

**EFISIENSI PENGGUNAAN V-CYCLE DALAM METODE FUNGSI  
WALSH UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN INTEGRAL  
FREDHOLM LINEAR**

Purnami Widyaningsih  
Jurusan Matematika FMIPA UNS

**Abstract**

Uljanov and Blyth have developed a new numerical method for the solution of linear Fredholm integral equations using Walsh functions. The approximate solution is constructed by rewriting the functions as truncated (to  $m$  terms) Walsh series and the kernel as truncated double Walsh series. For the equations, this method gives linear systems. The systems then solved using Gauss elimination. In order to improve the efficiency, the idea of multigrid, especially v-cycle, is proposed to solve the linear systems. Here, numerical experiment with standard test problems for numerical solution of linear Fredholm integral equations show that this approach is effective in improving the efficiency of the Walsh function method.

*Key words* : Walsh functions, integral equations, multigrid.

**1. PERSAMAAN INTEGRAL FREDHOLM LINEAR**

Persamaan integral banyak muncul dalam bidang mekanika, fisika, matematika, dan bidang lainnya. Dengan memanfaatkan syarat batasnya, persamaan diferensial dapat juga disajikan sebagai persamaan integral. Dalam tulisan ini hanya diperhatikan persamaan integral Fredholm linear tipe dua yang mempunyai bentuk umum

$$y(x) = g(x) + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt \quad (1.1)$$

dengan fungsi  $g(x)$  dan kernel  $K(x,t)$  diketahui sedang  $y(x)$  adalah fungsi yang akan ditentukan.

## 2. METODE FUNGSI WALSH

Suatu algoritma baru (yang kemudian disebut metode fungsi Walsh) untuk menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear dan nonlinear dikembangkan oleh Uljanov dan Blyth [2, 15]. Dalam metode fungsi Walsh untuk persamaan integral Fredholm linear tipe dua (1.1), Uljanov dan Blyth mengekspansikan fungsi yang ada sebagai deret fungsi Walsh berhingga dan kernelnya didekati dengan deret fungsi Walsh rangkap berhingga, yaitu (setelah digunakan konvensi penjumlahan Einstein)

$$y(x) \approx c_i W_i(x), \quad g(x) \approx g_i W_i(x), \quad \text{dan} \quad K(x, t) \approx a_{ij} W_i(x) W_j(t) \quad (2.1)$$

dengan

$$c_i = \int_0^1 y(x) W_i(x) dx \quad \text{dan} \quad a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K(x, t) W_i(x) W_j(t) dt dx,$$

$i, j = 0, 1, \dots, m-1, m = 2^n, n \in \mathbb{N}$ . Dengan (2.1), Uljanov dan Blyth menunjukkan persamaan (1.1) dapat disajikan sebagai sistem persamaan linear

$$\mathbf{c} = \mathbf{g} + A\mathbf{c} \quad \text{dengan} \quad \mathbf{c} = (c_i), \quad \mathbf{g} = (g_i), \quad \text{dan} \quad A = (a_{ij}). \quad (2.2)$$

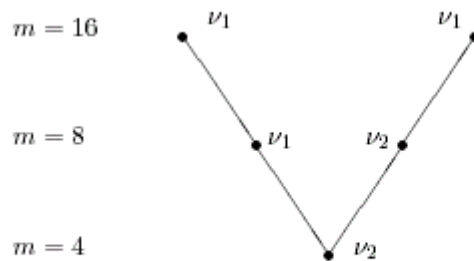
Ini berarti bahwa menyelesaikan persamaan integral (1.1) dengan metode fungsi Walsh adalah ekuivalen dengan menyelesaikan sistem persamaan linear (2.2). Terhadap sistem linear ini, selanjutnya Uljanov dan Blyth menyelesaikannya dengan eliminasi Gauss. Eksperimen numerik menunjukkan bahwa metode fungsi Walsh yang diterapkan pada persamaan integral Fredholm adalah konvergen secara kuadratik [2, 14, 15, 16, 17], sesuai dengan metode yang dikembangkan oleh Blyth dan Sloss untuk penyelesaian persamaan diferensial dan persamaan integral Volterra [1, 9, 10, 11, 12, 13].

## 3. V-CYCLE

Untuk menyelesaikan sistem (2.2) dapat juga digunakan teknik iterasi. Untuk  $m$  cukup besar dan dengan melihat operasi aritmetik yang diperlukan, teknik iterasi ini lebih efisien dibandingkan eliminasi Gauss (May [7], hal. 11).

