JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 5. No. 2, 57 - 64, Agustus 2002, ISSN : 1410-8518

FORMULASI VARIASIONAL DAN PENYELESAIAN DARI MASALAH SYARAT BATAS DARI PERSAMAAN ORDER DUA

Sutrima
Jurusan Matematika FMIPA UNS

Abstract

The purpose of this research is to investigate solutions of boundary value problems of second-roder differential operator by variational methods. Using variational formulation of the problems, existence of solutions of boundary value problems of second-order differential operator can be obtained.

Key words : Boundary problems, differential operator, variational methods.

1. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan-permasalahan praktis dalam kehidupan nyata yang dapat diformulasikan ke dalam model matematika, khususnya Persamaan Diferensial (*PD*). Misalnya masalah yang dapat dimodelkan menjadi *PD*

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+q\,u=f, \qquad 0<x<L \tag{1}$$

dengan p fungi yang mempunyai turunan kontinu, q fungsi kontinu, dan f fungsi yang diketahui. Misalkan dari masalah (1) dilengkapi masalah syarat batas Dirichlet $u(0)=0$ dan $u(L)=0$.

Metode variasional merupakan salah satu metode yang efektif dalam analisis fungsional untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operator positif pada ruang Hilbert. Metode variasional ini didasarkan kepada minimisasi dari fungsional kuadratik terkait dari masalah yang diberikan.

Perhatikan masalah kontinu

$$Au=f \text{ pada } \Omega \tag{2}$$

dengan A operator diferensial linear pada D_A dalam ruang Hilbert H.

Dalam penerapannya metode variasional lebih mudah diterapkan pada persamaan (1) dengan A operator yang simetris. Operator A pada domain D_A

dikatakan simetris jika $\langle Au,v\rangle = \langle u, Av\rangle$ untuk semua $u,v \in D_A$. Sedangkan operator A dikatakan positif pada D_A, jika $\langle Au,u\rangle \geq 0$, dan $\langle Au,u\rangle = 0$ jika dan hanya jika $u = \mathbf{0}$. Operator A dikatakan definit positif pada D_A jika dapat dicari suatu konstanta $\alpha > 0$ sehingga $\langle Au,u\rangle \geq \alpha \|u\|^2$. Terakhir, operator A pada suatu ruang bernorma dikatakan terbatas jika dapat dicari konstanta $\alpha > 0$ sehingga $\|Au\| \leq \alpha \|u\|$, untuk setiap *u*.

Jika A operator linear positif pada ruang Hilbert H maka dari (1) dapat dibentuk suatu fungsional kuadratik

$$\begin{aligned} J(u) &= \langle Au,u\rangle - 2\langle f,u\rangle \\ &= B(u,u) - 2\langle f,u\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

dengan $B : \mathsf{H} \times \mathsf{H} \to \mathsf{R}$ fungsi bilinear yang simetris. Vektor *u* meminimumkan fungsional kuadratik (2) jika dan hanya jika *u* memenuhi persamaan

$$\langle Au,v\rangle = \langle f,v\rangle \text{ untuk setiap } v \in \mathsf{H}$$

atau dapat ditulis dengan

$$B(u,v) = \langle f,v \rangle_{\mathsf{H}} \text{ untuk setiap } v \in \mathsf{H} \tag{4}$$

Bader [2001]. Bentuk terakhir inilah yang sering disebut sebagai *formulasi variasional* dari masalah (1). Dengan ide formula ini akan ditentukan penyelesaian masalah syarat batas (1).

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan mendefinisikan operator $A \equiv -\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q$, maka masalah (1) dapat dipandang sebagai masalah kontinu (2). Dalam hal ini diambil pada $\Omega = (0,L)$ dan $f \in \mathsf{H} = L_2(\Omega)$ dengan hasilkali dalam pada H didefinisikan sebagai

$$\langle u,v\rangle = \int_0^L uv\, dx$$

untuk setiap $u,v \in \mathsf{H}$. Untuk operator *A* di atas, $A : D_A \subseteq \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ dengan

$$D_A = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) \; ; u(0) = u(L) = 0 \right\}.$$

Sedangkan ruang energi yang bersesuaian dengan D_A adalah

$$\mathcal{H}_A = \left\{ u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \; ; u(0) = u(L) = 0 \right\} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$$

Akan dibuktikan operator ini adalah operator linear simetri dan definit positif pada D_A.

Lemma 1.

Operator diferensial A adalah operator linear, simetri dan positif pada D_A.

Bukti. Ambil sebarang $u, v \in D_A$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha u + \beta v) = \int_0^L (-\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}(\alpha u + \beta v)\right) + q(\alpha u + \beta v))\; dx$$

$$= \alpha \int_0^L (-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu)\; dx + \beta \int_0^L (-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu)\; dx$$

$$= \alpha(Au) + \beta(Av).$$

Hal ini menyatakan bahwa operator *A* linear.

