PENURUNAN PERSAMAAN GELOMBANG SOLITON DENGAN DERET FOURIER ORDE DUA SECARA NUMERIK

Sarwadi
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Salah satu solusi dari persamaan Korteweg - de Vries (KdV) adalah gelombang soliton. KdV merupakan persamaan umum gelombang yang solusinya tidak selalu bisa diturunkan secara exact. Penelitian ini mengkaji teknik numerik untuk menurunkan persamaan gelombang soliton dari persamaan KdV. Dengan MAPLE dibuat algoritma yang didasarkan pada minimisasi hamiltonian persamaan KdV atas suatu gelombang yang didekati dengan deret Fourier orde dua. Secara iteratif gelombang ini diperbaiki dengan menerapkan metode Steepest Descent dan kombinasi Euler - Aitken. Hasil menunjukkan bahwa pendekatan deret Fourier orde dua cukup bagus dan teknik numeriknya valid (dibuktikan dengan paket WAVEPACT)

1. PENDAHULUAN

Gelombang permukaan air bermanfaat sekali untuk diketahui sifat-sifatnya. Banyak bangunan, produk teknologi ataupun sistem lain yang berkaitan dengan gelombang permukaan air, seperti pelabuhan, kanal, perkapalan dll. Untuk itu perlu dikembangkan model-model tentang gelombang ini.

Studi tentang persamaan gelombang dengan analisa yang menyangkut tentang struktur Poisson, Solitons, Simetris dsb telah dilakukan dan dilaporkan oleh Van Groesen, et.al.(1992). Untuk cecking persamaan yang diperoleh perlu suatu perangkat pengujinya. Van Bechum dan Djohan (1994) mengembangkan suatu paket program (software WAVEPACT) untuk keperluan analisa gelombang, terutama sifat fisikanya. Andre Heck (1993) menjelaskan beberapa subroutine perhitungan matematis yang efisien dan akurat dalam MAPLE. Sehingga dengan pemakaian paket ini berbagai perhitungan dapat dilakukan dengan cepat dan mudah. Sarwadi (1994) menyelesaikan masalah minimisasi dan maximisasi hamiltonian secara numerik dengan menerapkan metode Steepest Descent dalam MAPLE. Sarwadi dkk (1996) memperlihatkan bahwa pendekatan suatu gelombang dengan deret Fourier orde dua sudah cukup baik dan amat cepat iterasinya dibandingkan orde yang lebih tinggi.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 3, 118 - 177, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

2. METODE DAN PERMASALAHAN

Sebelum dibicarakan metode yang dipakai, berikut penjelasan singkat tentang konsep dan metode elementer yang mendasari metode penelitian yang dipakai.

Turunan Variasi

Misal U adalah ruang linier fungsi-fungsi. Hasil kali dalam (inner product) dari f,gîU yaitu <f,g> adalah <f,g> = $\int_{-\infty}^{\infty} f.g\,dx$ Jika untuk suatu fungsi H di U terdapat z∈U ∋ $\frac{d}{d\varepsilon} H(u+\varepsilon v)_{\varepsilon=0} = \langle z,v \rangle$, maka z disebut turunan variasi dari H terhadap u, ditulis $\frac{\delta H}{\delta u}$. Untuk suatu fungsi H(u) yang berbentuk H(u) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(u,u_x,u_{xx},...)dx$ akan diperoleh turunan variasinya sebagai

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - ...$$

1

Persamaan KdV Sebagai Sistem Hamiltonian

Persamaan KdV yang akan digunakan adalah persamaan gelombang yang berbentuk

$$\partial_t u = \partial_x \left(-u_{xx} - 3u^2\right)$$

2

Persamaan ini diturunkan dari persamaan gelombang dimensi satu yang dinyatakan dalam sistem Hamiltonian sebagai

$$\partial_t u = \partial_x \delta H(u)$$

3

dengan $\delta H(u)$ adalah turunan variasi terhadap u dari Hamiltonian yang berbentuk

$$H(u) = \int \left(\tfrac{1}{2} u_x^2 - u^3\right)dx$$

4

Interpretasi fisik dari persamaan (4) adalah energi. Dalam KdV persamaan (4) adalah konstan terhadap evolusi gelombang. Integral lain dalam KdV yang juga konstan all

$$M(u) = \int u dx \qquad \text{(massa)}$$

5

$$I(u) = \int \tfrac{1}{2} u^2 dx \qquad \text{(Horizontal momentum)}$$

6

Persamaan (4) dan (6) dipakai untuk mencari penyelesaian KdV nantinya.

