JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 97 - 109, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518

METODE PENENTUAN BENTUK PERSAMAAN RUANG KEADAAN WAKTU DISKRIT

Robertus Heri
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Tulisan ini membahas penentuan persamaan ruang keadaan dari sistem waktu diskrit dalam bentuk: kanonik terkontrol, kanonik terobservasi, kanonik diagonal, serta kanonik Jordan dengan menggunakan metoda pemrograman langsung, pemrograman bersarang dan perluasan pecahan sebagian. Juga dibahas ketidaktunggalan persamaan ruang keadaan dari suatu sistem yang diberikan, yang dibuktikan dengan relasi antara dua vektor keadaan yang berdimensi sama, dimana satu sama lain dihubungkan oleh sebarang matriks non singular.

Kata kunci : fungsi transfer, sistem persamaan waktu diskrit, transformasi z.

1. PENDAHULUAN

Persamaan ruang keadaan terdiri dari persamaan ruang keadaan waktu diskrit dan persamaan ruang keadaan waktu kontinu. Masing-masing dari persamaan ruang keadaan tersebut terbagi lagi menjadi persamaan ruang keadaan yang berubah terhadap waktu (*time varying*) dan persamaan ruang keadaan yang tidak berubah terhadap waktu (*time invariant*).

Persamaan ruang keadaan yang berubah terhadap waktu untuk waktu diskrit (*time varying discrete time state space equation*) berbentuk:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= G(k)x(k) + H(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned} \tag{1}$$

dimana: *x(k)* : vektor keadaan nx1

y(k) : vektor keluaran mx1

u(k) : vektor masukan rx1

G(k) : matriks keadaan nxn

H(k) : matriks masukan nxr

C(k) : matriks keluaran mxn

D(k) : matriks transmisi langsung *mxr*

Variabel k dalam $G(k)$, $H(k)$, $C(k)$ dan $D(k)$ seperti persamaan (1) menyatakan bahwa matriks-matriks tersebut berubah terhadap waktu. Jika variabel k tidak berubah terhadap waktu, maka persamaan (1) dapat ditulis :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \tag{2}$$

dan disebut persamaan ruang keadaan yang tidak berubah terhadap waktu (*time invariant discrete time state space equation*).

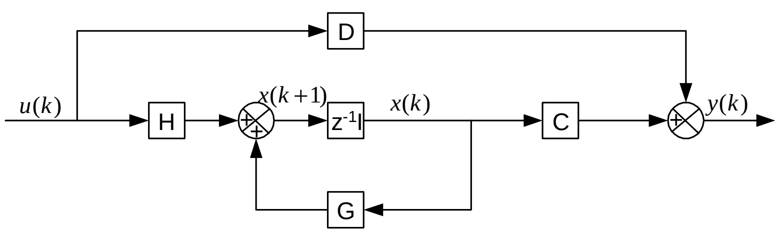
Seperti kasus waktu diskrit yang diberikan oleh persamaan (1) dan (2), persamaan ruang keadaan untuk waktu kontinu yang berubah terhadap waktu, dinyatakan dengan persamaan:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Sedangkan persamaan ruang keadaan waktu kontinu yang tak berubah terhadap waktu berbentuk:

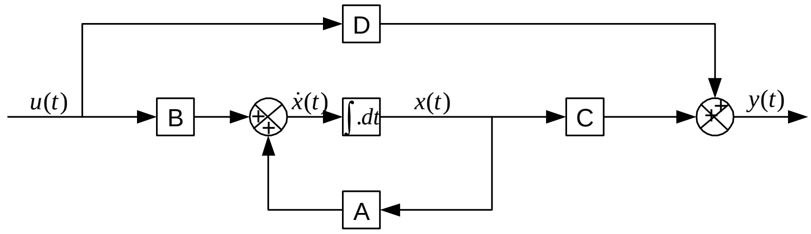
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{4}$$

Blok diagram untuk persamaan ruang keadaan waktu diskrit yang didefinisikan oleh persamaan (2) ditunjukkan dengan Gambar 1, dan blok diagram persamaan ruang keadaan waktu kontinu ditunjukkan dengan Gambar 2.



Gambar 1 Blok diagram untuk persamaan ruang keadaan waktu diskrit

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 97 - 109, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518



Gambar 2 Blok diagram untuk persamaan ruang keadaan waktu kontinu

Model dinamik yang memuat variabel masukan, variabel keluaran dan variabel keadaan sangat berperan dalam analisis ruang keadaan. Demikian juga pengetahuan tentang bentuk persamaan ruang keadaan, terutama dalam mengubah blok diagram menjadi persamaan ruang keadaan dan sebaliknya. Bahkan dalam beberapa metode penentuan kestabilan suatu sistem, syarat perlu dan cukup untuk dapat menentukan kestabilan sistem adalah transformasi ke bentuk kanonik terkontrol.