Menurut Briggs [3], metode multigrid merupakan teknik yang sangat efisien untuk menyelesaikan sistem linear yang terbentuk dalam penyelesaian

masalah syarat batas. Dalam perkembangannya, Hemker dan Schippers [5] menuliskan bahwa metode multigrid ini ternyata dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan nonsparse linear yang muncul dalam penyelesaian numerik persamaan integral. Di sini metode multigrid, khususnya v-cycle, digunakan untuk lebih meningkatkan efisiensi teknik iterasi. Dalam v-cycle ini, operator untuk menstransfer informasi antar grid mengacu pada artikel oleh Widyaningsih [18]. Gambar 1 menunjukkan v-cycle 3 level. Notasi  $\nu_1$  dan  $\nu_2$  adalah banyaknya iterasi pada grid yang terkait.



Gambar 1. Skedul V-cycle 3 level dengan  $\nu_1$  and  $\nu_2$  iterasi pada grid terkait

#### 4. BIAYA PERHITUNGAN (*COMPUTATION COST*)

Untuk menentukan efisiensinya, digunakan biaya perhitungan yang disajikan dalam *unit work*. Banyaknya operasi aritmetik (khususnya  $\times$  dan  $\div$ ) untuk menyelesaikan sistem persamaan linear pada grid *finest* order  $m$  dengan sekali iterasi adalah  $m^2$ . Banyaknya operasi aritmetik pada grid *finest* ini disebut biaya perhitungan yang besarnya satu *unit work*, disingkat *UW* [3, 8]. Unit ini selanjutnya dipakai untuk mengestimasi biaya perhitungan eliminasi Gauss dan v-cycle. Karena banyaknya operasi aritmetik dalam eliminasi Gauss adalah  $1/3(m^3 + 3m^2 - m)$ , biaya perhitungan teknik ini adalah

$$\frac{1}{3m^2}(m^3 + 3m^2 - m) UW.$$

Biaya untuk melakukan satu *sweep* v-cycle dengan  $\nu_1 = \nu_2 = 1$  adalah

$$2m^2(1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots) \approx \frac{8}{3} UW.$$

Biaya operator vektor intergrid diabaikan.

## 5. APLIKASI

Untuk semua perhitungan yang diperlukan disusun program yang menggunakan software *Mathematica*. Sebagai aplikasi, diberikan dua kasus dimana untuk menentukan penyelesaiannya digunakan kombinasi metode fungsi Walsh dan eliminasi Gauss serta metode fungsi Walsh dan v-cycle. Ini berarti sistem persamaan linear yang diperoleh karena penggunaan metode fungsi Walsh disamping diselesaikan secara langsung juga diselesaikan secara iteratif dengan v-cycle.

**Kasus 5.1.** Diperhatikan persamaan integral Fredholm yang diambil dari kasus kedua Uljanov dan Blyth [15], yaitu

$$y(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)y(t)dt \quad (5.1)$$

yang mempunyai penyelesaian eksak  $y(x) = 1$ . Kernel dalam kasus ini terlebih dahulu didekati dengan ekspansi deret Taylor berhingga,  $x(e^{xt} - 1) \approx x^2t + x^3t^2/2 + x^4t^3/6$ , baru kemudian didekati dengan deret fungsi Walsh rangkap.

Toleransi error yang digunakan untuk masing-masing  $m$  tampak dalam Tabel 1. Nilai ini merupakan error apabila digunakan eliminasi Gauss dalam penyelesaian sistem persamaan linear yang terbentuk karena penggunaan metode fungsi Walsh.

Tabel 1. Toleransi error yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan (5.1)

| m      | 8        | 16       | 32       | 64       | 128     | 256      | 512      |
|--------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|
| TolErr | 0.907732 | 0.953179 | 0.976431 | 0.988178 | 0.99408 | 0.997038 | 0.998518 |

Dengan menggunakan toleransi error Tabel 1, persamaan (5.1) diselesaikan dengan menggunakan v-cycle. Banyaknya pengulangan v-cycle (dan  $UW$ ) yang diperlukan untuk berbagai pemilihan nilai  $m$ , apabila diambil  $v_1 = v_2 = 1$ , tampak dalam Tabel 2.

Sebagai pembandingan, pada baris kedua diberikan  $UW$  yang diperlukan apabila digunakan eliminasi Gauss. Dengan memperhatikan  $UW$ , tampak bahwa penggunaan v-cycle dapat meningkatkan efisiensi eliminasi Gauss. Penggunaan v-cycle 3 level dalam kasus ini tampak merupakan pilihan terbaik, karena dapat mengurangi biaya perhitungan terbesar. Misal untuk  $m = 512$ , penggunaan v-cycle 3 level dapat mengurangi 166.54  $UW$  (97%) dibandingkan penggunaan eliminasi Gauss, yang merupakan metode standar yang digunakan Uljanov dan Blyth [2, 15].

