JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 3, 144 - 156, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

HUKUM SYLVESTER INERSIA

R. Heru Tjahjana
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Matriks representasi suatu bentuk kuadrat dapat disajikan sebagai matriks diagonal. Elemen pada diagonal utama matriks representasi tersebut dapat dipandang sebagai fungsi linear yang tidak tunggal. Karena tidak tunggal maka diperlukan teorema atau hukum yang mengatur karakterisasi representasi yang dapat disajikan dengan tidak tunggal. Hukum inilah yang dikenal sebagai hukum Sylvester Inersia.Hukum Sylvester tentang Inersia menyatakan bila U ruang produk dalam real dan $\phi(x,y)$ *form* bilinear simetri di U maka terdapatlah suatu basis B={$f_1,\ldots,f_n$} dari U sedemikian hingga $[\phi]_B^B$ adalah matriks diagonal dengan $\phi(f_i,f_j)= \varepsilon_i \delta_{ij}$, dengan $\varepsilon_i =1$, jika $0\leq i\leq k$, $\varepsilon_i =-1$, jika $k<i\leq r$, dan $\varepsilon_i =0$, jika $r<i\leq n$, lebih lanjut k dan r tertentu dengan tunggal oleh ϕ.

Kata kunci: Ruang produk dalam, *form* bilinear simetri, matriks diagonal

1. PENDAHULUAN

Bentuk kuadrat dalam suatu produk dalam dapat direpresentasikan oleh matriks representasi. Matriks representasi tersebut dapat disajikan sebagai matriks diagonal. Elemen-elemen non diagonal utama adalah elemen nol sedangkan elemen-elemen diagonal utama pada matriks diagonal itu dapat dipandang sebagai fungsi linear. Permasalahannya adalah fungsi linear yang terdapat dalam diagonal utama dapat disajikan secara tidak tunggal. Karena penyajiannya tidak tunggal maka diperlukan aturan atau hukum yang mengatur bilamana suatu representasi dapat disajikan dengan tidak tunggal. Hukum Sylvester Inersia akan menjawab permasalahan tersebut dengan mengatur karakter representasi yang dapat disajikan secara tidak tunggal.

2. PEMBAHASAN

Agar dalam membaca tulisan selanjutnya tidak dijumpai salah pengertian berikut ini akan ditulis dulu beberapa definisi yang perlu diketahui.

Definisi 2.1.1(Fuhrmann,1996)

1. Misalkan U ruang Vektor atas lapangan bilangan komplek K. Produk dalam U adalah fungsi $<\bullet,\bullet>$: $U\times U\rightarrow K$ yang memenuhi $<x,x> \geq 0$ dan $<x,x>=0$ jika

dan hanya jika $x=0$, $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$, $<x,y>=\overline{<y,x>}$, untuk setiap $x,y\in U$, untuk setiap $\alpha,\beta\in K$ dan ruang vektor U atas K dengan produk dalam disebut ruang produk dalam.

2. Diberikan tranformasi linear T dalam ruang produk dalam U atas lapangan K, didefinisikan *field-valued function* ϕ pada $UxU\to K$ dengan $\phi(x,y)=<Tx,y>$. Jika memenuhi $<\alpha x_1+\beta x_2,y>=\alpha<x_1,y>+\beta<x_2,y>$ maka ϕ dikatakan linear terhadap x. Jika memenuhi $<x,\alpha y_1+\beta y_2>=\alpha<x,y_1>+\beta<x,y_2>$ maka ϕ dikatakan linear terhadap y. Jika memenuhi $<x,\alpha y_1+\beta y_2>=\overline{\alpha}<x,y_1>+\overline{\beta}<x,y_2>$ maka ϕ dikatakan antilinear terhadap y. Jika ϕ linear terhadap x dan ϕ antilinear terhadap y maka ϕ disebut fungsi *sesquilinear* atau *form.* Jika ϕ linear terhadap x dan y maka ϕ disebut fungsi bilinear.
3. Bentuk kuadrat dalam ruang produk dalam U adalah suatu fungsi berbentuk $\hat{\phi}(x)=\phi(x,x)$, dengan $\phi(x,y)$ memenuhi $\phi(x,y)=<Tx,y>=<y,Tx>$.
4. Jika $B=\{f_1,\ldots, f_n\}$ basis ruang produk dalam U yang berdimensi hingga, T tranformasi linear di U. Didefinisikan $\phi_{ij}=<Tf_i,f_j>$, maka matriks (ϕ_{ij}) disebut matriks representasi dari *form* ϕ terhadap basis B, matriks ini diberi notasi $[\phi]_B^B$.