Bagian pertama tulisan ini memperkenalkan bentuk persamaan ruang keadaan waktu diskrit dan kontinu, baik yang *time varying* maupun *time invariant*, kemudian dibahas representasi ruang keadaan dalam bentuk kanonik terkontrol dengan metode pemrograman langsung, bentuk kanonik terobservasi dengan metode pemrograman bersarang, serta bentuk kanonik diagonal dan bentuk kanonik Jordan, keduanya dengan metode perluasan pecahan sebagian. Bagian terakhir membahas ketidaktunggalan dari persamaan ruang keadaan.

2. PEMBAHASAN

Perhatikan sistem waktu diskrit berikut ini :

$$\begin{aligned} y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\ldots+a_ny(k-n) \\ = b_0u(k)+b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\ldots+b_nu(k-n) \end{aligned} \tag{5}$$

dimana $u(k)$ dan $y(k)$ berturut-turut adalah input dan output sistem.

Transformasi z dari (5) menghasilkan :

$$\begin{aligned} Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+a_2z^{-2}Y(z)+\ldots+a_nz^{-n}Y(z) \\ = b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+b_2z^{-2}U(z)+\ldots+b_nz^{-n}U(z) \end{aligned}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+...+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+...+a_nz^{-n}} \qquad (6)$$

Persamaan (6) merupakan pembagian antara transformasi z keluaran dan masukan, dan disebut fungsi transfer.

Ada 4 bentuk persamaan ruang keadaan yang dapat ditentukan dari persamaan (5) maupun (6), yaitu: bentuk kanonik terkontrol (Controllable canonical form), bentuk kanonik terobservasi (Observable canonical form), bentuk kanonik diagonal (Diagonal canonical form), bentuk kanonik Jordan (Jordan canonical form).

2.1 Bentuk kanonik terkontrol

Bentuk controllable canonical form ditentukan dengan menggunakan metode pemrograman langsung (direct programming methode).
Persamaan (6) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{U(z)}&=b_0+\frac{(b_1-a_1b_0)z^{-1}+(b_2-a_2b_0)z^{-2}+...+(b_n-a_nb_0)z^{-n}}{1+a_1z^{-1}+...+a_nz^{-n}}\\ Y(z)&=b_0U(z)+\frac{(b_1-a_1b_0)z^{-1}+(b_2-a_2b_0)z^{-2}+...+(b_n-a_nb_0)z^{-n}}{1+a_1z^{-1}+...+a_nz^{-n}}U(z)\end{aligned} \qquad (7)$$

Jika didefinisikan

$$\hat{Y}(z)=\frac{(b_1-a_1b_0)z^{-1}+(b_2-a_2b_0)z^{-2}+...+(b_n-a_nb_0)z^{-n}}{1+a_1z^{-1}+...+a_nz^{-n}}U(z) \qquad (8)$$

maka (7) menjadi

$$Y(z)=b_0U(z)+\hat{Y}(z) \qquad (9)$$

Persamaan (8) dapat juga ditulis :

$$\frac{\hat{Y}(z)}{(b_1-a_1b_0)z^{-1}+(b_2-a_2b_0)z^{-2}+...+(b_n-a_nb_0)z^{-n}}=\frac{U(z)}{1+a_1z^{-1}+...+a_nz^{-n}}=Q(z)$$

sehingga diperoleh dua persamaan :

$$Q(z) = -Q(z)a_1 z^{-1} - ... - Q(z)a_n z^{-n} + U(z) \quad (10)$$

$$\hat{Y}(z) = (b_1 - a_1 b_0)z^{-1}Q(z) + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2}Q(z) + ... + (b_n - a_n b_0)z^{-n}Q(z) \quad (11)$$

Jika didefinisikan:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= z^{-n}Q(z) \\ X_2(z) &= z^{-n+1}Q(z) \\ &\vdots \\ X_{n-1}(z) &= z^{-2}Q(z) \\ X_n(z) &= z^{-1}Q(z) \end{aligned}, \quad (12)$$

maka:

$$\begin{aligned} zX_1(z) &= X_2(z) \\ zX_2(z) &= X_3(z) \\ &\vdots \\ zX_{n-1}(z) &= X_n(z) \end{aligned} \quad (13)$$

Dengan invers transformasi z dari persamaan (13) diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \end{aligned} \quad (14)$$