Metode Steepest Descent

Untuk memperoleh fungsi u dengan nilai H(u) minimal dengan metode Steepest Descent dari suatu nilai awal u secara iteratif, sama artinya mencari suatu barisan u_0 ,u_1 ,u_2 ,...,u_n ,... sedemikian $H(u_0) \geq H(u_1) \geq H(u_2) \geq ... \geq H(u_n) \geq ....$ Hal ini dapat dicapai bila arah perubahan u adalah - $\nabla H(u)$ (menurut Steepest Descent). Mengingat u_i harus memenuhi kendala $I(u_i)=\gamma$, $\forall i=0,1,2,...,N,...$ gradien arahnya harus dimodifikasi menjadi

$$\partial_t u = -\nabla H(u) + \lambda \nabla I(u), \quad \lambda \in R$$

7

dengan

$$\lambda = \frac{\nabla I . \nabla H}{|\nabla I|^2}$$

8

Dengan arah ini dapat ditunjukkan bahwa $\partial_t H(u) \leq 0$, yang berarti harga H(u) akan mengecil menuju minimal. (Warsoma Djohan, 1993)

Metode Euler (Forward Euler)

Untuk menyelesaikan masalah minimisasi terkendala ini metode Euler

$$f_{n+1} = f_n + h f'_n$$

disesuaikan dengan fungsi dan gradien arah berdasar metode steepest descent sebagai

$$\mathbf{u_{n+1} = u_n + \Delta t \{- \nabla H(u_n) + \lambda \nabla I(u_n)\}}$$

9

Dengan u_{n+1} dan u_n berturut-turut menyatakan fungsi (persamaan gelombang) pada iterasi ke n+1 dan n. Δt adalah step time yang dipilih, dan l sesuai (8). $\nabla H(u)$ dan $\nabla I(u)$ berturut-turut menyatakan vektor gradien dari H dan I untuk fungsi u pada iterasi ke-n.

Metode Aitken

Dari suatu nilai awal yang diberikan, misal u_0 , maka nilai u ditentukan dengan rumus

$$u_1 = u_1^* - \frac{a.b_1}{a.a} b_2$$

10

Dimana a, b_1 dan b_2 dihitung dengan rumus

$b_1 = u_1^* - u_0$

$b_2 = u_2^* - u_1^*$

$a = b_2 - b_1$

dengan u_1^* adalah hampiran numerik pada $u(x, \Delta t)$ dan u_2^* adalah hampiran pada $u(x,2\Delta t)$, untuk pemilihan interval waktu Δt tertentu. Barisan u_0 , u_1 , u_2 , u_3 ... yang dihitung dengan metode ini konvergensi akan lebih cepat. (Atkinson, 1989)

Permasalahan dan Metode yang dipakai

Permasalahan yang akan diselesaikan secara ringkas dapat dituliskan secara matematis sebagai: Mencari persamaan gelombang u* sedemikian sehingga

$$H(u^*) = \min \{ H(u) \mid I(u) = \gamma, \gamma \in R, \forall u \in U \} .$$

Dan secara garis besar metode yang dipakai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Memandang persamaan KdV sebagai sistem Hamiltonian (3).
2. Mendekati persamaan yang dicari dengan fungsi 2L priodik deret Fourier orde dua

u(x,t) = $\sum_{k=1}^{2}\left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)+b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]$

11

3. Memilih harga a ,b ,a ,b sembarang sebagai solusi awal sembarang.
4. Solusi awal secara iteratif diperbaiki secara numerik hingga konvergen dengan menerapkan
   - metode Steepest Descent (7) sebagai pemandu arah iterasi
   - metode Euler (9) dalam proses iterasinya sendiri
   - metode Aitken (10) untuk mempercepat iterasi agar segera konvergen.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Programming

Dalam pemrogramannya deret Fourier (11) diatas hanya disimpan koefisiennya saja, sebagai vektor

$u = [a_1 \ \ b_1 \ \ a_2 \ \ b_2\ ]$

Sehingga dalam iterasi numeriknya fungsi u akan dinyatakan sebagai

$u_0 = [a_1^0 \ \ b_1^0 \ \ a_2^0 \ \ b_2^0\ ]$

$u_1 = [a_1^1 \ \ b_1^1 \ \ a_2^1 \ \ b_2^1\ ]$ dst.

