# ANALISIS SISTEM NON LINEAR MELALUI PENDEKATAN SISTEM LINEAR DENGAN PARAMETER BERUBAH-UBAH

**Widowati**
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Semarang 50275
e-mail: wiwied_mathundip@yahoo.com

**Abstrak.** Pada paper ini dikemukakan hubungan antara sistem nonlinear dengan sistem LPV (*Linear Parameter Varying* system) dimana sistem non linear dapat dideskripsikan sebagai sistem LPV. Melalui deskripsi sistem LPV ini, ketaklinearan dari sistem direpresentasikan dengan parameter yang berubah-ubah terhadap waktu. Sifat-sifat lokal dari sistem nonlinear tersebut dikaji. Diasumsikan bahwa semua syarat-syarat untuk eksistensi dan keunikan solusi telah dipenuhi. Juga diasumsikan bahwa *origin*(titik asal) merupakan titik stasioner.
Kemudian akan dibahas bagaimana menganalisis kestabilan dari sistem non-linear ini dengan menggunakan pendekatan sistem LPV. Selanjutnya diberikan batas-batas pada parameter yang berubah terhadap waktu sehingga menjamin kestabilan asimtotik dari sistem nonlinear tersebut. Sebagai verifikasi dari metode yang dikemukakan, terakhir diberikan simulasi numerik.

**Kata-kata kunci** : sistem nonlinear, *bounded real lemma*, sistem LPV

## 1. PENDAHULUAN

Hukum kendali non linear dibentuk dengan strategi untuk menyelesaikan masalah analisis dan sintesis dengan setting operasi berbeda yang direpresentasikan oleh suatu parameter. Dengan menggunakan metode sintesis untuk sistem linear dengan parameter berubah-ubah yaitu bahwa sistem non linear akan dideskripsikan sebagai sistem LPV [2]. Deskripsi sistem LPV ini adalah konservatif dalam hal ketaklinearan dari sistem dapat ditangani oleh parameter yang berubah-ubah terhadap waktu. Nilai parameter ini dan kadang-kadang juga ada kendala laju variasi parameter diberikan didalam box parameter yang terbatas. Hal ni berarti bahwa sistem LPV tidak hanya mendeskripsikan sistem non linear di titik asal, tetapi juga semua sistem nonlinear yang diperoleh ketika parameter berubah secara sembarang disepanjang nilainya didalam box parameter.

Pada paper ini, akan dibahas hanya pada sistem nonlinear yang secara eksak dapat dideskripsikan sebagai sistem LPV. Sifat-sifat yang berkaitan dengan kestabilan dari sistem nonlinear dikaji dalam konteks sistem LPV yang memenuhi *bounded real lemma*. Beberapa peneliti [1, 5, 7] telah mengkaji masalah kestabilan dari sistem LPV dengan laju variasi parameter tak terbatas dan terbatas. Teori umpan balik dan fungsi Lyapunov kuadratik digunakan untuk menganalisis kestabilan sistem LPV. Masalah kestabilan ini dapat dikarakterisasi sebagai masalah pertidaksamaan matriks linear (*Linear matrix inequality*(LMI)) untuk menemukan matriks simetri definit positif. Sebagai verifikasi dari metode yang dikemukakan, diberikan contoh untuk menganalisis kestabilan sistem nonlinear (persaman Van der Pol) melalui pendekatan sistem LPV.

Sistematika dari paper ini adalah sebagai berikut. Teori singkat tentang sistem linear dengan parameter berubah-ubah diberikan pada bagian 2. Pada bagian 3 disajikan pembahasan tentang pendekatan sistem nonlinear dengan sistem LPV. Selanjutnya, pada bagian 4 didiskusikan tentang contoh numerik untuk menganalisis kestabilan sistem non linear melalui sistem linear dengan parameter berubah-ubah dan terakhir disajikan kesimpulan.

