JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 77 - 85, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518

DISTRIBUSI WAKTU BERHENTI PADA PROSES PEMBAHARUAN

Sudarno
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Dalam proses stokhastik yang mana kejadian dapat muncul kembali membentuk proses pembahauruan. Proses pembaharuan adalah proses menghitung dengan variabel acaknya bernilai intejer dan kejadiannya dapat terulang lagi. Pada proses pembaharuan akan muncul waktu berhenti, yaitu waktu suatu proses selesai dan disambung dengan proses yang baru berikutnya. Distribusi waktu berhenti merupakan selisih konvolusi dari distribusinya. Menurut persamaan Wald bahwa nilai harapan waktu berhenti sama dengan ekspektasi waktu tunggu dibagi dengan rataannya. Sedangkan persamaan Wald dapat dipakai bilamana rataannya berhingga.

Kata kunci : Proses pembaharuan, Waktu berhenti, Persamaan Wald.

1. PENDAHULUAN

Sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adanya proses antrian. Contohnya pada Bank, Jalan Tol, Swalayan, dan sebagainya. Dalam proses antrian terdapat orang yang mengantri. Hal pokok yang perlu diperhatikan dalam proses antrian dan khususnya yang berhubungan dengan proses pembaharuan adalah waktu antar kedatangan dan waktu tunggu pengantri. Dalam Ross (1997), dikatakan bahwa waktu antar kedatangan merupakan variabel acak berdistribusi identik eksponensial dan saling bebas yang mempunyai rataan $1/\lambda$. Sedangkan waktu tunggu adalah berdistribusi gamma dengan parameter n dan λ.

Pada proses Poisson dinyatakan bahwa waktu antar kedatangan merupakan variabel acak saling bebas dan berdistribusi identik eksponensial (Ross, 1996). Masalah ini akan dikembangkan untuk proses pembaharuan, yaitu proses menghitung dengan waktu antar kedatangan saling bebas dan berdistribusi identik, tetapi untuk sembarang distribusi. Proses pembaharuan merupakan proses stokhastik yang mana distribusinya sembarang dan terdapat pembaharuan setelah terjadi waktu berhenti.

Tujuan dari tulisan ini adalah untuk mengetahui distribusi waktu berhenti dan nilai harapan waktu berhenti untuk suatu proses stokhastik. Sehingga waktu berhenti dari suatu proses stokhastik akan dapat ditaksir.

2. HUKUM KUAT BILANGAN BESAR DAN KONVOLUSI

Hukum kuat bilangan besar merupakan teorema peluang, yang menyatakan bahwa rata-rata barisan dari variabel acak yang berdistribusi sama, dengan peluang 1 akan konvergen ke rataan dari distribusi tersebut.

Secara formal ditulis sebagai berikut:

Jika $X_1, X_2, \dots$ adalah barisan variabel acak berdistribusi identik dan saling bebas dengan rataan μ, maka $P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right\} = 1.$

Sedangkan misal X dan Y adalah variabel random yang saling bebas, masing-masing berdistribusi F dan G. Maka distribusi X + Y yang dinyatakan dengan F*G, disebut konvolusi dari F dan G diberikan dengan

$$(F*G)(a) = P\{X + Y \le a\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X + Y \le a \mid Y = y\}\, dG(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X + y \le a\}Y = y\}\, dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(a - y)\, dG(y).$$

Notasi F*F ditulis dengan F_2, sehingga secara umum dapat dinyatakan bahwa $F*F_{n-1} = F_n$ yang merupakan konvolusi n kali dari F dengan dirinya sendiri, yaitu distribusi jumlah dari n variabel random saling bebas masing-masing berdistribusi F.

