JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 71 - 76, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518

SYARAT CUKUP AGAR SUATU FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK MUTLAK DI DALAM RUANG METRIK KOMPAK LOKAL

Manuharawati
Jurusan Matematika FMIPA UNESA Surabaya

Soeparna Darmawijaya
Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta

Abstrak

Lee (1989) dan Widodo (1992) telah memperlihatkan bahwa integral Henstock di dalam ruang metrik biasa ***R*** bukan merupakan integral mutlak. Berdasarkan kenyataan tersebut, makalah ini membahas syarat cukup agar suatu fungsi terintegral Henstock mutlak di dalam ruang metrik kompak lokal, khususnya ruang metrik nondiskrit.

1. PARTISI PERRON δ-FINE

Pada makalah ini, (X,d) menyatakan ruang metrik kompak lokal nondiskrit dengan X sebagai himpunan dasarnya dan d sebagai metriknya. Sebelum membahas adanya partisi Perron δ-fine, terlebih dahulu didefinisikan pengertian himpunan konvex dan sistem interval di dalam ruang metrik yang dimaksud.

Himpunan $A \subset X$ dikatakan **konvex** (*convex*) jika untuk setiap $a,b \in A$ berlaku $\{x \in X : d(a,b) = d(a,x) + d(b,x)\} \subset A$

Koleksi $\boldsymbol{S} \subset 2^X$ yang tidak kosong disebut **sistem interval** (*system of intervals*) di dalam ruang metrik (X,d) jika memenuhi :

(i). Untuk setiap $p \in X$, $\{p\} \in \boldsymbol{S}$.

(ii). Untuk setiap $p \in X$, $N(p,r) \in \boldsymbol{S}$ jika $cl(N(p,r))$ kompak.

(iii). Jika $A \in \boldsymbol{S}$ maka A konvex, $cl(A)$ kompak dan $cl(A)$, $int(A) \in \boldsymbol{S}$.

(iv). Untuk setiap $A, B \in \boldsymbol{S}$, $A \cap B \in \boldsymbol{S}$ dan untuk setiap $\eta > 0$ terdapat barisan himpunan $\{C_i\}_{i=1}^{n} \subset \boldsymbol{S}$ yang tidak tumpang tindih sehingga $d(C_i) < \eta$ untuk setiap i dan $A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

Jika $\boldsymbol{S}$ merupakan sistem interval di dalam ruang metrik (X,d), setiap anggota $\boldsymbol{S}$ disebut **interval**. Interval $A \in \boldsymbol{S}$ dikatakan **degenerate** jika $\text{int}(A) = \varnothing$ dan **nondegenerate** jika $\text{int}(A) \neq \varnothing$. Yang dimaksud dengan **sel** adalah interval kompak nondegenerate. Suatu interval dikatakan terbuka jika ia merupakan himpunan terbuka. Himpunan $A \subset X$ disebut **himpunan elementer** (*elementary set*) jika A merupakan gabungan hingga interval-interval. Jadi A himpunan elementer jika dan hanya jika terdapat $C_i \in$ S, $(1 \leq i \leq n)$ sehingga

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i .$$

Koleksi semua himpunan elementer yang termuat di dalam X dituliskan dengan $\boldsymbol{E}(X)$.

Koleksi sebanyak hingga sel-sel $\{A_i : i = 1,2, ..., n\} \subset \boldsymbol{S}$ yang tidak tumpang tindih disebut **partisi** (*partition*) **pada** atau **di dalam** himpunan elementer kompak E jika

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ atau $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset E$.

Diberikan himpunan elementer kompak E dengan $int(E) \neq \varnothing$ dan fungsi $\delta : E \to R^+$. Koleksi hingga pasangan sel-titik

$\boldsymbol{P} = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$

disebut :

(i). **Partisi Perron δ-fine** (*Perron δ-fine partition*) **p*ada*** atau **di dalam** E jika $x_i \in A_{x_i} \subset N(x_i, \delta(x_i))$ dan $\{A_{x_i}\}$ merupakan partisi pada atau di dalam E.