Catatan 2.1.1 (Catatan untuk Teorema Spektral, Setiadji,1999)

Jika semua nilai karakteristik $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \neq 0$ maka $T=\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\ldots+\lambda_r E_r \cong$ matriks A yang

similar dengan matriks $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$.

Selanjutnya jika ϕ bentuk kuadrat pada ruang produk dalam U maka terdapatlah suatu basis

$B=\{f_1,\ldots, f_n\}$ sedemikian hingga matriks representasi terhadap basis B tersebut adalah matriks diagonal, hal ini disajikan dalam teorema 3.1.1 berikut.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 3, 144 - 156, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

Teorema 2.1.1

Jika ϕ bentuk kuadrat pada ruang produk dalam U maka terdapat basis B={f_1,…, f_n} sedemikian hingga $[\phi]_B^B$ diagonal

Bukti :

Misalkan ϕ(x,y) bentuk kuadrat pada U. Teorema akan dibuktikan dengan induksi. Misalkan lagi dim(U)=n. Jika n=1 maka $[\phi]_B^B$ adalah matriks bertipe 1x1 yang merupakan matriks diagonal. Misalkan teorema terbukti untuk ruang berdimensi $\leq$ n-1 dan misalkan lagi ϕ bentuk kuadrat berdimensi n, dan B={f_1,…, f_n} basis di U. Akan terdapat dua kasus.

Kasus pertama dimisalkan tidak semua elemen-elemen pada matriks $[\phi]_B^B$ adalah nol, artinya terdapat indeks i sedemikian hingga $\phi(f_i,f_i)\neq 0$.

Tanpa kehilangan umumnya bukti didefinisikan basis baru B'={f_1',…, f_n'} dengan

$$f_i' = \begin{cases} f_1 & , i = 1 \\ f_i - \dfrac{\phi(f_1, f_i)}{\phi(f_1, f_1)} f_1 & , 1 < i \leq n \end{cases}$$

. B' merupakan basis karena B' bebas linear, karena

$f_1'=f_1$,artinya f_1' sebagai kombinasi linear dari f_1

$f_2'=f_2-\dfrac{\phi(f_1, f_2)}{\phi(f_1, f_1)} f_1$, artinya f_2' sebagai kombinasi linear dari f_2 dan f_1

$f_3'=f_3-\dfrac{\phi(f_1, f_3)}{\phi(f_1, f_1)} f_1$, artinya f_3' sebagai kombinasi linear dari f_3 dan f_1

$f_n'=f_n-\dfrac{\phi(f_1, f_n)}{\phi(f_1, f_1)} f_1$, artinya f_n' sebagai kombinasi linear dari f_n dan f_1

Perhatikan bahwa kombinasi linear dari {f_1',…, f_n'} dapat disajikan sebagai kombinasi linear {f_1,…, f_n} yang bebas linear. Akibatnya {f_1',…, f_n'} bebas linear.

Selanjutnya

$$[\phi]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} \phi(f_1', f_1') & \phi(f_1', f_2') & \ldots\ldots & \phi(f_1', f_n') \\ \ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots & & & \\ \phi(f_n', f_1') & \phi(f_n', f_2') & \ldots\ldots & \phi(f_n', f_n') \end{bmatrix}$$

. Berikutnya perhatikan

$$\phi(f_1', f_2') = \phi\left(f_1, f_2 - \frac{\phi(f_1, f_2)}{\phi(f_1, f_1)} f_1\right) = \phi(f_1, f_2) - \phi\left(f_1, \frac{\phi(f_1, f_2)}{\phi(f_1, f_1)} f_1\right)$$

$$= \phi(f_1, f_2) - \frac{\phi(f_1, f_2)}{\phi(f_1, f_1)} \phi(f_1, f_1) = \phi(f_1, f_2) - \phi(f_1, f_2) = 0$$