Sebelum proses iterasi berlangsung selalu dilakukan normalisasi agar gelombang u_i (i=0, 1, 2, ...) yang diperoleh selalu memenuhi kendala $I(u_i)=\gamma$. Gelombang (syarat awal) u_0* belum tentu berada pada kurva $I(.)=\gamma$. Maka harus dicari suatu konstanta k sedemikian sehingga $u_0 = k\, u_0^*$ dan $I(u_0)=\gamma$. Untuk itu k dihitung dari (4) diperoleh

$$k = \sqrt{\frac{\gamma}{I\left(u_0^*\right)}}$$

Kemudian baru dilakukan proses iterasinya.

Agar fleksibel dengan keadaan yang diinginkan dibuat program dengan 4 argumen. Sehingga setiap kali memanggil harus dituliskan sebagai misalnya **four2min(L,f,dtime,dgama).** Dimana **L** (real/float) menyatakan pilihan priode dari deret Fourier yang dikehendaki. **f** menyatakan fungsi pendekatan awal (berupa array 4 elemen dari koefisien-koefisien deret Fourier). **dtime** (real)

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 3, 118 - 177, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

menyatakan step time (interval) yang dikehendaki untuk keperluan proses iterasi. **dgama** (real) menyatakan $\Delta\gamma$ (delta gamma) interval nilai γ konstan untuk keperluan diskritisasi.

Outline Algoritma **Four2min**()

1. Pilih bentuk u(x,t) sesuai periode L
2. Hitung fungsi H(u) dan I(u)
3. Hitung vektor ∇H(u) dan ∇I(u)
4. Ulang untuk 10 nilai g yang berbeda sesuai input
   4.1 Ulang sampai $\nabla H_0 \leq \varepsilon$ atau iterasi ≥ 50
      a. Hitung $k = \sqrt{\dfrac{\gamma}{I\left(u_0^*\right)}}$
      b. Hitung $u_0 = k\, u_0^*$
      c. Hitung $H(u_0)$ dan $I(u_0)$
      d. Catat titik $(I(u_0), H(u_0))$
      e. Hitung u_1^* dengan subroutine Euler
      f. Hitung u_2^* dengan subroutine Euler
      g. Hitung a, b_1, b_2
      h. Hitung u_1 dengan rumus Aitken
      i. Hitung $H(u_1)$ dan $\Delta H = H(u_0) - H(u_1)$
   4.2 Catat semua informasi yang perlu
5. Plot proses iterasi, limit iterasi.
6. Plot profil gelombangnya

3.2. Hasil - hasil

Dalam setiap *running* untuk suatu nilai L tertentu kami hanya mencobakan 10 nilai γ yang berbeda. Mengingat untuk suatu nilai $\gamma > \gamma_0$ harga H(u) negatif, maka hanya diamati proses minimisasi pada harga γ=0 sampai dengan γ dengan H(u) negatif. Tabel 1 berikut menyajikan hampiran numerik H(u) yang mulai berharga negatif pada γ =0.35.

TABEL 1: Proses hampiran numerik minimisasi H(u) terhadap I(u) untuk periode $L=\pi$, $\Delta\gamma=0.05$, $\Delta t=0.01$

γ	Inersia I(u)	Energy H(u)	iterasi	time	Error
.5e-1	.4999999998e-1	.3944137136e-1	3	6.000*seconds	.557e-8
.10	.1000000000	.6145832734e-1	3	4.000*seconds	.5777e-7
.15	.1499999998	.6932908811e-1	4	6.000*seconds	.17e-9
.20	.1999999999	.6496576676e-1	4	6.000*seconds	.76e-9
.25	.2499999998	.496640634e-1	4	6.000*seconds	.18e-8
.30	.3000000000	.243777920e-1	4	6.000*seconds	.35e-8
.35	.3500000000	-.101526821e-1	4	6.000*seconds	.116e-7
.40	.4000000002	-.533309229e-1	4	5.000*seconds	.82e-8
.45	.4499999998	-.1046630252	4	6.000*seconds	.201e-7
.50	.5000000001	-.1637312031	4	6.000*seconds	.389e-7

Dari catatan proses iterasi pada tiga nilai L, yaitu $L=\pi/2$, π, dan 2π dapat diamati hal-hal sbb:

