan suatu kondisi singular, selama turunan terhadap waktu $\dot{x}(t) \equiv 0$ dan $\dot{\mu}(t) \equiv 0$. Karena turunannya nol, dari persamaan (3.10) dan (2.2) di dapat

$$(-\delta + bN - bx^* - u^*)\mu^* = -K \quad \text{dan} \quad 0 = bx^*[N - x^*] - u^* x^*$$

$$-\delta + bN - bx^* - u^* = -K/\mu^* = -Kx^*/k \quad \text{dan} \quad 0 = bN - u^* - bx^*$$

Dari dua persamaan tersebut diperoleh

$$x^* = \delta k/(K - bk) \quad \text{dan} \quad u^* = b(N - x^*)$$

(Dalam solusi kondisi singular ini, jika $x^* > N$ maka x^* mesti diganti dengan N dan u^* dengan 0 untuk memenuhi kendalanya).

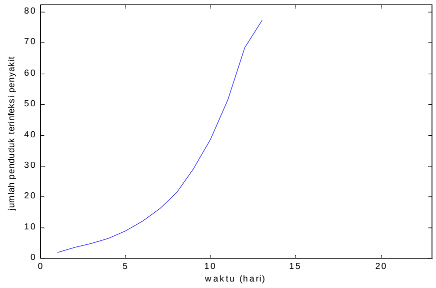
Dari penyelesaian masalah di atas didapat solusi optimal sebagai berikut :

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} N/[1+\alpha e^{-Nbt}] & \text{untuk } \hat{u}(t) = 0 \\ \delta k/(K - bk) & \text{untuk } \hat{u}(t) = b(N - x^*) \\ g/[\beta e^{gbt} - 1] & \text{untuk } \hat{u}(t) = U \text{ dan } b<U/N \\ h/[1-\gamma e^{-hbt}] & \text{untuk } \hat{u}(t) = U \text{ dan } b<U/N \end{cases}$$

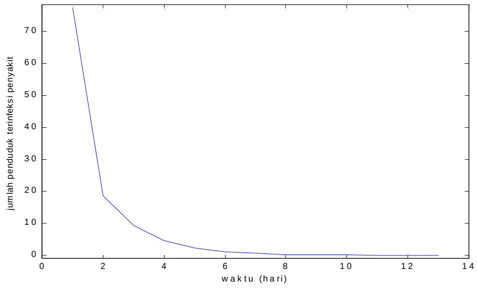
4. SIMULASI KOMPUTER

Pada bagian ini akan diberikan simulasi komputer masalah pengefektifan usaha medis dalam membatasi epidemi dengan kontrol bang-bang, untuk nilai-nilai parameter berbeda dengan Mathlab.

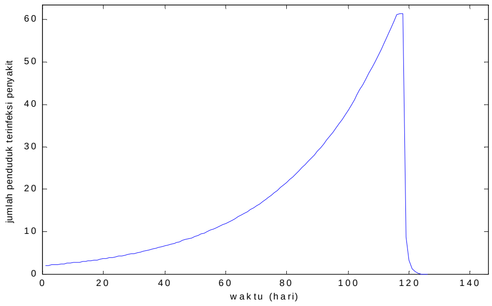
Gambar 4.1 a,b,c berikut adalah simulasi yang dilakukan untuk parameter δ = 0.08, k = 0.003, K = 0.000004, N = 1000, $\mathbf{x_0 = 2, b = 0.00003}$ dan U = 1. Diperoleh panjang interval t = 116 untuk $\hat{u} = 0$ dan kondisi singular pada t = 117 dengan $\hat{u}$ (117) = 0.028 dan $\hat{x}$ (117) = 61.38 sedangkan untuk $\hat{u}$ =1 dengan panjang interval t = 8.