Secara analog $\phi(f_1', f_3') = \phi(f_1', f_4') = \ldots = \phi(f_1', f_n') = 0$

$$\phi(f_2', f_1') = \phi(f_3', f_1') = \ldots = \phi(f_n', f_1') = 0$$

Akibatnya $[\phi]_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} \phi(f_1', f_1') & 0 \\ 0 & [\phi \mid M]_{Bo'}^{Bo'} \end{pmatrix}$ dengan M= L(f_1',…, f_n') dan Bo'={f_2',…, f_n'}. Berdasarkan hipotesa induksi $[\phi|M]_{Bo'}^{Bo'}$ merupakan matriks diagonal maka seluruh $[\phi]_{B'}^{B'}$ terbukti matriks diagonal.

Kasus kedua dimisalkan semua elemen-elemen pada matriks $[\phi]_B^B$ adalah nol, artinya untuk semua indeks i $\phi(f_i,f_i)=0$.

Misalkan $\phi(f_i ,f_i)=0,\forall i$. Jika $\phi(f_i ,f_j)=0,\forall i,j$ maka ϕ adalah *form* nol disini $[\phi]_B^B$ adalah matriks nol, dan matriks nol pasti matriks diagonal. Kita misalkan terdapat pasangan i,j sedemikian hingga $\phi(f_i,f_j)\neq 0$. Tanpa kehilangan umumnya bukti, kita misalkan i=1 dan j=2. Untuk penyederhanaan notasi ditulis $a=\phi(f_1,f_2)$. Tulis $f_1'=(f_1+ f_2)/2$ dan $f_2'=(f_1- f_2)/2$, maka $\phi(f_1', f_1')=a/2$, $\phi(f_1', f_2')=0$, $\phi(f_2' , f_2')= -a/2$. Selanjutnya dipilih vektor-vektor lain pada basis-basis baru menjadi bentuk

$f_i' = f_i-\alpha_i f_1- \beta_i f_2$ untuk i=3,4,5,… n, diperoleh $\phi(f_1',f_i')=\phi(f_2',f_i')=0$, sehingga didapat pasangan persamaan (sistem persamaan) sebagai berikut

$0=\phi(f_1+ f_2, f_i-\alpha_i f_1- \beta_i f_2)= \phi(f_1, f_i)+\phi(f_2+ f_i) -\alpha_i \phi(f_2, f_1-)- \beta i\, \phi(f_2, f_1)$

$0=\phi(f_1- f_2, f_i-\alpha_i f_1- \beta_i f_2)= \phi(f_1, f_i)+\phi(f_2+ f_i) +\alpha_i \phi(f_2, f_1-)- \beta i\, \phi(f_2, f_1)$

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 3, 144 - 156, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

Sistem ini mempunyai solusi $\alpha_i=\phi(f_2,f_i)/\alpha$ dan $\beta_i=\phi(f_1,f_i)/a$. Sekarang didefinisikan $B'=\{f_1',\ldots,f_n'\}$ dengan $f_1'=(f_1+f_2)/2$, $f_2'=(f_1-f_2)/2$, dan

$f_i' = f_i - \dfrac{\phi(f_2,f_1)}{a} f_1 - \dfrac{\phi(f_1,f_i)}{a} f_2$, i=3,4,…,n

B' basis U sebab untuk setiap $f_i' \in B'$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linier dari f_i ,f_1,f_2, i=3,4,…,n. Perhatikan bahwa

$$[\phi]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} \phi(f_1',f_1') & \phi(f_1',f_2') & \ldots\ldots & \phi(f_1',f_n') \\ \ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots & & & \\ \phi(f_n',f_1') & \phi(f_n',f_2') & \ldots\ldots & \phi(f_n',f_n') \end{bmatrix}$$

$$[\phi]_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & \\ 0 & & [\phi \mid M]_{Bo'}^{Bo'} \end{pmatrix}$$

dengan $Bo'=\{f_3',\ldots,f_n'\}$ dan $M=L(f_3',\ldots,f_n')$.