1. Untuk periode $L=\pi/2$ dan π, jumlah iterasi cukup kecil (n=4) proses sudah konvergen, sedang untuk $L=2\pi$ jumlah iterasinya relatif lebif besar yaitu 19 - 39 iterasi untuk konvergen.
2. Perbedaan nilai γ tidak berpengaruh pada proses iterasi pada $L=\pi/2$ dan π rata-rata 4 iterasi sudah konvergen, sedangkan pada $L=2\pi$ perbedaan γ berpengaruh pada jumlah iterasi.
3. Makin besar periode L range harga γ dengan nilai H(u) positif semakin kecil dan sempit. Misalnya pada $L=\pi/2$ range $\gamma=0$ - 8, $L=\pi$ range $\gamma=0$ - 0.5 dan $L=2\pi$ range $\gamma=0$ - 0,03. Sedang harga H(u) negatif berturut-turut mulai dari $\gamma=9$ pada $L=\pi/2$, $\gamma=0{,}6$ pada $L=\pi$ dan $\gamma=0{,}04$ pada $L=2\pi$.
4. Dengan L besar (γ makin kecil), proses iterasinya makin lamban ditandai dengan iterasi besar waktu konvergensi panjang dan errornya amat dekat dengan toleransinya.

TABEL 2: Koefisien deret Fourier hasil hampiran untuk periode L=π, Δγ=0.05, Δt=0.01

γ	**a_1**	**b_1**	**a_2**	**b_2**
.5e-1	.4065012269	.1537635299	.7902826508e-1	.6977153445e-1
.10	.5698515073	.2009343251	.1454831795	.1171723134
.15	.6924147741	.2350354299	.2027668876	.1555818716
.20	.7942448944	.2629842546	.2537574659	.1887365347
.25	.8830404821	.2872077616	.3001358488	.2183338761
.30	.9627037666	.3088737386	.3429537888	.2453185079
.35	1.035525698	.3286472343	.3829188313	.2702789648
.40	1.102982866	.3469485216	.4205329465	.2936112237
.45	1.166091614	.3640620683	.4561660508	.3155973762
.50	1.225585242	.3801918869	.4901011806	.3364458711

Dari harga-harga koefisien deret Fourier dari fungsi limit hasil minimisasi pada harga-harga γ yang berbeda untuk L=π/2, π, dan 2π, dapat diamati hal-hal sbb:

1. Bila harga γ semakin besar, harga-harga dari koefisien ini juga semakin besar.
2. Semua harga dari koefisien-koefisien adalah positif.

Tabel 2 menyajikan salah satu hasil hampiran numerik dari koefisien deret Fourier orde 2 pada 10 nilai γ yang berbeda dengan Δγ=0.05, Δt=0.01

Gambar 1 - 3 mengilustrasikan profile - profile gelombang yang diperoleh dari hasil minimisasi. Berikut beberapa contoh persamaan yang dihasilkan.

Persamaan gelombang untuk L=π/2 pada γ=10 adalah

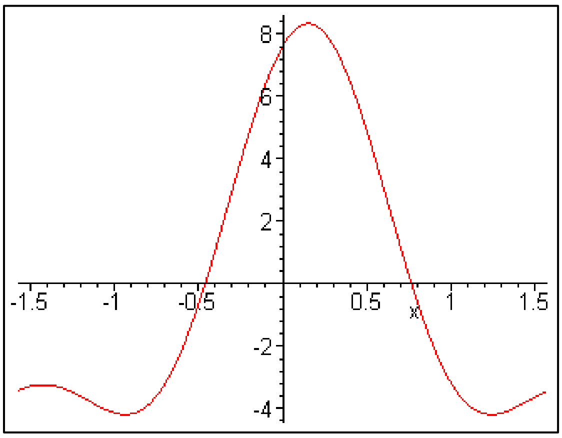
$$U^*(x) = 5.519466712 \cos(2x) + 1.735723278 \sin(2x) + 2.094286633 \cos(4x) + 1.461750809 \sin(4x)$$

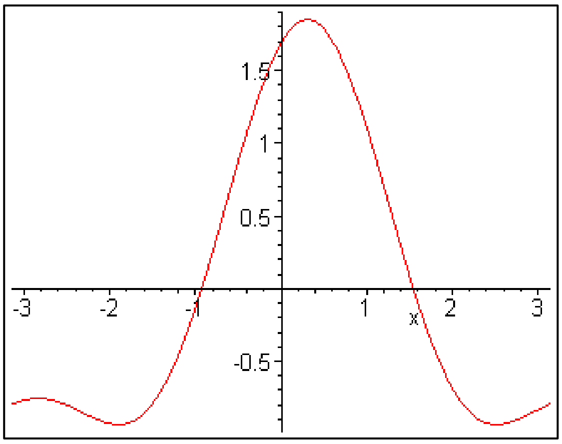
Persamaan gelombang untuk L=π pada γ=1 adalah

$$U^*(x) = 1.241499124 \cos(x) + 0.397163287 \sin(x) + 0.446722286 \cos(2x) + 0.318403012 \sin(2x)$$