Untuk sebarang $u, v \in D_A$, dengan integral parsial dan penerapan syarat batas diperoleh

$$< Au, v > = \int_0^L (-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu)v\; dx$$

$$= \int_0^L \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv\right) dx.$$

Sedangkan

$$< u, Av > = \int_0^L u(-\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + qv)\; dx$$

$$= \int_0^L \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv\right) dx.$$

Dengan demikian operator A simetri.

Selanjutnya,

$$< Au,u > = \int_0^L [-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + q\,u]u\,dx$$
$$= \int_0^L (p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q\,u^2\,)dx - \left[u\left(p\frac{du}{dx}\right)\right]_0^L$$
$$= \int_0^L (p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q\,u^2\,)dx.$$

Karena $p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q\,u^2 \geq 0$, maka berlaku $< Au,u > = \int_0^L (p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q\,u^2\,)dx \geq 0$.

Lebih lanjut, karena $p \neq \mathbf{0}$, maka $< Au,u > = 0$ jika dan hanya jika $u = \mathbf{0}$. Oleh karena itu operator A positif pada D_A.

Fungsional kuadratik $J(u)$ yang bersesuaian dengan (3) pada D_A yang berkaitan dengan masalah syarat batas adalah

$$J(u) = < Au,u > -2 < f,u >$$
$$= \int_0^L \left(p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + qu^2 - 2\,fu \right) dx \tag{5}$$

untuk semua $u \in D_A$. Sehingga dengan prinsip minimisasi fungsional kudratik untuk masalah variasional dapat ditentukan eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari masalah (1).

Teorema 2.

Fungsional kuadratik (5) mencapai minimum di $u_0 \in D_A$ jika dan hanya jika u_0 penyelesaian dari (1).

Bukti. ($\Leftarrow$) Misalkan u_0 penyelesaian dari (1) dalam D_A. Dengan men-subtitusikan $f = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du_0}{dx}\right) + qu_0$ ke dalam (5) diperoleh

$$J(u) = \int_0^L \left(p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + qu^2 + 2u\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{du_0}{dx}\right) + qu_0\right)\right) dx$$
$$= \int_0^L \left(p\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 2\,\frac{du_0}{dx}\frac{du}{dx}\right) + q(u^2 + 2u_0u)\right) dx$$

$$\le \int_0^L p\left(\frac{du}{dx}-\frac{du_0}{dx}\right)^2 dx + \int_0^L q(u^2+2u_0u)\, dx .$$

Dari kondisi terakhir terlihat bahwa $J(u)$ akan mencapai minimum pada D_A jika dan hanya jika $\frac{du}{dx}-\frac{du_0}{dx}=\mathbf{0}$ di dalam D_A. Karena u dan u_0 memenuhi syarat batas yang ditentukan, maka $u-u_0 \in D_A$. Dengan kata lain $J(u)$ mencapai minimum di $u=u_0$.

($\Rightarrow$) Sebaliknya, misalkan $J(u)$ mencapai minimum di $u_0 \in D_A$. Ambil sebarang $v \in D_A$ dan bilangan real α. Sehingga dengan kondisi minimum diperoleh

$$0 = \frac{d}{d\alpha} J(u_0+\alpha v)\bigg|_{\alpha=0}$$

$$= \Bigg[\frac{d}{d\alpha}\Bigg\{ \int_0^L \left(p(\frac{du_0}{dx})^2 + qu_0^2 - 2\,fu_0 \right) dx + 2\alpha \int_0^L \left(p\frac{du_0}{dx}\frac{dv}{dx} + (qu_0-f)v \right) dx$$

$$+\alpha^2 \int_0^L \left(p(\frac{dv}{dx})^2 + qv^2 \right) dx \Bigg\} \Bigg]_{\alpha=0}$$

$$= 2\int_0^L \left(p\frac{du_0}{dx}\frac{dv}{dx} + (qu_0-f)v \right) dx$$

$$= 2\int_0^L \left(-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du_0}{dx} \right) + qu_0 - f \right) v\, dx$$

$$= 2 < Au_0 - f, v > .$$

Karena berlaku untuk setiap $v \in D_A$, maka menurut Lemma 3.2 [Reddy, 1986] $Au_0 - f = 0$ atau $Au_0 = f$. Dengan kata lain u_0 adalah penyelesaian dari (1).

Sejalan dengan Teorema 4.5[Rddy, 1986], maka Teorema 2 dapat diperluas untuk domain D_A menjadi ruang energi ☞ $_A$. Dengan demikian untuk data $f \in$ ☞ yang diskontinu maka eksistensi penyelesaian dari masalah (1) terjamin ada di dalam $\mathcal{H}_A$. Eksistensi penyelesaian u_0 dari fungsional $J(u)$ pada $\mathcal{H}_A$ adalah tunggal. Hal ini dijamin oleh Teorema 4.1, [Reddy, 1984].

Selanjutnya akan dibahas tentang eksistensi penyelesaian dari masalah nilai eigen

$$Au - \lambda u = f\,, \tag{6}$$

dengan *w* fungsi nonnegatif kontinu pada Ω. Dalam kasus ini diambil syarat batas Dirichlet seperti syarat batas untuk (1).

