

MODEL PERAMBATAN PANAS PADA PROSES PENGERINGAN BALOK KAYU

Edi Cahyono

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Haluoleo, Kendari

Solekan

Departemen Pengeringan Kayu, PT Harrison & Gil, Semarang

Abstrak

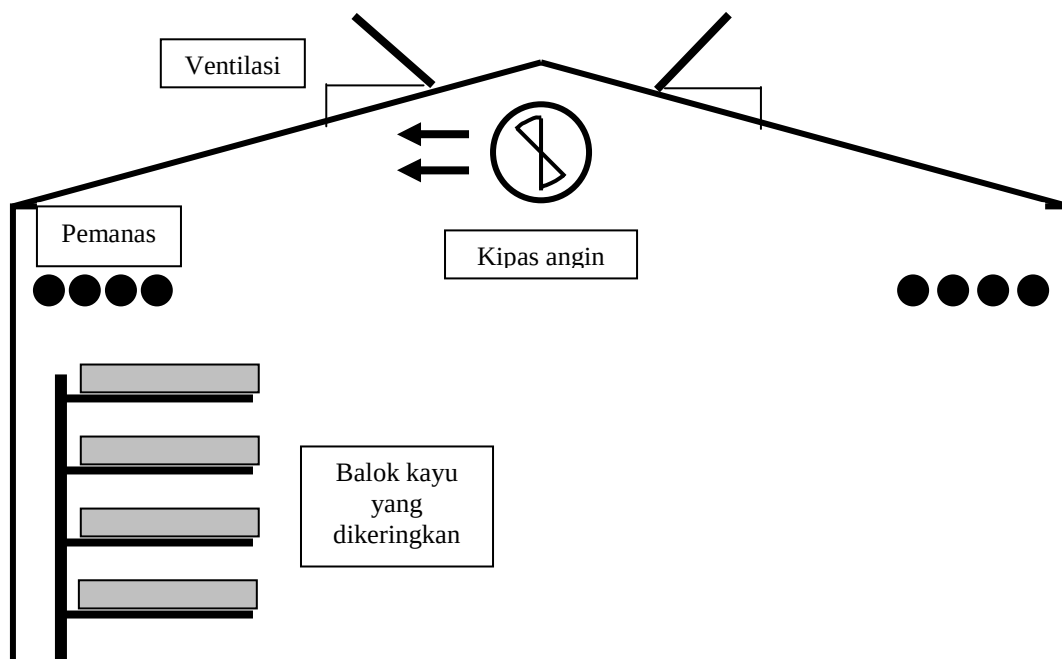
Tulisan ini membahas aplikasi persamaan panas pada proses pengeringan balok kayu, yang sering digunakan pada industri mebel. Solusi dari model ini dapat digunakan untuk memprediksi panas di pusat balok. Informasi ini penting untuk menentukan efisiensi proses pengeringan di ruangan pengering (*kiln chamber*), yaitu untuk menjawab kapan proses ini dari sudut pandang kualitas dan ekonomi dapat dihentikan. Meneruskan proses yang sudah cukup, akan mengeluarkan banyak energi, yang meningkatkan biaya. Sedangkan menghentikan proses di mana kayu belum cukup kering akan mengakibatkan kayu bengkok setelah beberapa lama. Kalau hal ini terjadi, akan sangat menurunkan kualitas mebel yang dihasilkan, khususnya mebel dengan ukiran yang berkualitas tinggi.

1. PENDAHULUAN

Penulisan makalah ini dimotivasi oleh upaya pengumpulan topik-topik di industri yang bisa dipelajari dari sudut pandang matematika. Atau bahkan suatu pencarian masalah industri yang dapat dipecahkan dengan menggunakan pengetahuan matematika; pemodelan maupun metode-metode matematika. Topik-topik ini selanjutnya diharapkan akan memberikan di satu sisi sumber bahan penelitian matematika industri, dan di sisi lain yang sama pentingnya adalah suatu cara meningkatkan kinerja industri yang bersangkutan. Topik dalam makalah ini diperoleh dari kunjungan penulis ke perusahaan mebel PT Harrison & Gil, Semarang. Perusahaan ini memproduksi mebel terutama *frame* cermin dengan bahan baku utama kayu yang diukir dengan kualitas tinggi. Dengan kualitas yang demikian, kerusakan produk seperti pembengkokan kayu setelah beberapa lama yang sering diakibatkan oleh kurang sempurnanya proses pengeringan tidak dapat ditoleransi. Karena hal ini akan sangat menurunkan kualitas produk yang berakibat mengganggu strategi pemasaran jangka panjang.