Invers transformasi z dari hasil substitusi persamaan (12) ke dalam persamaan (10) menghasilkan :

$$x_n(k+1) = -a_n x_1(k) - a_{n-1}x_2(k) - ... - a_1 x_n(k) + u(k) \quad (15)$$

Analog dengan cara untuk mendapatkan persamaan (15), persamaan (9) dapat ditulis dalam bentuk :

$$y(k) = b_0 u(k) + (b_1 - a_1 b_0)x_n(k) + ... + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)x_2(k) + (b_n - a_n b_0)x_1(k) \quad (16)$$

Penggabungan persamaan (14) dan (15) serta persamaan (16) menghasilkan persamaan ruang keadaan dalam bentuk controllable canonical form berikut ini :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

2.2 Bentuk kanonik terobservasi (Observable canonical form)

Transformasi z dari (5) dapat ditulis dalam bentuk :

$$Y(z) = b_0 U(z) + z^{-1}\left(b_1 U(z) - a_1 Y(z) + z^{-1}\left[b_2 U(z) - a_2 Y(z) + z^{-1}\left\{b_1 U(z) - a_1 Y(z) + \ldots\right\}\right]\right) \tag{17}$$

Bila didefinisikan:

$$\begin{aligned} X_n(z) &= z^{-1}\left[b_1 U(z) - a_1 Y(z) + X_{n-1}(z)\right] \\ X_{n-1}(z) &= z^{-1}\left[b_2 U(z) - a_2 Y(z) + X_{n-2}(z)\right] \\ &\vdots \\ X_2(z) &= z^{-1}\left[b_{n-1} U(z) - a_{n-1} Y(z) + X_1(z)\right] \\ X_1(z) &= z^{-1}\left[b_n U(z) - a_n Y(z)\right] \end{aligned} \quad , \tag{18}$$

maka diperoleh hubungan:

$$Y(z) = b_0 U(z) + X_n(z) \tag{19}$$

Substitusi persamaan (19) ke (18) serta mengalikan kedua ruas dengan z, dihasilkan :

$$\begin{aligned}
&zX_n(z) = X_{n-1}(z) - a_1 X_n(z) + (b_1 - a_1 b_0)U(z)\\
&zX_{n-1}(z) = X_{n-2}(z) - a_2 X_n(z) + (b_2 - a_2 b_0)U(z)\\
&\vdots\\
&zX_2(z) = X_1(z) - a_{n-1} X_1(z) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)U(z)\\
&zX_1(z) = -a_n X_n(z) + (b_n - a_n b_0)U(z)
\end{aligned} \tag{20}$$

Invers transformasi z dari persamaan (20) dan (19) berturut-turut menghasilkan persamaan keadaan dan persamaan keluaran dalam bentuk matriks berikut ini :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \tag{21}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{22}$$

Persamaan (21) dan (22) merupakan persamaan ruang keadaan dalam bentuk observable canonical form. Metode untuk menentukan ruang keadaan ini dinamakan metode pemrograman bersarang (nested programming methode).

2.3 Bentuk kanonik Jordan (Jordan canonical form)

Untuk membentuk persamaan ruang keadaan dalam bentuk kanonik Jordan, diasumsikan bahwa terdapat pole (pembuat nol untuk penyebut) dari fungsi transfer (6) yang sama sebanyak m buah sedangkan sisanya berbeda satu sama lain. Sedangkan untuk menyatakan persamaan ruang keadaan dalam bentuk diagonal canonical form diasumsikan pole dari fungsi transfer (6) semuanya berbeda. Karena alasan itulah maka bentuk kanonik diagonal dan bentuk kanonik Jordan, keduanya ditentukan dengan metode perluasan pecahan sebagian. Sub bab ini membahas bentuk kanonik Jordan.

Karena terdapat m buah pole yang sama sedangkan yang lain berbeda, maka persamaan (6) dapat ditulis:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)z^{n-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{n-2} + \ldots + (b_n - a_n b_0)z}{(z-p_1)^m (z-p_{m+1})\ldots(z-p_n)}$$

$$Y(z) \ = \left(b_0 + \frac{c_1}{(z-p_1)^m} + \frac{c_2}{(z-p_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_m}{z-p_1} + \frac{c_{m+1}}{z-p_{m+1}} + \frac{c_{m+2}}{z-p_{m+2}} + \ldots + \frac{c_n}{z-p_n} \right) U(z),$$

dengan pole yang sama adalah $z = p_1$.