(ii). **Partisi McShane δ-fine** (*McShane δ-fine partition*) **pada** atau **di dalam** E jika $x_i \in E$, $A_{x_i} \subset N(x_i, \delta(x_i))$ dan $\{A_{x_i}\}$ merupakan partisi pada atau di dalam E.

Jaminan adanya partisi Perron δ-fine pada himpunan elementer kompak yang nondegenerate disajikan pada lemma berikut.

Lemma 1.1: *Diberikan himpunan elementer kompak $E \subset X$ dengan int(E)$\neq\emptyset$. Jika $\delta : E \to R^+$, maka terdapat partisi Perron δ-fine pada E.* (Manuharawati dan Soeparna, 2001)

2. FUNGSI TERUKUR

Diberikan fungsi volume v yang kontinu pada $\boldsymbol{E}(X)$. Fungsi $\mu^* : 2^X \to R^*$ dengan

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(A_i),\ A_i \text{ interval terbuka dan } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

merupakan **ukuran luar** (*outer measure*) pada X. (Manuharawati dan Soeparna, 2001)

Himpunan $E \subset X$ dikatakan **terukur-μ^*** (*μ^*-measurable*) jika untuk setiap $A \subset X$ berlaku $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C)$.

Jika $\boldsymbol{A}$ menyatakan koleksi semua himpunan terukur-μ^* dan μ ukuran pada $\boldsymbol{A}$ yang dibangkitkan oleh μ^*, maka $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ merupakan ruang ukuran yang lengkap. (Manuharawati, 2000).

Diberikan E himpunan terukur-μ^*. Fungsi $g : X \to R^*$ dikatakan **terukur-μ^*** (*μ^*-measurable*) **pada** E jika untuk setiap bilangan real c,
$\{x \in E : g(x) > c\}$ merupakan himpunan terukur-μ^*.

Teorema 2.1. (Teorema Lusin) : *Diketahui fungsi* $g : X \to R^*$ *dan sel* $E \subset X$. *Jika* g *terukur-*μ^* *dan terbatas pada* E, *maka terdapat fungsi* $f : X \to R^*$ *yang kontinu dan terbatas pada* E *dengan*

$\sup\{f(x): x \in E\} = \sup\{g(x): x \in E\}$, $\inf\{f(x): x \in E\} = \inf\{g(x): x \in E\}$,

dan untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ *terdapat himpunan tertutup* $F \subset E$ *sehingga* $\mu(E - F) < \varepsilon$ *dan* $f = g$ *pada* F. (Manuharawati, 2000).

3. INTEGRAL HENSTOCK DAN INTEGRAL MCSHANE

Diberikan fungsi volume ν yang kontinu pada $\boldsymbol{E}(X)$. *Fungsi* $g : X \to R^*$ dikatakan :

(i). **Terintegral-**ν **Henstock** (*Henstock* ν*- integrable*) pada sel $E \subset X$, ditulis singkat dengan $g \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}, \nu)$ jika terdapat bilangan real α dengan sifat untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta : E \to R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-fine $\boldsymbol{P} = \{(A_x, x)\}$ pada E berlaku

$|\boldsymbol{P}\sum g(x)\,\nu\,(A_x) - \alpha| < \varepsilon$

(ii). ***Terintegral-***ν ***McShane*** (*McShane* ν*- integrable*) *pada sel* $E \subset X$, *ditulis singkat dengan*

$g \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{E}, \nu)$ *jika terdapat bilangan real* α *dengan sifat untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat*

fungsi $\delta : E \to R^+$ *sehingga untuk setiap partisi McShane* δ*-fine* $\boldsymbol{P} = \{(A_x, x)\}$ *pada* E *berlaku*

$|\boldsymbol{P}\sum g(x)\,\nu\,(A_x) - \alpha| < \varepsilon$

dengan $\boldsymbol{P}\sum$ *merupakan jumlahan atas partisi* $\boldsymbol{P}$

Teorema 3.1: *Diketahui fungsi* $g : X \to R^*$ *dan sel* $E \subset X$. *Jika* $g \in M(E, \nu)$, *maka* $|g| \in M(E, \nu)$. (Manuharawati dan Soeparna 2001)

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 71 - 76, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518

Syarat cukup agar suatu fungsi terintegral Henstock mutlak di dalam ruang metrik kompak lokal, khususnya ruang metrik nondiskrit disajikan di dalam teorema berikut.