Tabel 2. Banyaknya pengulangan v-cycle dan  $UW$  yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan (5.1) dengan toleransi error Tabel 1

| m         | 8        | 16           | 32           | 64           | 128      | 256      | 512      |
|-----------|----------|--------------|--------------|--------------|----------|----------|----------|
| Gauss     | 3.63     | 6.31         | 11.66        | 22.33        | 43.67    | 86.33    | 171.67   |
| v 2 level | 4 (9.00) | 4 (9.00)     | 4 (9.00)     | 4 (9.00)     | 4 (9.00) | 4 (9.00) | 4 (9.00) |
| v 3 level |          | 2<br>(5.137) | 4<br>(10.25) | 4(10.25)     | 3 (7.67) | 3 (7.67) | 3 (7.67) |
| v 4 level |          |              | 4<br>(10.56) | 4<br>(10.56) | 3 (7.92) | 3 (7.92) | 3 (7.92) |
| v 5 level |          |              |              | 4<br>(10.64) | 3 (7.98) | 3 (7.98) | 3 (7.98) |
| v 6 level |          |              |              |              | 3 (7.99) | 3 (7.99) | 3 (7.99) |
| v 7 level |          |              |              |              |          | 3 (8.00) | 3 (8.00) |
| v 8 level |          |              |              |              |          |          | 3 (8.00) |

**Kasus 5.2.** Sebagai kasus ke-2 diperhatikan persamaan integral Volterra linear yang diambil dari Jerri [6] hal. 14, yaitu

$$y(x) = \sin x + \int_0^x 2 \cos(x-t)y(t)dt \quad (5.2)$$

yang mempunyai penyelesaian eksak  $y(x)=xe^x$ . Persamaan integral (5.2) dapat dinyatakan sebagai persamaan integral Fredholm linear (lihat Golberg [4])

$$y(x) = \sin x + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt \text{ dengan } K(x,t) = \begin{cases} 2\cos(x-t), & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Sama seperti dalam Kasus 5.1, toleransi error yang digunakan untuk kasus ini dapat ditentukan dan tampak dalam Tabel 3.

Tabel 3. Toleransi error yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan (5.3)

| m        | 8                     | 16                    | 32                    | 64                    | 128                   | 256                   | 512                   |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| TolError | $1.88 \times 10^{-2}$ | $4.67 \times 10^{-3}$ | $1.16 \times 10^{-3}$ | $2.91 \times 10^{-4}$ | $7.27 \times 10^{-5}$ | $1.82 \times 10^{-5}$ | $4.55 \times 10^{-6}$ |

Dengan memperhatikan toleransi error dalam Tabel 3, v-cycle diaplikasikan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang terbentuk. Dengan tetap mengambil  $\nu_1 = \nu_2 = 1$ , banyaknya pengulangan v-cycle yang diperlukan dan juga  $UW$  yang ekuivalen dengannya terlihat dalam Tabel 4.

Tabel 4. Banyaknya pengulangan v-cycle dan  $UW$  yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan (5.3) dengan toleransi error Tabel 3

| m         | 8         | 16        | 32        | 64        | 128       | 256       | 512       |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Gauss     | 3.63      | 6.31      | 11.66     | 22.33     | 43.67     | 86.33     | 171.67    |
| v 2 level | 5 (11.25) | 5 (11.25) | 5 (11.25) | 5 (11.25) | 5 (11.25) | 5 (11.25) | 5 (11.25) |
| v 3 level |           | 5 (12.81) | 4 (10.25) | 4 (10.25) | 3 (7.67)  | 3 (7.67)  | 3 (7.67)  |
| v 4 level |           |           | 4 (10.56) | 4 (10.56) | 3 (7.92)  | 3 (7.92)  | 3 (7.92)  |
| v 5 level |           |           |           | 4 (10.64) | 3 (7.98)  | 3 (7.98)  | 3 (7.98)  |
| v 6 level |           |           |           |           | 3 (7.99)  | 3 (7.99)  | 3 (7.99)  |
| v 7 level |           |           |           |           |           | 3 (8.00)  | 3 (8.00)  |
| v 8 level |           |           |           |           |           |           | 3 (8.00)  |

Berdasar Tabel 4, penggunaan v-cycle tetap dapat meningkatkan efisiensi eliminasi Gauss. V-cycle 3 level juga merupakan pilihan terbaik. Sebagai contoh untuk  $m = 256$ , v-cycle 3 level dapat meningkatkan efisiensi eliminasi Gauss secara sangat signifikan, yaitu 91%. Untuk  $m = 512$ , peningkatan efisiensi yang dapat dicapai adalah 164.03  $UW$  atau 95.5 %.