3. DISTRIBUSI WAKTU BERHENTI

Misal $\{X_n, n = 1,2,\dots\}$ merupakan barisan variabel acak nonnegatif saling bebas berdistribusi F. Anggap $F(0) = P\{X_n = 0\} < 1$. Diinterpretasikan bahwa X_n sebagai waktu antara kejadian ke-(n-1) dan ke-n. Misal

$$\mu = E[X_n] = \int_0^\infty x \, dF(x)$$

menyatakan rataan waktu antar kejadian yang berturutan dan diasumsikan bahwa $X_n \geq 0$ dan $F(0) < 1$, maka $0 < \mu \leq \infty$. Dengan mengambil

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1,$$

maka S_n adalah waktu kejadian ke-n. Karena banyaknya kejadian sampai waktu t akan sama dengan nilai terbesar n sedemikian hingga kejadian ke-n terjadi sebelum atau pada waktu t, maka N(t) yaitu banyaknya kejadian sampai waktu t, diberikan dengan

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}. \qquad (1)$$

Definisi 1

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ *disebut proses pembaharuan.*

Dalam proses menghitung, istilah kejadian sama dengan pembaharuan. Sehingga dapat dikatakan bahwa pembaharuan ke-n terjadi pada waktu S_n . Apakah tak hingga banyak pembaharuan dapat terjadi dalam waktu yang berhingga? Untuk menunjukkan bahwa ini tidak mungkin terjadi, dengan menggunakan hukum kuat bilangan besar, bahwa dengan peluang 1,

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \text{ untuk } n \to \infty.$$

Tetapi karena $\mu > 0$, ini berarti bahwa S_n harus menuju tak hingga untuk n menuju tak hingga. Dengan demikian S_n dapat kurang dari atau sama dengan t untuk paling banyak sejumlah berhingga nilai dari n. Makanya, menurut (1), N(t) harus berhingga, dan dapat ditulis

$$N(t) = \text{mak}\{n : S_n \leq t\}.$$

Distribusi N(t) dapat diperoleh dengan memperhatikan hubungan bahwa

banyaknya pembaharuan sampai dengan waktu t lebih besar atau sama dengan n jika dan hanya jika pembaharuan ke-n terjadi sebelum atau pada waktu t.

Pernyataan ini dapat ditulis dengan

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t \qquad (2)$$

Menurut (2) diperoleh $P\{N(t)=n\} = P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\}$

$$= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\}. \qquad (3)$$

Karena variabel acak $X_i, i \geq i$, adalah saling bebas dan berdistribusi F, maka $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ adalah berdistribusi F_n , yang merupakan konvolusi n-kali F dengan dirinya sendiri. Oleh sebab itu, menurut (3) didapat $P\{N(t)=n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$. Jika $m(t) = E[N(t)]$, maka m(t) disebut fungsi pembaharuan. Hubungan antara m(t) dan F diberikan oleh proposisi berikut ini.

Proposisi 1

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Bukti :

Ambil $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$,

dengan $I_n = \begin{cases} 1, \text{ jika pembaharuan ke - n terjadi dalam } [0,t], \\ 0, \text{ yang lainnya.} \end{cases}$

Sehingga,

$$E[N(t)] = E[\sum_{n=1}^{\infty} I_n] = \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{I_n = 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

Karena I_n adalah nonnegatif.

Untuk proposisi berikut ini menunjukkan bahwa N(t) mempunyai nilai harapan yang berhingga.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 77 - 85, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518

Proposisi 2

$m(t) < \infty$, untuk semua $0 \le t < \infty$.

Bukti :

Karena $P\{X_n = 0\} < 1$, maka menurut sifat kontinuitas dari peluang bahwa terdapat $\alpha > 0$ sedemikian hingga $P\{X_n \ge \alpha\} > 0$. Selanjutnya didefinisikan proses pembaharuan yang berhubungan dengan masalah ini, yaitu

$$\{\overline{X}_n, n \ge 1\} \text{ dengan } \overline{X}_n = \begin{cases} 0, \text{ jika } X_n < \alpha \\ \alpha, \text{ jika } X_n \ge \alpha, \end{cases}$$

dan misal $\overline{N}(t) = \sup\{n : \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n \le t\}$. Maka untuk proses tersebut, pembaharuan hanya terjadi pada waktu $t = n\alpha, n = 0,1,2,\ldots,$ dan juga banyaknya pembaharuan pada tiap-tiap waktu merupakan variabel acak berdistribusi geometrik yang saling bebas dengan rataan $\dfrac{1}{P\{X_n \ge \alpha\}}$. Sehingga $E[\overline{N}(t)] \le \dfrac{t/\alpha + 1}{P\{X_n \ge \alpha\}} < \infty$, karena $\overline{X}_n \le X_n$ yang berarti $\overline{N}(t) \ge N(t)$. Jika diambil harga ekspektasinya, maka $E[N(t)] \le E[\overline{N}(t)] < \infty$.