Berdasarkan hipotesa induksi $[\phi|M]_{Bo'}^{Bo'}$ merupakan matriks diagonal maka seluruh $[\phi]_{B'}^{B'}$ terbukti matriks diagonal.

Akibat 2.1.1

Misalkan ϕ bentuk kuadrat yang terdefinisi pada ruang produk dalam U, $B=\{f_1,\ldots,f_n\}$adalah sebarang basis U, $B'=\{g_1,\ldots,g_n\}$ adalah basis yang mendiagonalkan ϕ. Misalkan $\phi_i=\phi(g_i,g_i)=\phi(I(g_i),g_i)$, jika

$[x]^B = \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ . \\ . \\ . \\ \varsigma_n \end{pmatrix}$, $[x]^{B'} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \eta_n \end{pmatrix}$, dan $[I]_B^{B'}$ =(a_{ij})maka $\phi(x,x)=\sum_{i=1}^{n} \phi_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varsigma_J)^2$

Bukti :

ϕ(x,x)=<Tx,x>=< $[\phi]_B^B$ $[x]^B$,$[x]^B$> =< $[\phi]_{B'}^{B'}$ $[x]^{B'}$, $[x]^{B'}$>=<(ϕ_{ij}) $[x]^{B'}$, $[x]^{B'}$>=

$$< (\phi_{ij})\begin{pmatrix}\eta_1\\ .\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\eta_1\\ .\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix} > = \left((\phi_{ij})\begin{pmatrix}\eta_1\\ .\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix}\right)^t . \begin{pmatrix}\eta_1\\ .\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}\phi_{11} & 0 & ... & 0\\ 0 & \phi_{22} & ... & 0\\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & ... & \phi_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ .\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix}\right)^t . \begin{pmatrix}\eta_1\\ .\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\phi_{11}\eta_1\\ \phi_{22}\eta_2\\ .\\ .\\ \phi_{nn}\eta_n\end{pmatrix}^t . \begin{pmatrix}\eta_1\\ .\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\phi_i\eta_i^{\,2} .$$

Perhatikan bahwa $[x]^{B'}$= $[I]_B^{B'}$ $[x]^B$

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ .\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix} =(a_{ij}) \begin{pmatrix}\varsigma_1\\ .\\ .\\ .\\ \varsigma_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varsigma_1\\ .\\ .\\ .\\ \varsigma_n\end{pmatrix} .$$ Didapat

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\varsigma_i$$

$$\eta_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\varsigma_i \;\; ,\ldots,$$

$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\varsigma_i$ maka $\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varsigma_J$.

Akibatnya ϕ(x,x) = $\sum_{i=1}^{n}\phi_i\eta_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n}\phi_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varsigma_J)^2$.

Selanjutnya jika teorema 2.1.1 dipenuhi maka hasil $\phi(f_i,f_j)$ untuk setiap $f_i \in B$ akan dituliskan dalam teorema 2.1.2. Teorema 2.1.2 berikut merupakan **Hukum Sylvester inersia.**

Teorema 2.1.2(Hukum Sylvester Inersia)

Jika U ruang produk dalam dan ϕ(x,y) fungsi bilinear simetri di U maka terdapatlah suatu basis B ={$f_1,\ldots,f_n$} yaitu basis U sedemikian hingga $[\phi]_B^B$ adalah matriks diagonal dengan

$$\phi(f_i, f_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \text{ dengan } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & 0 \le i \le k \\ -1 & k < i \le r \\ 0 & r < i \le n \end{cases}$$

lebih lanjut k dan r tertentu dengan tunggal oleh ϕ.

Bukti:

Karena ϕ simetri maka terdapat operator T di U sedemikian hingga ϕ(x,y)=<Tx,y>.

Jika diberikan sebarang basis ortonormal B maka $[\phi]_B^B$ adalah matriks simetri.