Gb. 4.1.a Grafik x sebelum pengobatan

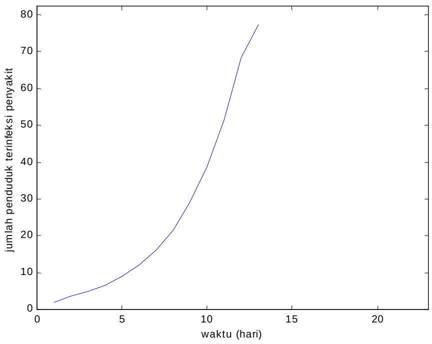


Gb. 4.1.b Grafik x setelah pengobatan

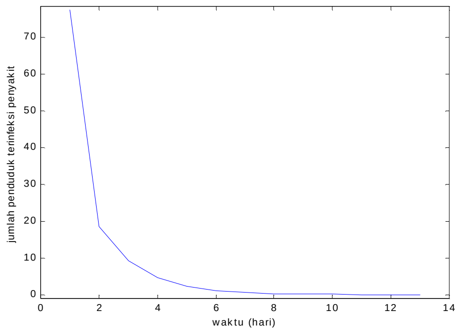


Gb. 4.1.c. Grafik x sebelum dan setelah pengobatan

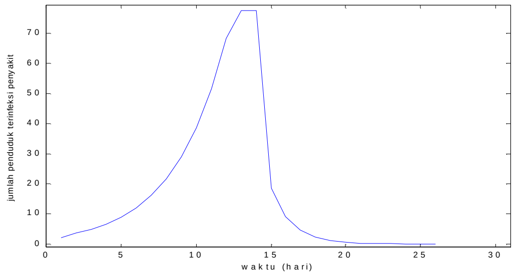
Selanjutnya gambar 4.2 a,b,c berikut adalah simulasi yang dilakukan untuk parameter δ = 0.08, k = 0.003, K = 0.000004, N = 1000, **x_0 = 2, b = 0.0003** dan U = 1. Di sini berarti nilai parameter b dinaikan sebanyak $1x10^1$ dibandingkan pada simulasi Gambar 4.1a,b,c. Dengan menaikan nilai b berarti laju penyebaran epidemi atau orang yang terinfeksi penyakit lebib cepat. Diperoleh panjang interval t = 12 untuk $\hat{u} = 0$ dan kondisi singular pada t = 13 dengan $\hat{u}$ (13) = 0.276 dan $\hat{x}$ (13) = 77.42 sedangkan untuk $\hat{u}$ =1 dengan panjang interval t = 12.



Gb. 4.2 a Grafik x sebelum pengobatan

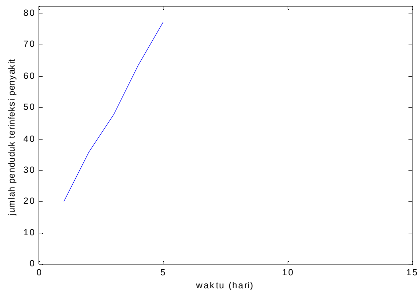


GB 4.2.b Grafik x setelah pengobatan

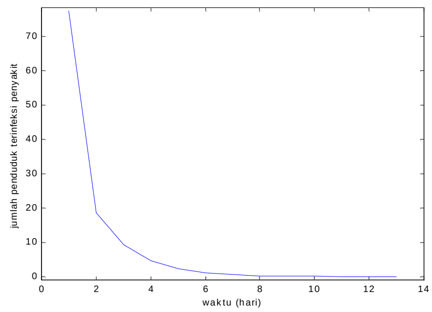


Gb. 4.2.c Grafik x sebelum dan setelah pengobatan

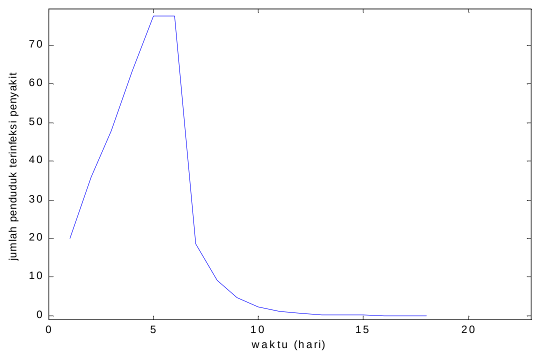
Sedangkan gambar 4.3 a,b,c berikut adalah simulasi yang dilakukan untuk parameter δ = 0.08, k = 0.003, K = 0.000004, N = 1000, $\mathbf{x_0 = 20}$, **b = 0.00003** dan U = 1. Di sini berarti nilai parameter x_0 dinaikan sebanyak $1\text{x}10^1$ dibandingkan pada simulasi Gambar 4.1a,b,c. Dengan menaikan nilai x_0 berarti jumlah orang yang terinfeksi penyakit lebih besar dibandingkan pada simulasi Gambar 4.1a,b,c Diperoleh panjang interval t = 38 untuk $\hat{u} = 0$ dan kondisi singular pada t = 39 dengan $\hat{u}$ (39) = 0.028 dan $\hat{x}(39)$ = 61.38 sedangkan untuk $\hat{u}$ =1 dengan panjang interval t = 8.



Gb. 4.3 a Grafik x sebelum pengobatan



Gb. 4.3 b Grafik x setelah pengobatan



Gb. 4.3.c Grafik x sebelum dan setelah pengobatan

5. KESIMPULAN

Lama waktu pengobatan dipengaruhi oleh cepat lambatnya laju penyebaran epidemi. Semakin cepat laju penyebarannya maka waktu pengobatan yang dibutuhkan untuk mencapai syarat akhir semakin lama. Sedangkan besar kecilnya jumlah orang yang terinfeksi awal pada laju penyebaran yang sama tidak mempengaruhi waktu pengobatan yang dibutuhkan untuk mencapai syarat akhir.

DAFTAR PUSTAKA

1. Barrow, David & friends, *Solving Differential Equetions with Maple V*, Texas A & M University, 1998.

2. Coggon, D, Geoffrey, Rose, Barker, D.J.P, *Epidemiologi bagi Pemula; alih bahasa*, Ali Ghufron, EGC, Jakarta, 1996.

3. Craven, B.D, *Control and Optimization*, Chapman and Hall, London, 1995.

4. Kusumarupi, Rini & Ponidi, *Pengoptimalan Kemoterapi Pada suatu Model HIV*, FMIPA UI, Depok, 2000.

5. Lapau Buchari, *Aspek Biologis dari Penyakit Infeksi*, FKM UI, Depok, 1995.

6. Takayama, *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, NY, 1997.