Teorema 3.2.: *Jika fungsi* $g : X \to R^*$ *terukur-*μ^* *dan terbatas pada sel* $E \subset X$*, maka g dan* $|g|$ *terintegral-H terhadap* ν *pada E.*

Bukti : Berdasarkan yang diketahui terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$|g(x)| \le M$$

Berdasarkan Teorema Lusin, untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan tertutup $F \subset E$ dengan

$$\mu(E\text{-}F) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

dan terdapat fungsi $f : X \to R^*$ yang kontinu pada E, $f = g$ pada F, dan untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$|f(x)| \le M$$

Karena f kontinu pada E, maka $f \in M(E, \nu)$. Oleh karena itu untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta_1 : E \to R^+$ dan jika $\boldsymbol{P} = \{(A_x, x)\}$ partisi McShane δ_1-fine pada E berlaku

$$\left| \boldsymbol{P}\sum f(x)\,\nu(A_x) - (M)\int_E f \right| < \varepsilon$$

Dipilih himpunan terbuka $O \subset X$ sehingga $E - F \subset O$ dan

$$\mu(O) < \frac{\varepsilon}{M}$$

dan dibentuk fungsi $\delta : E \to R^+$ dengan

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_1(x) & untuk\ x \in F \\ \min\{\delta_1(x), d(x, O^C)\} & untuk\ x \in E - F \end{cases}$$

Jika $\boldsymbol{P} = \{(A_x,x)\}$ sebarang partisi McShane δ-fine pada E, maka $\boldsymbol{P} = \{(A_x,x)\}$ merupakan partisi McShane δ_1-fine pada E dan $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 \cup \boldsymbol{P}_2$ dengan

$\boldsymbol{P}_1 = \{(A_x,x) \in \boldsymbol{P} : x \in F\}$ dan $\boldsymbol{P}_2 = \{(A_x,x) \in \boldsymbol{P} : x \in E - F\}$.

Oleh karena itu diperoleh:

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{P}\sum g(x)\,\nu(A_x) - (M)\int_E f\right| &\leq \left|\boldsymbol{P}\sum f(x)\,\nu(A_x) - (M)\int_E f\right| \\
&\quad + \left|\boldsymbol{P}\sum g(x)\,\nu(A_x) - \boldsymbol{P}\sum f(x)\,\nu(A_x)\right| \\
&< \varepsilon + \left|\boldsymbol{P}_1\sum g(x)\,\nu(A_x) - \boldsymbol{P}_1\sum f(x)\,\nu(A_x)\right| \\
&\quad + \left|\boldsymbol{P}_2\sum g(x)\,\nu(A_x) - \boldsymbol{P}_2\sum f(x)\,\nu(A_x)\right| \\
&= \varepsilon + 0 + \boldsymbol{P}_2\sum\left|g(x) - f(x)\right|\nu(A_x) \\
&< \varepsilon + 2M\,\mu(O) \\
&< \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Dengan kata lain $g \in M(E,\nu)$. Berdasarkan Teorema 3.1, $|g| \in M(E,\nu)$. Karena setiap fungsi yang terintegral McShane terhadap ν pada suatu sel juga terintegral Henstock terhadap ν pada sel yang sama, maka terbukti bahwa $g, |g| \in H(E,\nu)$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Lee, P.Y., Lanzhou Lectures On Henstock Integration, World Scientific, Singapore. 1989.
2. Manuharawati, Laporan Kemajuan Penelitian Program S-3 Periode Oktober 2000, PPS UGM, Yogyakarta, 2000.
3. Manuharawati dan Soeparna, D., Pemikiran Umum tentang Integral di dalam Ruang Metrik, 2001.
4. Kompak Lokal, Makalah Seminar Bidang Analisis Matematika Tanggal 7 Juli 2001 di Jurusan Matematika *FMIPA UGM Yogyakarta*.
5. Widodo, Integral Riemann Lengkap (Integral Henstock), *Tesis*, Program Studi Matematika Sekolah Pascasarjana ITB,1992.