Misalkan B={$e_1,\ldots,e_k,e_{k+1},\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_n$}terdiri dari vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristik $\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_r,\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_n$

$$\text{maka } [\phi]_B^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_k &&&&&& \\ &&& \lambda_{k+1} &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \lambda_r &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& 0 & \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 0 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa rank $[\phi]_B^B$ = r dan rank suatu matriks tunggal.

Sampai di sini sudah terbukti r tunggal, tinggal dibuktikan terdapat k dengan tunggal yang tertentu oleh ϕ.

Ambil $\mu_i = |\lambda_i|$ dan bentuk

B_1={$\mu_1^{-1}e_1,\ldots, \mu_r^{-1}e_r$}={$|\lambda_1|^{-1}e_1,\ldots, |\lambda_r|^{-1}e_r$} maka

$$[\phi]_{B_1}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ k & \ddots & & & O & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & O & & r-k & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & O \end{bmatrix}.$$

Menurut teorema Spektral k terjamin ada dengan tunggal.□

Definisi 2.1.2

1. Bilangan r dan s=2k-r yang tertentu oleh hukum Sylvester tentang inersia berturut-turut disebut rank dan *signature* dari bentuk kuadrat ϕ. *Signature* bentuk kuadrat ϕ dinotasikan dengan $\sigma(\phi)$ dan s*ignature* matriks Hermitian A dinotasikan sebagai $\sigma(A)$.
2. Matriks bujur sangkar A kongruen dengan B jika terdapat matriks bujursangkar nonsingular R sedemikian hingga B=R*AR

Akibat 2.1.2

1. Dua bentuk kuadrat pada ruang produk dalam U kongruen jika dan hanya jika mempunyai rank dan *signature* yang sama
2. Dua matriks simetri bertipe nxn kongruen jika dan hanya jika mempunyai rank dan *signature* yang sama

Bukti :

Dengan mengingat Teorema 2.1.1 bahwa bentuk kuadrat dapat diwakili oleh matriks diagonal nxn maka untuk membuktikan akibat 2.1.2 cukup dibuktikan dua matriks nxn kongruen jika dan hanya jika rank dan *signature*-nya sama. Dari aljabar linear diketahui bahwa dua matriks kongruen jika dan hanya jika ranknya sama. Karena r sama jika dan hanya jika s sama maka terbukti dua matriks nxn kongruen jika dan hanya jika rank dan *signature*-nya sama.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 3, 144 - 156, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

Dalam teorema 2.1.3 berikut akan ditulis suatu sifat yang berlaku untuk sebarang matriks simetri A bertipe mxm dan X matriks bertipe mxn yang mempunyai rank baris penuh, untuk suatu B matriks simetri nxn yang didefinisikan B=X*AX maka rank dan *signature* A dan B tepat sama.

Teorema 2.1.3

Misalkan A matriks simetri mxm, X matriks bertipe mxn yang mempunyai rank baris penuh, B matrik simetri nxn yang didefinisikan B=X*AX maka rank dan *signature* A dan B tepat sama

Bukti:

Perhatikan bahwa dari B=X*AX didapat Ker X$\subseteq$Ker B, alasannya:

Ambil sebarang Y$\in$Ker X, maka XY=0

BY=(X*AX)Y=X*A(XY)=X*A0=0. Karena BY=0 maka Y$\in$Ker B.

Lagi perhatikan dari B=X*AX didapat Im B$\subseteq$ Im X*, alasannya:

Ambil sebarang Y$\in$Im B maka ada Z $\in R^n$ sedemikian hingga

BZ=Y.

(X*AX)Z=Y

X*(AXZ)=Y

Jadi Y$\in$ Im X*.

Selanjutnya matriks X dapat disajikan sebagai X=$\begin{bmatrix} A_1 & X_1 \end{bmatrix}$,dengan A_1 bertipe mx(n-m) dan X_1 bertipe mxm sehingga ada basis C sedemikian hingga X=$\begin{bmatrix} 0 & X_1 \end{bmatrix}$ invertibel.