Selanjutnya akan dibahas teorema limit tentang intensitas proses pembaharuan dan persamaan Wald.

Misal $N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t)$ menyatakan banyaknya keseluruhan pembaharuan yang terjadi, maka $N(\infty) = \infty$, dengan peluang 1. Karena banyaknya keseluruhan pembaharuan yang terjadi dapat berhingga untuk waktu antar kedatangan tak hingga. Oleh karena itu,

$$P\{N(\infty) < \infty\} = P\{X_n = \infty \text{ untuk suatu n }\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = \infty\}\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} P[X_n = \infty\} = 0.$$

Dengan demikian N(t) nenuju tak hingga untuk t menuju tak hingga.

Akan dicari intensitas dari proses pembaharuan pada saat N(t) menuju tak hingga, yaitu $\lim_{t\to\infty}\dfrac{N(t)}{t}$, dalam proposisi berikut.

Proposisi 3

Dengan peluang 1, $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *untuk* $t \to \infty$.

Bukti :

$$\text{Karena } S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1}, \text{ maka } \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \le \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \qquad (4)$$

Karena $S_{N(t)}/N(t)$ adalah rataan N(t) waktu antar kedatangan pertama, maka menurut hukum kuat bilangan besar bahwa $S_{N(t)}/N(t) \to \mu$ untuk $N(t) \to \infty$.

Karena $N(t) \to \infty$ bila $t \to \infty$, maka $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$ untuk $t \to \infty$.

Lebih lanjut, dengan menulis $\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \left[\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right]\left[\frac{N(t)+1}{N(t)}\right]$, dengan alasan yang sama didapat $\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \to \mu$ untuk $t \to \infty$. Sehingga menurut (4), t/N(t) diapit oleh dua bilangan yang konvergen ke μ untuk $t \to \infty$. Maka $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ untuk $t \to \infty$.

Contoh 1

Suatu kotak berisi tak hingga koin. Setiap koin jika dilemparkan mempunyai peluang untuk muncul gambar. Nilai dari peluang merupakan variabel acak yang saling bebas berdistribusi seragam atas (0,1). Jika koin-koin tersebut dilemparkan terus-menerus, bagaimana prosesnya memaksimalkan peluang muncul gambar, untuk waktu yang lama ?

Penyelesaian :

Misal N(n) menyatakan banyaknya muncul angka dalam n lemparan pertama. Sehingga peluang jangka panjang muncul gambar, disebut P_h , diberikan dengan

$$P_h = \lim_{n\to\infty} \frac{n - N(n)}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n}.$$

Caranya dengan mengambil koin terus dilemparkan, demikian seterusnya sampai muncul angka. Jika sudah demikian, maka koin-koin itu dibuang dan untuk proses selanjutnya dengan mengambil koin-koin yang baru. Proses diulang terus-menerus. Untuk menentukan P_h dengan cara ini, maka waktu koin dilemparkan sampai muncul angka akan membentuk pembaharuan. Sehingga, menurut Proposisi 3,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n} = 1/E[\text{banyaknya lemparan antara muncul angka yang berurutan}].$$

Jika diberikan peluang muncul gambar adalah p, maka banyaknya lemparan koin sampai muncul angka merupakan distribusi geometric dengan rataan 1/(1-p).
Jadi, E[banyaknya lemparan diantara muncul angka yang berurutan] = $\int_0^1 \frac{1}{1-p}\,dp = \infty,$ yang berarti, dengan peluang 1, $\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n} = 0.$ Sehingga peluang untuk jangka panjang muncul gambar sama dengan 1.

Dengan demikian Proposisi 3 menyatakan bahwa dengan peluang 1, intensitas jangka panjang yang mana pembaharuan terjadi akan sama dengan 1/μ. Untuk alasan ini 1/μ disebut intensitas proses pembaharuan.
Misal $X_1, X_2, \ldots$ menyatakan barisan variabel acak saling bebas. Akan disajikan definisi berikut ini.