Untuk memperoleh bahan kayu dengan kualitas yang tinggi seperti di atas proses pengeringan kayu tersebut menjadi topik yang sangat penting. Proses yang terlalu cepat mengakibatkan permukaan kayu pecah-pecah. Sedangkan proses yang terlalu lambat bisa menyebabkan tumbuhnya jamur pada permukaan kayu. Lebih dari itu, pengeringan kayu yang terkontrol dengan baik juga membuat proses penyelesaian akhir (= *finishing*) suatu produk, seperti pengecatan, menjadi lebih efektif, karena bahan-bahan seperti cat akan melekat ke kayu lebih baik, [5].

Pengeringan kayu ini dilakukan di ruangan pengering yang sering disebut *kiln chamber*, selanjutnya akan kita sebut oven pengering. Skemanya diberikan dalam Gambar 1. Ruangan ini dilengkapi dengan lubang ventilasi dan kipas angin. Keduanya berfungsi untuk pengaturan kelembaban udara di dalam oven. Selain itu terdapat juga pemanas, alat pengukur temperatur dan kelembaban baik kayu maupun udara di dalam oven.



Gambar 1. Skema oven pengering.

Sebagian dari tulisan ini juga disajikan di pustaka [1], yang sedang dipersiapkan sebagai bahan perkuliahan Pengantar Matematika Industri di Jurusan Matematika Universitas Haluoleo. Sedangkan tulisan ini akan lebih banyak terfokus pada perambatan panas di media 1 dan 2 dimensi dengan beberapa asumsi yang akan dibahas kemudian.

2. MODEL PERAMBATAN PANAS PADA MEDIA SATU DIMENSI

Misalkan $\bar{u} = \bar{u}(\bar{z}, \bar{t})$ menyatakan panas di titik $\bar{z} \in \Re$ pada saat $\bar{t}$.

Persamaan panas secara umum dituliskan dalam bentuk

$$\bar{u}_{\bar{t}} = c^2 \bar{u}_{\bar{z}\bar{z}}, \quad (2.1)$$

dengan c adalah difusivitas (penyebaran) termal yang bergantung pada jenis benda atau materi.

Dalam pembahasan perambatan panas pada media satu dimensi berikut ini, kita akan memperhatikan masalah nilai awal dan masalah nilai batas sebagai berikut

$$\bar{u}_{\bar{t}} = c^2 \bar{u}_{\bar{z}\bar{z}}, \quad 0 < \bar{z} < 2b \quad (2.2)$$

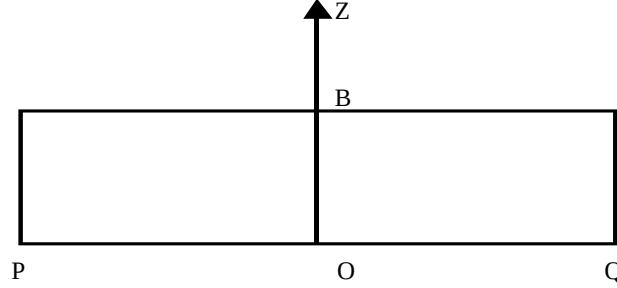
$$\bar{u} = q, \quad \bar{z} = 0 \text{ dan } \bar{z} = 2b \text{ untuk semua } t, \quad (2.3)$$

$$\bar{u} = p, \quad 0 < \bar{z} < 2b \text{ pada saat } \bar{t} = 0, \quad (2.4)$$

dengan b , p dan q konstan. Penurunan persamaan panas ini bisa dilihat pada buku-buku literature seperti [2]. Persamaan panas ini sering digunakan dalam beberapa aplikasi di industri sebagai contoh lihat [4].