Untuk $X_1(z), X_2(z), \ldots, X_m(z)$ didefinisikan:

$$X_1(z) = \frac{U(z)}{(z-p_1)^m}, X_2(z) = \frac{U(z)}{(z-p_1)^{m-1}}, \ldots, X_m(z) = \frac{U(z)}{(z-p_1)} \qquad (23)$$

sedangkan untuk $X_{m+1}(z), X_{m+2}(z), \ldots, X_n(z)$ didefinisikan :

$$X_{m+1}(z) = \frac{U(z)}{z-p_{m+1}}, X_{m+2}(z) = \frac{U(z)}{z-p_{m+2}}, \ldots, X_n(z) = \frac{U(z)}{z-p_n} \qquad (24)$$

Dari persamaan (23) didapat relasi :

$$\frac{X_1(z)}{X_2(z)} = \frac{X_2(z)}{X_3(z)} = \ldots = \frac{X_{m-1}(z)}{X_m(z)} = \frac{1}{z-p_1} \qquad (25)$$

Invers transformasi z dari persamaan (25) dan (24), didapatkan:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + p_1 x_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) + p_1 x_2(k) \\ &\vdots \\ x_{m-1}(k+1) &= x_m(k) + p_1 x_{m-1}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= p_1 x_m(k) + u(k) \\ x_{m+1}(k+1) &= p_{m+1} x_{m+1}(k) + u(k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= p_n x_n(k) + u(k) \end{aligned} \tag{26}$$

Dan invers transformasi z untuk $Y(z)$ didapatkan :

$$y(k) = b_0 u(k) + c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + ... + c_m x_m(k) + c_{m+1} x_{m+1}(k) + ... + c_n x_n(k) \tag{27}$$

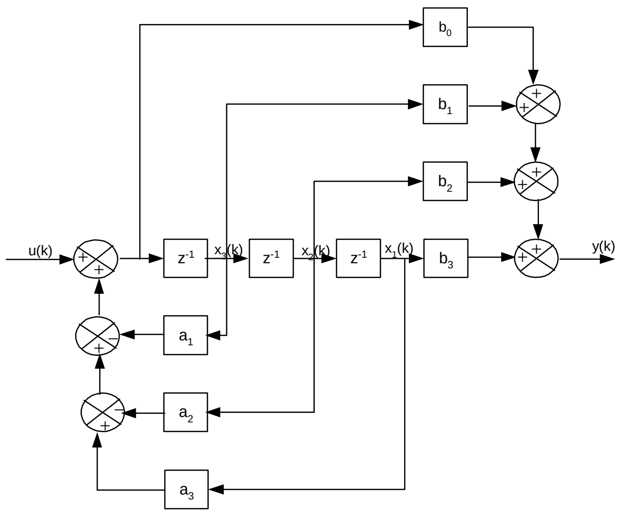
Penggabungan persamaan (26) dan (27) menghasilkan persamaan ruang keadaan dalam bentuk Jordan canonical form berikut ini:

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \end{gathered} \tag{28}$$

Metode untuk mendapatkan persamaan (28) dinamakan metode perluasan pecahan bagian (partial fraction expansion methode).

Berikut ini diberikan contoh metode penentuan bentuk persamaan ruang keadaan waktu diskrit .

1. Misalkan diketahui suatu sistem dengan blok diagram seperti Gambar 3.



Gambar 3. Blok diagram sistem kontrol

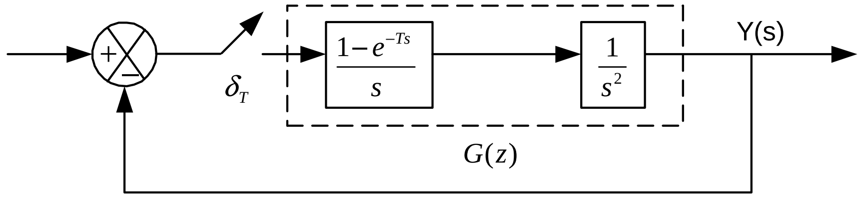
Maka persamaan keadaan dan persamaan keluaran sistem dapat ditentukan sebagai berikut :

$$x_3(k+1) = u(k) - a_1x_3(k) - a_2x_2(k) + a_3x_1(k)$$
$$x_2(k+1) = x_3(k)$$
$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$\begin{aligned} y(k) &= b_3x_1(k) + b_2x_2(k) + b_1x_3(k) + b_0x_3(k+1) \\ &= b_3x_1(k) + b_2x_2(k) + b_1x_3(k) + b_0\{u(k) - a_1x_3(k) - a_2x_2(k) + a_3x_1(k)\} \\ &= (b_3 + a_3b_0)x_1(k) + (b_2 - a_2b_0)x_2(k) + (b_1 - a_1b_0)x_3(k) + b_0u(k) \end{aligned}$$