X*AX=$\begin{bmatrix} 0 \\ X_1 * \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} 0 & X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$, dengan A bertipe mxm

Perhatikan dulu

$\begin{bmatrix} 0 \\ X_1 * \end{bmatrix}$ [A] $\begin{bmatrix} 0 & X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_1 * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & AX_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_1 * AX_1 \end{bmatrix}$, sehingga $B_1=X_1*AX_1$,

akibatnya rank B_1= rank A.

Dari B=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ = X_1*AX_1 didapat rank B= rank B_1 = rank A.

Akibatnya diperoleh σ(B)=σ(B_1)=σ(A) artinya teorema terbukti.

Selanjutnya untuk $v_1,\ldots,v_n \in C^n$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in R$ dan A=$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i v_i *$ maka A matriks Hermitian yang kongruen dengan Λ=diag($\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ldots,0$), juga untuk A_1,A_2 Hermitian yang memenuhi rank(A_1+A_2)=rank(A_1)+rank(A_2) maka σ(A_1+A_2)=σ(A_1)+σ(A_2). Hal ini disajikan dalam teorema 2.1.4 berikut.

Teorema 2.1.4

1. Jika $v_1,\ldots,v_n \in C^n$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in R$ dan A=$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i v_i *$, maka A matriks Hermitian dan A kongruen dengan Λ=diag($\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ldots,0$)
2. Jika A_1dan A_2 Hermitian dan rank(A_1+ A_2)=rank(A_1)+rank(A_2) maka σ(A_1+A_2) = σ(A_1)+ σ (A_2)

Bukti :

1. A=$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i v_i *$ hermitian sebab

   $(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i v_i *)* = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i v_i v_i *)* = \sum_{i=1}^{k} (v_i v_i * \lambda_i *) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i v_i *$. Jadi A*=A

   Perhatikan bahwa matriks dapat dipartisi atas baris-barisnya atau kolom-kolomnya (Brown,1993), hal ini nanti akan dipakai dalam langkah pembuktian selajutnya .

   A=$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i v_i * = \lambda_1 v_1 v_1 * + \lambda_2 v_2 v_2 * + \ldots + \lambda_k v_k v_k *$

   $= \lambda_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{v_{11}} & \overline{v_{21}} & \cdots & \overline{v_{n1}} \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_k \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{v_{1k}} & \overline{v_{2k}} & \cdots & \overline{v_{nk}} \end{bmatrix}$

$$=\lambda_1\begin{bmatrix} |v_{11}|^2 & v_{11}\overline{v_{21}} & \cdots & v_{11}\overline{v_{n1}} \\ v_{21}\overline{v_{11}} & |v_{21}|^2 & \cdots & v_{21}\overline{v_{n1}} \\ \vdots & & & \\ v_{n1}\overline{v_{11}} & v_{n1}\overline{v_{21}} & \cdots & |v_{n1}|^2 \end{bmatrix}+\ldots+\lambda_k\begin{bmatrix} |v_{1k}|^2 & v_{1k}\overline{v_{2k}} & \cdots & v_{1k}\overline{v_{nk}} \\ v_{2k}\overline{v_{1k}} & |v_{2k}|^2 & \cdots & v_{2k}\overline{v_{nk}} \\ \vdots & & & \\ v_{nk}\overline{v_{1k}} & v_{nk}\overline{v_{2k}} & \cdots & |v_{nk}|^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1|v_{11}|^2+\lambda_2|v_{12}|^2+\ldots+\lambda_k|v_{1k}|^2 & \cdots & \lambda_1 v_{11}\overline{v_{n1}}+\lambda_2 v_{12}\overline{v_{n2}}+\ldots+\lambda_k v_{1k}\overline{v_{nk}} \\ \vdots & & \\ \lambda_1 v_{n1}\overline{v_{11}}+\lambda_2 v_{n2}\overline{v_{12}}+\ldots+\lambda_k v_{nk}\overline{v_{1k}} & \cdots & \lambda_1|v_{n1}|^2+\lambda_2|v_{n2}|^2+\ldots+\lambda_k|v_{nk}|^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} & \cdots & \lambda_k v_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} & \cdots & \lambda_k v_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \lambda_1 v_{n1} & \lambda_2 v_{n2} & \cdots & \lambda_k v_{nk} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{v_{11}} & \overline{v_{21}} & \cdots & \overline{v_{n1}} \\ \overline{v_{12}} & \overline{v_{22}} & \cdots & \overline{v_{n2}} \\ \vdots & & & \\ \overline{v_{1k}} & \overline{v_{2k}} & \cdots & \overline{v_{nk}} \\ \vdots & & & \\ \overline{v_{1n}} & \overline{v_{2n}} & \cdots & \overline{v_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_k v_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \vdots \\ \text{———} \end{bmatrix}\begin{matrix} v_1\,* \\ v_2\,* \\ \\ v_n\,* \end{matrix}$$