Kalau seseorang ingin menghubungkannya dengan perambatan panas pada balok kayu seperti dalam motivasi penulisan makalah ini, maka asumsi berikut perlu selalu diingat. Balok kayu yang diperhatikan haruslah sangat panjang dan sangat lebar dibandingkan dengan tingginya yang sama dengan $2b$ satuan. Dengan demikian diasumsikan bahwa tidak ada perambatan panas sejajar sumbu mendatar

x dan y , tetapi yang ada hanyalah perambatan panas sepanjang sumbu vertikal z , lihat Gambar 2. Konstanta p adalah temperatur di dalam balok saat $\bar{t} = 0$, sedangkan q merupakan temperatur di luar balok.



Gambar 2. Penampang perambatan panas hanya pada arah vertikal pada ruas garis OB yang panjangnya sebesar $2b$. Lebar balok PQ sangat besar dibandingkan tinggi balok OB.

Dengan transformasi $\bar{z} = c(q - p)z$, $\bar{t} = t$ dan $\bar{u} = (q - p)u + p$ persamaan (2.2)-(2.4) ekuivalen dengan

$$u_t = u_{zz}, \quad 0 < z < 2b, \quad (2.5)$$

$$u = 1, \quad z = 0 \text{ dan } z = 2b \text{ untuk semua } t, \quad (2.6)$$

$$u = 0, \quad 0 < z < 2b \text{ pada saat } t = 0. \quad (2.7)$$

Ini sering disebut persamaan panas dalam bentuk standar. Untuk selanjutnya kita akan menggunakan persamaan dalam bentuk standar ini, meskipun tidak selalu menyebutkan kata standar.

Masalah nilai awal dan masalah nilai batas (2.5), (2.6) dan (2.7) di atas akan kita selesaikan secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga, yang dalam bahasa Inggris dikenal dengan nama *Finite Difference method*. Sekarang kita akan membahas dahulu secara singkat metode beda hingga yang akan kita gunakan. Untuk kejelasan penulisan, kita akan menggunakan $u(z = z_n, t = t_p) = U_n^p$, dengan $z_n = z_0 + n(\Delta z)$ dan $t_p = t_0 + p(\Delta t)$ dengan $n = 1, 2, \dots, N$ sedangkan $p = 1, 2, \dots, P$.

Turunan pertama u terhadap t dan turunan kedua u terhadap x secara berturut-turut didekati sebagai berikut

$$u_t(z = z_n, t = t_{p+1}) = \frac{U_n^{p+1} - U_n^p}{\Delta t}$$

(2.8)

$$u_{zz}(z = z_n, t = t_p) = \frac{U_{n+1}^p - 2U_n^p + U_{n-1}^p}{(\Delta z)^2}.$$

(2.9)

Dengan demikian persamaan (2.1) dapat didekati dengan

$$\frac{U_n^{p+1} - U_n^p}{\Delta t} = \frac{U_{n+1}^p - 2U_n^p + U_{n-1}^p}{(\Delta z)^2}$$

(2.10)

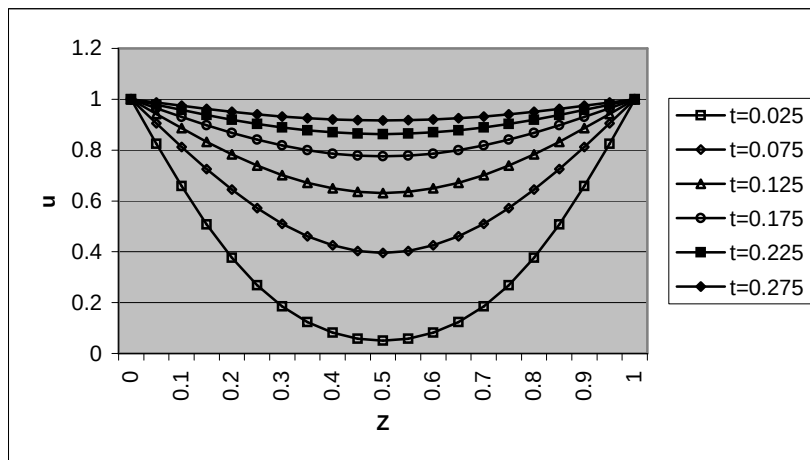
yang secara eksplisit terhadap U_n^{p+1} dapat dituliskan dengan

$$U_n^{p+1} = U_n^p + \left[U_{n+1}^p - 2U_n^p + U_{n-1}^p \right] \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}.$$