## **6. KESIMPULAN**

Eksperimen numerik menunjukkan bahwa kombinasi metode fungsi Walsh dan v-cycle dapat diterapkan untuk meningkatkan efisiensi metode fungsi Walsh. Aplikasi metode ini dan juga penggunaan ide lainnya akan penulis lakukan dalam masalah tes standar yang lebih luas guna diperolehnya suatu algoritma baru yang lebih baik dalam penyelesaian masalah integral Fredholm.

## **DAFTAR PUSTAKA**

1. Blyth, W. F. and B. G. Sloss, *Walsh functions and applications to differential and integral equations*, The Role of Mathematics in Modern Engineering, 1st Biennial Engineering Mathematics Conference: AEMC94 (Alan K. Easton and Joseph M. Steiner, eds.), The Engineering Mathematics Group (EMG), Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics (ANZIAM), Australian Mathematics Society and Student literature, pp. 535-542, 1996.
2. Blyth, W. F. and V. Uljanov, *Numerical solution of weakly singular Fredholm integral equations using Walsh functions*, Computational Techniques and Applications: CTAC-95 (R. L. May and A. K. Easton, eds.), World Scientific Publishing Co., pp. 137-143, 1996.
3. Briggs, W. L., *A multigrid tutorial*, SIAM, Philadelphia, 1987.
4. Golberg, M. A., *A survey of numerical methods for integral equations*, Solution Methods for Integral Equations: Theory and Applications (New York) (M. A. Golberg, ed.), Plenum Publishing Co., pp. 1-58, 1979.
5. Hemker, P. W. and H. Schippers, *Multiple grid methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind*, Mathematics of Computations 36 no. 153, 215-239, 1981.
6. Jerri, A. J., *Introduction to integral equations with applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.
7. May, R. L., *Numerical linear algebra*, Royal Melbourne Institute of Technology Ltd, RMIT, Melbourne, Australia, 1992.

8. McCormick, S. F. (ed.), *Multigrid methods*, Frontier in Applied Mathematics, SIAM, 1987.
9. Sloss, B. G., *Numerical solution of differential equations using Walsh functions*, Master's thesis, RMIT, Melbourne, Australia, 1988.
10. Sloss, B. G., *Walsh functions and applications to numerical analysis*, Ph.D. thesis, RMIT, Melbourne, Australia, 1994.
11. Sloss, B. G. and W. F. Blyth, *A-priori error estimates for Corrington's Walsh function method*, J. Franklin Institute 331B no. 3, 273-283, 1984.
12. Sloss, B. G. and W. F. Blyth, *A pseudospectral Walsh function method*, Journal of the Franklin Institute 329 no. 4, 667-678, 1992.
13. Sloss, B. G. and W. F. Blyth, *A Walsh function method for the nonlinear Volterra integral equation*, Research Report 5, RMIT, Melbourne, Vic. Australia, December 1995.
14. Uljanov, V. and W. F. Blyth, *Numerical solution of functional differential equations using Walsh functions*, Computational Techniques and Applications: CTAC93 (D. Steward, D. Singleton, and D. Gardiner, eds.), Computational Mathematics Group, World Scientific Publishing Co, 1994.
15. Uljanov, V. and W. F. Blyth, *Numerical solution of Urysohn integral equations using Walsh functions*, The Role of Mathematics in Modern Engineering: 1st Biennial Engineering Mathematics Conference: AEMC94 (Alan K. Easton and Joseph M. Steiner, eds.), The Engineering Mathematics Group (EMG), Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics (ANZIAM), Australian Mathematics Society and Student literature, pp. 621-628, 1996.
16. Widyaningsih, P. dan Paiman, *Penyelesaian persamaan integral Fredholm linear dengan metode fungsi Walsh via transformasi*, Prosiding Seminar Nasional Pembelajaran dan Pengembangan Matematika dalam Rangka Meningkatkan Kualitas Sumber Daya Manusia, Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, pp. 117-120, 2001.
17. Widyaningsih, P. dan R. A. Yuana, *Penerapan metode fungsi Walsh dalam penyelesaian persamaan integral Fredholm linear*, Prosiding Seminar



Nasional Pembelajaran dan Pengembangan Matematika dalam Rangka Meningkatkan Kualitas Sumber Daya Manusia, Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, pp. 121-123, 2001.

18. Widyarningsih, P., *Efficiency of Walsh function method in solving linear Volterra integral equations using v-cycle*, MIHMI 6 no. 3, 155-161, 2000.