Definisi 2
Variabel acak bernilai intejer N disebut waktu berhenti untuk barisan $X_1, X_2, \ldots$ *jika kejadian* $\{N = n\}$ *adalah saling bebas dari* $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ *untuk semua* $n = 1, 2, \ldots$.

Secara intuitif, memperlihatkan barisan terurut X_n dan N menyatakan banyaknya pengamatan sebelum proses berhenti. Jika N = n, maka proses berhenti sesudah pengamatan $X_1, \ldots, X_n$ dan sebelum pengamatan $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

Teorema 1 (Persamaan Wald)
Jika $X_1, X_2, \ldots$ *adalah variabel acak saling bebas dan berdistribusi identik yang mempunyai ekspektasi berhingga, dan jika N adalah waktu berhenti untuk* $X_1, X_2, \ldots$ *sedemikian hingga* $E[N] < \infty,$ *maka* $E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E[N]\,E[X].$

Bukti :

Dengan mengambil $I_n = \begin{cases} 1, \text{ jika N} \geq \text{n} \\ 0, \text{ jika N} < \text{n}, \end{cases}$ didapat $\sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \; I_n$. Sehingga

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \; I_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n \; I_n]. \qquad (5)$$

Tetapi, I_n = 1 jika dan hanya jika proses belum berhenti sesudah pengamatan berurutan $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Oleh sebab itu, I_n ditentukan dengan $X_1, \ldots, X_{n-1}$ dan dengan demikian saling bebas dari X_n . Menurut (5), diperoleh

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] \; E[I_n] = E[X] \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n]$$

$$= E[X] \sum_{n=1}^{\infty} P\{N \geq n\} = E[X] \; E[N].$$

Contoh 2

Misal $X_n, n = 1,2,\ldots,$ adalah saling bebas sedemikian hingga

$$P\{X_n = 0\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2}, n = 1,2,\ldots \; .$$

Jika diambil $N = \min\{n : X_1 + \cdots + X_n = 10\},$ maka N adalah waktu berhenti. N dapat dipandang sebagai waktu berhenti dari suatu percobaan melempar koin secara jujur dan berhenti bilamana jumlah gambar yang muncul telah mencapai 10. Menurut Persamaan Wald didapat $E[X_1 + \cdots + X_N] = \frac{1}{2} E[N].$ Tetapi, $X_1 + \cdots + X_N = 10$, menurut definisi dari N. Sehingga E[N] = 20.

Contoh 3

Misal $X_n, n = 1,2,\ldots,$ adalah saling bebas sedemikian hingga $P\{X_n = -1\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2}.$ Maka $N = \min\{n : X_1 + \cdots + X_n = 1\}$ adalah waktu berhenti. Ini dapat dipandang sebagai waktu berhenti untuk pemain yang tiap-tiap pemain berkemungkinan sama untuk menang atau kalah 1 unit dan memutuskan berhenti bermain bilamana menang 1 unit. Menurut Persamaan Wald

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 77 - 85, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518

menghasilkan $E[X_1 + \cdots + X_N] = E[N]\, E[X]$. Tetapi, $X_1 + \cdots + X_N = 1$ dan E[X] = 0. Sehingga kontradiksi. Dengan demikian Persamaan Wald tidak berlaku, untuk E[N] = ∞.

4. KESIMPULAN

Distribusi waktu berhenti merupakan selisih konvolusi dari distribusinya. Fungsi pembaharuan berhingga untuk waktu yang berhingga. Sedangkan intensitas proses pembaharuan akan konvergen berbanding terbalik dengan ratannya untuk waktu jangka panjang. Menurut persamaan Wald bahwa nilai harapan waktu berhenti sama dengan ekspektasi waktu tunggu dibagi dengan rataannya. Sedangkan persamaan Wald dapat dipakai bilamana rataannya berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

1. Feller, S., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume II, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

2. Karlin, S. and H. Taylor, A First Course in Stochastic Processes, Second Edition, Academic, New York, 1975.

3. Ross, S.M., Introduction to Probability Models, Sixth Edition, Academic Press, New York, 1997.

4. Ross, S.M., Stochastic Processes, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

5. Tijms, H.C., Stochastic Models, An Algorithmic Approach, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.