$$=\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & & v_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_k & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \vdots \\ \text{———} \end{bmatrix}\begin{matrix} v_1\,* \\ v_2\,* \\ \\ v_n\,* \end{matrix}=V\Lambda V^*$$

Karena A= $V\Lambda V^*$ maka disimpulkan A kongruen dengan Λ

2. Misalkan λ_1, λ_2 …,λ_k nilai-nilai karakteristik yang tidak nol dari A_1 yang berhubungan dengan vektor karakteristik v_1, v_2 …,v_k dan misalkan λ_{k+1}, λ_{k+2} …,λ_{k+l} nilai-nilai karakteristik yang tidak nol dari A_2 yang berhubungan dengan vektor karakteristik v_{k+1}, v_{k+2} …,v_{k+l} maka menurut teorema spektral

$$A_1 \cong \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_k & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } A_2 \cong \begin{bmatrix} \lambda_{k+1} & & & & & & \\ & \lambda_{k+2} & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_{k+l} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa rk(A_1)=k dan rk(A_2)=l

$A_1=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i v_i^* : C^n \to C^n$ $\qquad$ $A_2=\sum_{i=k+1}^{k+l}\lambda_i v_i v_i^* : C^n \to C^n$

Karena diketahui rk (A_1+A_2)= rk (A_1)+rk(A_2) maka

dim Im (A_1+A_2)= dim Im (A_1)+dim Im(A_2) berarti

dim (Im (A_1)$\cap$dim Im(A_2))=0, akibatnya

Im (A_1)$\cap$dim Im(A_2)={0}.

Menurut teorema Spektral, {v_1,v_2 ,. . ., v_k ,…., v_{k+1}, v_{k+2}, …..v_{k+l}} bebas linear maka

$(A_1+A_2)^*=\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i v_i^* + \sum_{i=k+1}^{k+l}\lambda_i v_i v_i^*\right)= A_1^*+A_2^*= A_1+A_2.$

Didapat A_1+A_2 matriks Hermitian.

Dari $A_1+A_2=\sum_{i=1}^{k+l}\lambda_i v_i v_i^*$ maka menurut butir 1, A_1+A_2 kongruen dengan

matriks diagonal (λ_1 , λ_2, . . . ,λ_k , λ_{k+1},λ_{k+2} …..λ_{k+l},0,…0)

$$A_1+A_2 \cong \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & 0 & & & \\ & & & \lambda_k & & & & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \lambda_{k+l} & & \\ & & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{artinya}$$

σ(A_1+A_2)=σ(A_1)+σ(A_2).

Vol. 6. No. 3, 144 - 156, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

3. KESIMPULAN

Berikut akan dituliskan kesimpulan sebagai hasil penelitian.

Jika U ruang produk dalam real dan $\phi(x,y)$ fungsi bilinear simetri dalam U maka terdapat suatu basis B={f_i ,…,f_j} yaitu basis U sedemikian hingga adalah matriks diagonal dan $\phi(f_i,f_j)=\varepsilon_i\delta_{ij}$, dengan $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & 0 \le i \le k \\ -1 & k \le i \le r \\ 0 & r \le i \le n \end{cases}$. Lebih lajut k dan r tertentu dengan tunggal oleh ϕ.

DAFTAR PUSTAKA

1. Brown,W.C., *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, New York. 1993
2. Fuhrmann, A, *Polynomial Approach to Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York. 1996
3. Setiadji, *Diktat Aljabar Linear Lanjut*, F MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta. 1999