Perhatikan kembali formulasi variasional dari masalah (1),

$$B(v,u) = < v, f > \text{ untuk semua } v \in \mathcal{H}_A. \tag{7}$$

dengan $B(v,u) = \int (p \frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} + qvu)\, dx$. Dalam hal ini jelas bahwa $\mathcal{H}_A$ adalah ruang bagian dari $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Karena *p* fungsi positif, maka untuk sebarang $u \in \mathcal{H}_A$,

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_0^L \left(p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + qu^2 \right) dx \\ &\geq c \int_0^L u^2\, dx = c\|u\|^2, \end{aligned}$$

dengan *c* batas bawah dari *q* pada $\Omega = (0, L)$. Hal ini mengatakan bahwa bentuk bilinear $B(v,u)$ adalah eliptik-$\mathcal{H}_A$. Akibatnya dengan Teorema 5.6 (Reddy, 1986), masalah variasional (7) mempunyai penyelesaian tunggal *u* dan terdapat konstanta $k > 0$ yang tidak bergantung kepada *u* dan $f \in \mathcal{H}$ sehingga

$$\|u\|_A \leq k\|f\|. \tag{8}$$

Dengan demikian untuk setiap $f \in \mathcal{H}$ berkorespondensi dengan satu penyelesaian variasional $u \in \mathcal{H}_A$. Oleh karena itu dapat didefinisikan operator linear ter-batas $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_A$ sehingga

$$u = Tf\,. \tag{9}$$

Dengan menggunakan (7) dan (8) diperoleh

$$B(v,Tf) = < v, f > \text{ untuk semua } f \in \mathcal{H} \text{ dan } v \in \mathcal{H}_A$$

$$\|Tf\| \leq k\|f\|. \tag{10}$$

Selanjutnya akan dibahas sifat dari T apabila $T : \mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_A$. Masalah variasional berkaitan dengan (6) adalah mencari $u \in \mathcal{H}_A$ sehingga

$$B(v,u) - \lambda < v,u > = < v, f >. \tag{11}$$

untuk setiap $v \in \mathcal{H}_A$. Dalam hal ini $B(v,u)$ simetri dan dan eliptik-$\mathcal{H}_A$. Masalah nilai eigen dari bentuk bilinear $B(v,u)$ adalah mencari bilangan $\lambda \neq 0$ dan fungsi tak nol $u \in \mathcal{H}_A$ sehingga

$$B(v,u) - \lambda < v,u > = 0, \tag{12}$$

unutuk setiap $v \in \mathcal{H}_A$.

Teorema 3.

Fungsi $u \in \mathcal{H}_A$ *adalah penyelesaian variasional dari masalah (11) jika dan hanya jika*

$$u - \lambda Tu = Tf .$$

Bilangan λ *adalah nilai eigen dari bentuk bilinear* $B(v,u)$ *dan fungsi* $u \neq 0$ *adalah fungsi eigen yang bersesuaian jika dan hanya jika*

$$u - \lambda Tu = 0$$

dipenuhi dalam $\mathcal{H}_A$.

Bukti.

Jika u adalah penyelesaian variasional dari masalah (11), maka

$$B(v,u) = < v, f + \lambda u > .$$

Dengan definisi dari operator T [lihat (7) dan (9)] diperoleh

$$u = T(f + \lambda u) \quad \text{atau} \quad u - \lambda Tu = Tf .$$

Untuk sebaliknya jelas.

Jika masalah (12) mempunyai penyelesaian non trivial, maka berlaku

$$B(v,u) = \langle v, \lambda u \rangle \; .$$

Dari definisi operator T dipenuhi

$$u = T(\lambda u) = \lambda T u \, .$$

Sebaliknya, jika kesamaan terakhir dipenuhi, maka masalah (2) mempunyai penyelesaian non trivial.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari yang telah diuraikan bahwa eksistensi penyelesaian masalah syarat batas (1) dan masalah nilai eigen (6) dapat ditentukan dengan metode variasional.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Artikel ini adalah sebagain dari hasil penelitian hibah dari Proyek DUE UNS Tahun 2001. Untuk itu peneliti mengucapkan terima kasih kepada Proyek DUE UNS atas dana yang dipercayakan kepada peneliti.

DAFTAR PUSTAKA

1. Bader, Mathias, *Energy Minimization Methods for Feature Displacements in Map Generalization,* Dissertation zur Erlanggung der naturwissenschaftlichen Doktorwurde vorgelegtde Mathemathisch-naturwissenschaftlichen Fakultat der Universitat Zurich, Zurich, 2001

2. Reddy J. N, *An Introduction to The Finite Element Method,* McGraw-Hill Inc, New York, 1984.

3. Reddy J. N, *Applied Functional Analysis and Variational Method in Engineering,* McGraw-Hill Inc, Singapore, 1986.