Persamaan gelombang untuk L=2π pada γ=0,1 adalah

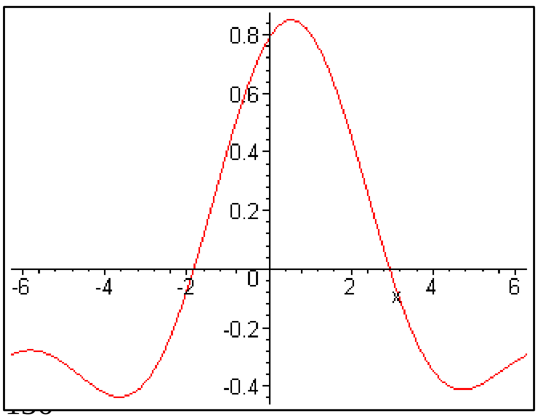
$$U^*(x) = 0.540766493\ \cos(0.5x) + 0.160304212\ \sin(0.5x) + 0.247475370\ \cos(x) + 0.143631919\ \sin(x)$$

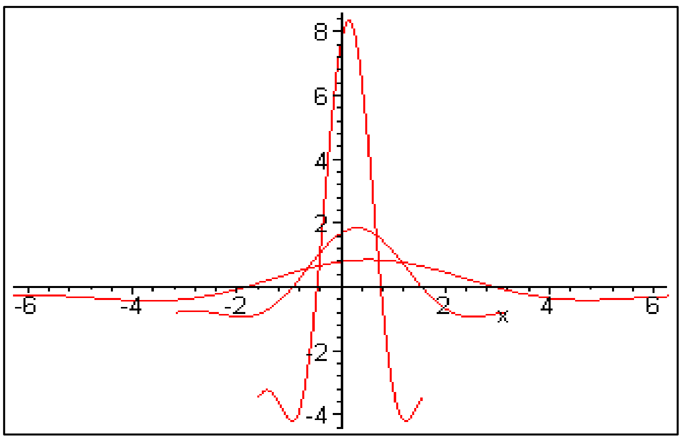




Gambar 1: Profil gelombang pada γ=10

Gambar 2: Profil gelombang pada γ=1





Gambar 3: Profil gelombang pada γ=0,1

Gambar 4: Perbandingan profil gelombang

Sedangkan Gambar 4 adalah plot gabungan ketiga gelombang dalam satu koordinat dari ketiga persamaan diatas. Dari gambar dapat dilihat bahwa Bila nilai γ bertambah besar, profile gelombang makin tinggi. Dengan kata lain gelombang yang tinggi mengandung energi yang besar.

4. KESIMPULAN

Dari hasil implementasi algoritma dan menjalankannya pada sejumlah test serta setelah mangkaji hasil tersebut ada beberapa hal yang bisa disimpulkan all :

1. Metode yang dipakai menghasilan gelombang soliton.
2. Hasil yang diperoleh secara numerik sesuai dengan yang diharapkan baik secara Matematis dan berdasarkan sifat fisik yang harus dipenuhi.
3. Makin besar energi gelombang menghasilkan amplitudo (profil) yang tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

1. Andre Heck, Introduction to MAPLE , Springer Verlag, New York, 1993.
2. Atkinson, Introduction to Numerical Analisis, Second Edition, John Wiley & sons, 1989.
3. Warsoma Djohan, Realisasi & Analisa Numerik Penerapan Metode Steepest dengan Modifikasi untuk Peminimuman Terkendala, Laporan penelitian OPF FMIPA ITB, 1993.
4. Frits van Beckum dan Warsoma Djohan, WAVEPACK a Software Package for Basic Concepts and Research in Wave Equation, ITB, 1994.
5. E. van Groesen, et.al., Studiews in Mathematics Physics Vol 5; Evolution Equation: Poisson Structure, Solitons, Symmetry, North Holland, Amsterdam, 1992.
6. Sarwadi, Penerapan Metode Steepest Descent dengan Modifikasi pada Constrained Minimization dan Constrained Maximization Hamiltonian, Laporan Magang Penelitian MIPA dasar NON-LPTK, ITB, Bandung, 1994.
7. Sarwadi dkk, Optimasi Hamiltonian Persamaan Korteweg - de Vries (KdV), Laporan Penelitian SUDR-ADB, UNDIP, Semarang, 1996.