## 2. SISTEM LINIER DENGAN PARAMETER BERUBAH-UBAH

Pada bagian ini, diulas secara singkat tentang sistem linear dengan parameter berubah-ubah. Diberikan himpunan kompak

$\Im \subset \mathrm{R}^s$. Himpunan trayektori parameter feasible $F_\rho$ menotasikan himpunan dari semua fungsi kontinu bagian demi bagian dari $\mathrm{R}^+$(waktu) ke $\Im$ dengan sejumlah hingga diskontinuitas dalam suatu interval,

$$\tilde{F}_\rho = \left\{\rho : R^+ \to R^s \mid \rho_{i_{\min}} \le \rho_i \le \rho_{i_{\max}}, i = 1,2,\cdots,s\right\} \quad (1)$$

Himpunan kompak $\Im \subset \mathrm{R}^s$, bersama-sama dengan fungsi kontinu $A : \mathcal{R}^s \to \mathcal{R}^{n\times n}$, $B : R^s \to R^{n\times m}, C : R^s \to R^{p\times n}, D : R^s \to R^{p\times m}$ merepresentasikan sistem LPV, $G(\rho)$, berorde n dengan persamaan ruang keadaan sebagai berikut

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t), \quad (2)$$
$$y(t) = C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t),$$

dengan $x(t) \in R^n$ adalah vektor keadaan, $y(t) \in R^m$ adalah keluaran, $u(t) \in R^k$ adalah masukan, $\rho(t) \in R^s$ adalah vektor parameter, dan matriks ruang keadaan (*A*,*B*,*C*,*D*) diasumsikan sebagai fungsi kontinu dari parameter.

Berikut diberikan konsep kestabilan dari sistem LPV dengan laju variasi parameter $\dot{\rho}(t)$ tak terbatas dan terbatas. Diberikan fungsi kontinu $A : \mathcal{R}^s \to \mathcal{R}^{n\times n}$. Pandang sistem LPV (dengan laju variasi parameter tak terbatas) tanpa masukan,

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t), \ \forall \rho \in F_\rho. \quad (3a)$$

Fungsi bernilai skalar $V : R^n \to R$ didefinisikan sebagai $V$ ($x(t)$) := $x^T(t)Px(t)$, dengan $P \in R^{n\times n}$, $P$ > 0. Turunan dari fungsi Lyapunov kuadratik $V(x)$ diberikan oleh

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = x(t)[A^T(\rho(t))P + PA(\rho(t))]x(t),$$

dengan $\forall \rho \in F_\rho$ sepanjang trayektori dari sistem (3a).

Definisi 1.[1, 5, 6] Fungsi *A* dikatakan stabil kuadratik atas *P* jika terdapat matriks real *P* > 0 sedemikian sehingga

$$A^T(\rho(t))P + PA(\rho(t)) < 0, \ \forall \rho \in F_\rho \quad (3b)$$

Norm terinduksi $L_2$ [2, 7] dari sistem LPV yang stabil kuadratik dengan keadaan awal nol didefinisikan sebagai

$$\|G(\rho)\|_{i,2} = \sup_{\rho(t)\in\mathcal{F}_\rho} \sup_{u\neq 0, u\in\mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}. \quad (4)$$

*Bounded Real Lemma* (BRL) menyatakan bahwa sistem LPV (2) dengan laju variasi parameter terbatas adalah stabil asimtotik dan mempunyai norm terinduksi $L_2$ yang terbatas oleh $\gamma, \gamma > 0$, untuk setiap $\rho \in F_\rho$ dan $\dot{\rho} \in \tilde{F}_\rho$,

$$\tilde{F}_\rho = \left\{\rho \in C^1(R^+, R^s) \mid \rho \in \Im, \dot{\rho}_{i_{\min}} \le \dot{\rho}_i \le \dot{\rho}_{i_{\max}}, i = 1,2,\cdots,s\right\},$$

$C^1$ menotasikan kelas dari fungsi-fungsi terdiferensialkan kontinu bagian demi bagian, jika terdapat fungsi matriks definit positif $P(\rho)$ yang memenuhi (selanjutnya, untuk penyingkatan *t* tidak dituliskan),

$$\begin{bmatrix} A^T(\rho)P(\rho) + P(\rho)A(\rho) + \dot{P}(\rho) & P(\rho)B(\rho) & C^T(\rho) \\ B^T(\rho)P(\rho) & -\gamma I & D^T(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

Karena batas dari vektor parameter secara implisit mendefinisikan himpunan validitas dari BRL pada pertidaksamaan matriks linear (5), maka penguatan $L_2$ dari sistem bersifat lokal.