(2.11)

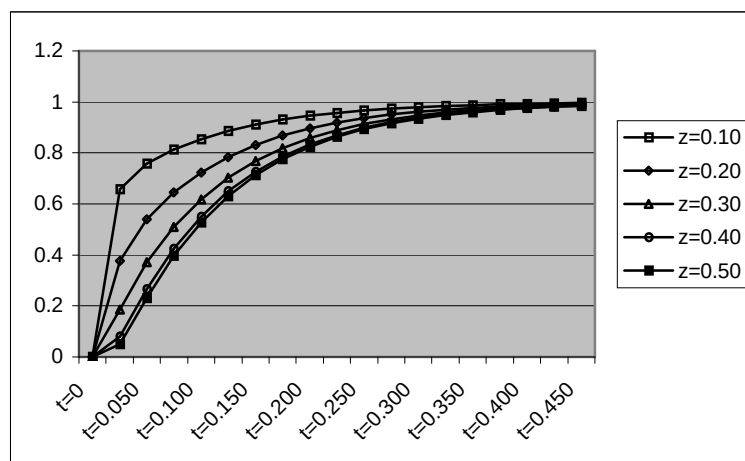
Lebih detail metode beda hingga ini dapat dilihat pada buku-buku literature, sebagai contoh [3].

Sekarang kita akan melihat solusi numerik dari permasalahan di atas. Dalam hal ini kita menggunakan $a=0,5$, $N=21$ ($dx=0,05$). Temperatur ruas garis OB pada Gambar 2 dalam berbagai waktu ($t = 0,025$ sampai dengan $0,275$) diberikan pada Gambar 3. Perhatikan bahwa temperatur di sepanjang ruas garis OB terus naik dan menuju 1, temperatur di ujung-ujung ruas garis. Semakin dekat suatu titik ke ujung-ujung ruas garis, semakin cepat laju pertambahan panasnya. Hal ini dapat dengan mudah dimengerti, karena panas merambat dari temperatur tinggi di titik-titik O dan B menuju ke temperatur rendah sepanjang ruas garis tersebut. Titik di tengah-tengah ruas garis OB , $z = 0,5$ yang merupakan titik terjauh dari ujung-ujung ruas garis, mengalami kenaikan suhu yang paling lambat dibandingkan dengan titik-titik yang lain. Namun demikian, setelah beberapa lama perbedaan temperaturnya dengan titik-titik yang lain sangatlah kecil.



Gambar 3. Perambatan panas sepanjang ruas garis vertikal OB di Gambar 2 dengan $b=0,5$.

Gambar 4 menunjukkan dinamika panas pada beberapa titik, termasuk di titik pusat $z=0,5$. Di titik $z=0,1$, $z=0,2$ dan $z=0,3$ temperaturnya tiba-tiba meningkat dengan sangat cepat kemudian melambat yang pada akhirnya menuju 1. Sedangkan di titik-titik $z=0,4$ dan $z=0,5$ temperaturnya meningkat secara perlahan, menunggu datangnya panas dari ujung-ujung ruas garis. Pertambahan suhu ini kemudian semakin cepat, lalu melambat lagi dan pada akhirnya mendekati 1.



Gambar 4. Dinamika panas di titik tengah ruas garis OB Gambar 2 dengan $b=0,5$.

3. MODEL PERAMBATAN PANAS PADA MEDIA DUA DIMENSI

Sedangkan untuk media dua dimensi kita memperhatikan domain sebuah persegi panjang tegak dengan panjang $2a$ dan tinggi $2b$, lihat Gambar 5. Daerah dalam persegipanjang ini memenuhi persamaan panas, sedangkan temperatur di sisi-sisi luarnya adalah 1 satuan. Hal ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$u_t = u_{xx} + u_{zz}$$

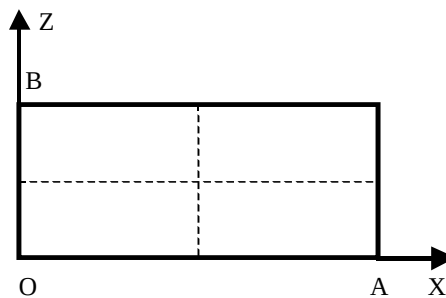
(3.1)

$u = 1$, pada $x = 0, x = 2a, z = 0$ dan $z = 2b$ untuk semua t .