Sehingga persamaan keadaan dan persamaan outputnya adalah :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_3 + a_3b_0 & b_2 - a_2b_0 & b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + b_0u(k)$$



Gambar 4. Sistem kontrol waktu diskrit

2. Analog dengan contoh pertama, bila sistem kontrol waktu diskrit ditunjukkan oleh Gambar 4, maka representasi ruang keadaannya dapat ditentukan dengan cara berikut:

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s^2}\right] = (1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s^3}\right) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{2}{s^3}\right) = \tfrac{1}{2}(1-z^{-1})\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$
$$= \tfrac{1}{2}\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^2} = \tfrac{1}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2} = \frac{-1}{2(z-1)} + \frac{z}{(z-1)^2}$$

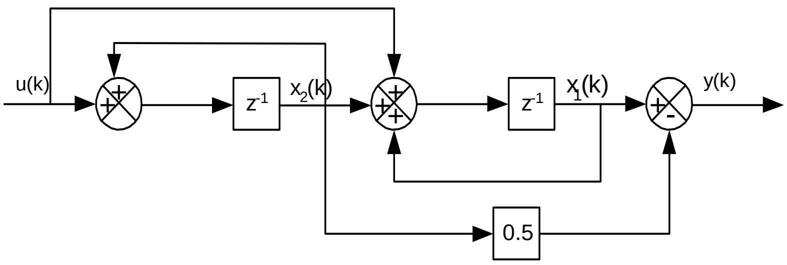
Karena $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$, maka persamaan terakhit dapat ditulis:

$$Y(z) = \frac{-1}{2(z-1)}U(z) + \frac{z}{(z-1)^2}U(z)$$

Dengan menggunakan metode expansi pecahan parsial yang digunakan dalam pembuktian Jordan Canonical Form, diperoleh bentuk persamaan ruang keadaan::

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Blok diagram dari contoh kedua adalah :



3. KETIDAKTUNGGALAN PERSAMAAN RUANG KEADAAN

Bila diberikan suatu fungsi transfer dari keluaran ke masukan, representasi ruang keadaan tidaklah tunggal. Akan ditunjukkan bahwa untuk suatu fungsi transfer yang diberikan dimungkinkan terdapat lebih dari satu persamaan ruang keadaan yang berbeda.

Perhatikan sistem persamaan seperti (2). Jika vektor $\hat{x}(k)$ berdimensi sama dengan $x(k)$, maka dapat dibuat hubungan antara keduanya sebagai berikut:

$$x(k) = P\hat{x}(k) \tag{29}$$

dimana P matriks non singular.

Dengan substitusi persamaan (29) ke persamaan (2) dan mengalikan kedua ruas dari kiri dengan P^{-1} diperoleh persamaan:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{G}\hat{x}(k) + \hat{H}u(k) \tag{30}$$

dengan $\hat{G} = P^{-1}GP,\ \hat{H} = P^{-1}H$

Analog dengan persamaan keadaan, untuk keluaran didapatkan persamaan baru :

$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + Du(k) \tag{31}$$

dengan $\hat{C} = CP,\ \hat{D} = D$.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 97 - 109, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518

Jadi telah ditunjukkan bahwa persamaan ruang keadaan yang diberikan persamaan (2) ekivalen dengan persamaan ruang keadaan persamaan (30) dan (31).

4. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan:

1. Pengetahuan tentang transformasi z sangat diperlukan dalam langkah-langkah pembuktian untuk menentukan bentuk perssamaan ruang keadaan waktu diskrit.
2. Bentuk kanonik diagonal merupakan kasus kusus bentuk kanonik Jordan.
3. Vektor keadaan $x(k)$ dan $\hat{x}(k)$ dihubungkan dengan relasi (29). Karena matriks P adalah matriks sebarang *nxn*, maka terdapat tak berhingga banyaknya persamaan ruang keadaan untuk suatu sistem yang diberikan.

Jika dalam penerapannya diinginkan bentuk diagonal dari matriks keadaan G, maka dapat dipilih matriks P sedemikian sehingga $P^{-1}GP =$ matriks diagonal. Jika tidak dimungkinkan untuk mendiagonalkan G, maka $P^{-1}GP$ dapat ditransformasi menjadi bentuk kanonik Jordan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Katsuhiko Ogata, *Discrete Time Control Systems*, Prentice Hall Inc, 1995.
2. R.W.Brocket, *Finite Dimensional Linear Systems*, John Wiley and Sons Inc, 1970.