## 3. PENDEKATAN SISTEM NONLINIER DENGAN SISTEM LPV

Sistem non linear yang didiskusikan disini mempunyai persamaan,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \ x(t) \in \breve{D} \subseteq R^n, \ u(t) \in R^k. \quad (6)$$

Diasumskan bahwa semua kondisi untuk eksistensi dan keunikan solusi dipenuhi [2]. Selanjutnya perhatikan contoh sistem nonlinear dari persamaan Van der Pol,

$$\dot{x}_1 = -x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 0{,}3(1 - x_1^2)x_2 + u, \quad (7)$$
$$y = x_2.$$

Deskripsi sistem LPV dari persamaan Van der Pol di atas adalah

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -0{,}3 + 0{,}3\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (8)$$

dengan $\rho = x_1^2$ . Hanya bagian nonlinear pada persamaan (7) diganti dengan parameter $\rho$. Dalam hal ini trayektori dari sistem nonlinear mempunyai trayektori yang sama dengan trayektori dari sistem LPV, dengan menggunakan hubungan dari $\rho = x_1^2$ . Dengan menggunakan program MATLAB (LMI Control Toolbox) [3] dapat diperoleh matriks *P* definit positif solusi dari pertidaksamaan matriks linear (3b) dan batas atas $\gamma$ = 66,83 jika diambil trayektori parameter pada $F_\rho = \{\rho \in R \mid 0 \le \rho \le 0{,}9\}$. Diperoleh bahwa jika $\rho \ge 1$, maka nilai eigen dari matriks *A* untuk *frozen* parameter ( $\rho(t) = \rho_0$), berada di sebelah kanan sumbu imajiner. Akibatnya, salah satu kemungkinan untuk parameter dengan waktu konstan $\rho(t) = \rho_0$, solusi dari pertidaksamaan matriks linear (3b) tidak ada. Sehingga batas atas dari penguatan $L_2$ valid untuk himpunan yang berkorespondensi dengan nilai parameter pada $F_\rho$ , yaitu

$$\{x_1 \in R \mid -\sqrt{0{,}9} \le \rho \le \sqrt{0{,}9}\}.$$

**Teorema 3.1.** [2] *Pandang sistem non linear,*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u),\ x \in \subseteq R^n,\ u \in R^k, \qquad (9)\\ z &= h(x,u), \end{aligned}$$

*dan deskripsi sistem LPV*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\rho)x + B(\rho)u, \qquad (10)\\ y &= C(\rho)x + D(\rho)u, \end{aligned}$$

*dengan* $\rho = \phi(x)$ *. Asumsikan bahwa sistem LPV (10) memenuhi bounded real lemma dengan LMI (5) untuk semua parameter* $\rho \in F_\rho$ *dan* $\dot{\rho} \in \tilde{F}_\rho$ *. Definisikan himpunan,*

$$\chi = \{x \in \breve{D} \mid \phi(x) \in F_\rho\}, \qquad (11)$$

$$\tilde{\chi} = \{x \in \breve{D} \mid \dot{\phi}(x) \in \tilde{F}_\rho\}, \qquad (12)$$

$$\Gamma_\beta = \{x \in \breve{D} \mid V(x) \in \beta\}, \qquad (13)$$

*dengan* $V = x^T P(\phi(x))x$ *. Jika* $\Gamma_\beta \subseteq (\chi \cap \tilde{\chi})$*, maka sistem (9) adalah stabil asimtotik untuk nilai awal* $x(t_0) \in \Gamma_\beta$ *dan untuk* $x(t_0) = 0$ *,*

$$\sup_{u \in U} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \le \gamma,$$

*dengan himpunan input didefinisikan sebagai*

$$U = \left\{ u \in L_2 \left| \frac{\partial V}{\partial x}(A(\phi(x))x + B(\phi(x))u) \le 0, \forall x \in \Gamma_\beta \right. \right\}. \qquad (14)$$