(3.2)

$u = 0$, di daerah dalam persegi panjang pada saat $t = 0$.

(3.3)



Gambar 5. Daerah persegipanjang yang diperhatikan untuk perambatan panas

Di sini kita menggunakan asumsi bahwa balok kayu yang kita perhatikan sangat panjang dibanding tinggi dan lebarnya. Sehingga perambatan panas sejajar sumbu horisontal y diabaikan, dan yang kita perhatikan hanyalah perambatan sejajar sumbu x dan z . Perhatikan bahwa kita tidak menggunakan lagi asumsi balok yang sangat lebar seperti pada media satu dimensi.

Metode beda hingga yang akan kita gunakan adalah sebagai berikut. Kita menggunakan penulisan $u(x = x_m, z = z_n, t = t_p) = U_{m,n}^p$, dengan $x_m = x_0 + m(\Delta x)$, sedangkan $m=1,2,\dots,M$. Serupa dengan bahasan sebelumnya, turunan pertama u terhadap t dan turunan kedua u terhadap x secara berturut-turut didekati sebagai berikut :

$$u_t(x = x_m, z = z_n, t = t_{p+1}) = \frac{U_{m,n}^{p+1} - U_{m,n}^p}{\Delta t}$$

(3.4)

$$u_{xx}(x = x_m, z = z_n, t = t_p) = \frac{U_{m+1,n}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m-1,n}^p}{(\Delta x)^2}$$

(3.5a)

$$u_{zz}(x = x_m, z = z_n, t = t_p) = \frac{U_{m,n+1}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m,n-1}^p}{(\Delta z)^2}.$$

(3.5b)

Dengan demikian persamaan (3.1) dapat didekati dengan

$$\frac{U_{m,n}^{p+1} - U_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{U_{m+1,n}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m-1,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{m,n+1}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m,n-1}^p}{(\Delta z)^2},$$

(3.6)

yang secara eksplisit terhadap $U_{m,n}^{p+1}$ dapat dituliskan dengan

$$U_{m,n}^{p+1} = U_{m,n}^p + \left[\begin{aligned} & \left[U_{m+1,n}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m-1,n}^p \right] \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ & + \left[U_{m,n+1}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m,n-1}^p \right] \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \end{aligned} \right].$$

(3.7)

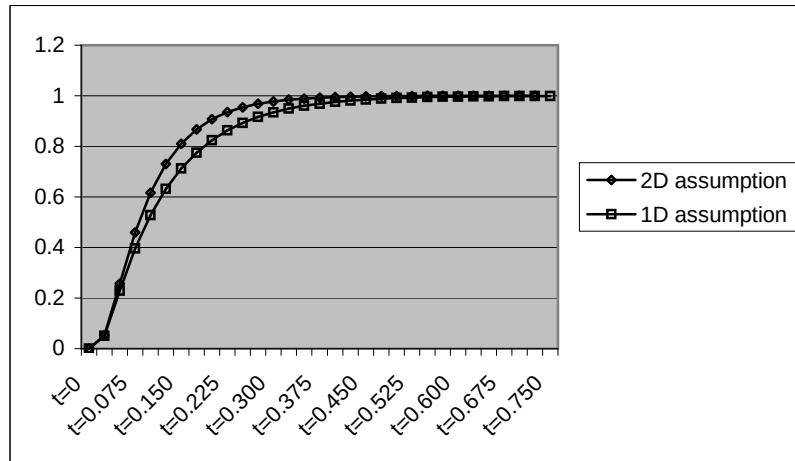
Dengan mengambil $\Delta z = \Delta x$, persamaan (3.7) menjadi

$$U_{m,n}^{p+1} = U_{m,n}^p + \left[\begin{aligned} & \left[U_{m+1,n}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m-1,n}^p \right] \\ & + \left[U_{m,n+1}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m,n-1}^p \right] \end{aligned} \right] \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

(3.8)

Dinamika panas di titik pusat persegi panjang ini, $x = 0,5$ dan $z = 1,5$ diberikan pada Gambar 6 (asumsi 2 dimensi/ 2D assumption). Secara kualitatif, hal ini sama dengan yang ditunjukkan oleh dinamika panas di pusat ruas garis OB di bahasan terdahulu (asumsi 1 dimensi/ 1D assumption). Namun demikian, pertambahan panas pada pusat persegipanjang ini lebih cepat, lihat Gambar 6.

Kenyataan ini disebabkan oleh pertambahan panas dari arah horisontal x yang diabaikan pada asumsi pada media satu dimensi.



Gambar 6. Temperatur u di titik pusat persegi panjang pada Gambar 4 dan pusat ruas garis OB Gambar 2. Dalam hal ini $a=0,5$ dan $b=1,5$.

4. RENCANA PENELITIAN MASA MENDATANG

Kita telah membahas perambatan panas pada ruas garis dan persegi panjang berdasarkan model perambatan panas pada media satu dan dua dimensi. Dalam model ini kita memperhatikan nilai batas konstan. Solusi dari model ini dicari dengan menggunakan metode numerik beda hingga. Telah ditunjukkan pula bahwa nilai pada suatu ruas garis menuju pada nilai di ujung-ujung ruas garis tersebut, yang berarti bahwa temperatur di ruas garis itu semakin lama semakin mendekati temperatur di ujung-ujungnya. Titik di tengah-tengah ruas garis tersebut, merupakan titik terjauh dari ujung-ujung ruas garis, mengalami kenaikan temperatur yang paling lambat dibandingkan titik-titik yang lain. Demikian pula halnya solusi di daerah persegi panjang menuju pada nilai menuju nilai di sisi-sisi persegi panjang. Ini berarti temperatur di daerah persegi panjang itu semakin lama semakin mendekati temperatur di daerah luarnya yang dijaga konstan. Titik pusat di tengah-tengah persegi panjang merupakan titik yang paling lambat mengalami kenaikan panas. Titik ini menjadi pusat perhatian dalam pengukuran untuk mengetahui suhu maupun kadar air kayu yang dikeringkan.

Dalam aplikasinya di proses pengeringan kayu nilai di ujung-ujung ruas garis atau di sisi-sisi luar persegi panjang tersebut adalah temperatur yang diberikan pada sekeliling balok-balok kayu yang dikeringkan. Panas tersebut akan merambat ke dalam kayu. Temperatur yang tinggi ini akan membuat air di permukaan kayu menguap yang diikuti oleh mengalirnya air dari dalam ke permukaan kayu, sehingga menurunkan kandungan air kayu. Dengan mengetahui berapa lama perambatan panas ke dalam pusat balok kayu, kita dapat menggunakannya untuk memprediksi berapa lama perlakuan yang harus diberikan untuk proses pengeringan ini.

Proses pengeringan di daerah paling dalam dan daerah dekat sisi-sisi balok kayu perlu waktu yang hampir bersamaan. Karena bagian luar yang terlalu kering akan menutup pori-pori kayu di daerah luar, sehingga tidak memungkinkan terjadinya proses penguapan air di sisi-sisi luar kayu.

DAFTAR PUSTAKA :

1. Edi Cahyono, Pengantar Matematika Industri, bahan kuliah pada Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Haluoleo, 2003.
2. E. Kreyszig, Advance Engineering Mathematics, John Wiley & Son, Singapore, 1994.
3. K. W. Morton & D. F. Mayers, Numerical Solution of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
4. Ari Wibowo dan Ponidi, Dinamika panas pada pusat kaleng dalam proses sterilisasi makan kaleng yang berbentuk tabung. MATEMATIKA: Jurnal Matematika dan Pembelajarannya, ISSN: 0852-7792, Th VIII, Edisi Khusus, Juli 2002.
5. _____, *Dry Kiln Operator's Manual* oleh Forest Products Laboratory, Forest Service dan US Department of Agriculture 1988.