**Bukti:**

Bersesuaian dengan pertidaksamaan matriks linear (5) pada *bounded real lemma*, sistem LPV (10) stabil asimtotik dan mempunyai penguatan terinduksi $L_2$ (induced $L_2$ *gain* ) yang terbatas oleh $\gamma$, untuk setiap parameter $\rho \in F_\rho$ dan $\dot{\rho} \in \tilde{F}_\rho$, dan khususnya untuk $\rho = \phi(x)$. Sistem LPV dengan $\rho = \phi(x)$ merupakan sistem nolinear (9) yang mengimplikasikan bahwa sistem nonlinear mempunyai penguatan terinduksi $L_2$ yang terbatas oleh $\gamma$ sepanjang keadaan *x* didalam daerah $\chi \cap \tilde{\chi}$ .

Secara umum, terdapat $x \in (\chi \cap \tilde{\chi})$ yang mana trayektori dari sistem nonlinear berada pada daerah $\chi \cap \tilde{\chi}$. Bagaimanapun pengunaan fungsi $V = x^T P(\phi(x))x$ yang disebut sebagai fungsi Lyapunov untuk sistem tanpa masukan (*u* = 0), mengakibatkan terdapat daerah di dalam $\chi \cap \tilde{\chi}$ yang mana trayektorinya berada pada daerah tersebut, selama ada pembatasan pada masukan *u*. Estimasi daerah *x* yang berkaitan dengan fungsi Lyapunov diberikan pada $\Gamma_\beta$. Dari sini dapat disimpulkan bahwa $\Gamma_\beta \subseteq (\chi \cap \tilde{\chi})$ dan trayektori dari sistem tanpa masukan berada di $\Gamma_\beta$ .

Kemudian, perhatikan sistem dengan masukan ( $u \ne 0$ ). Turunan dari fungsi Lyapunov sepanjang trayektori parameter pada sistem LPV menghasilkan,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}(A(\phi(x))x + B(\phi(x))u). \qquad (15)$$

Sehinga jika *U* pada persamaan (14) terpenuhi untuk setiap $x \in \partial\Gamma_\beta$, maka trayektori yang berada di $\Gamma_\beta$ dapat tidak pernah berada di $\Gamma_\beta$, hal ini kontradiksi. Selanjutnya, dapat disimpulkan bahwa sistem nonlinear (9) yang diperoleh secara khusus dari sistem LPV dengan parameter $\rho = \phi(x)$ adalah stabil asimtotik. Sehingga teorema terbukti.

Kondisi *bounded real lemma* untuk sistem LPV menjamin penguatan $L_2$ lokal untuk sistem nonlinear disekitar titik stasioner. Hal ini berkaitan dengan kepositifan (*positiveness*) dari fungsi Lyapunov, $V = x^T P(\rho(x))x$ dan sepanjang himpunan $\chi$ dan $\tilde{\chi}$ yang memuat titik asal. Bahwa himpunan $\chi$ dan $\tilde{\chi}$ memuat titik asal, ini adalah natural, karena titik asal adalah titik stasioner dari sistem nonlinear dan termasuk dalam $\chi$ dan jika $\dot{\rho} = 0$ termasuk dalam $\tilde{F}_\rho$, maka titik asal termasuk dalam $\tilde{\chi}$ yang bersesuaian dengan

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial x} f(0) = 0.$$

Oleh karena itu, akan selalu ada himpunan $\Gamma_\beta$ tidak kosong yang mana batas atas dari penguatan $L_2$ dari sistem LPV adalah valid untuk sistem nonlinear.

## 4. SIMULASI NUMERIK

Perhatikan kembali persamaan Van der Pol dengan mengunakan deskripsi sistem LPV (8) hanya pada domain, $-1 \le x_1 \le 1$, BRL dipenuhi. Sistem akan menjadi tidak stabil untuk nilai $x_1$ yang lebih besar. Untuk memperbesar domain, pandang deskripsi LPV dari persamaan Van der Pol berikut.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 + 0{,}3\rho & -0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

dengan $\rho = x_1 x_2$.

Dari persamaan (16), untuk *frozen* parameter diperoleh bahwa sistem matriks mempunyai nilai eigen negatif pada $|\rho| < \frac{10}{3}$. Hal ini dapat memungkinkan bahwa domain penguatan $L_2$ dari sistem lebih besar dari pada kasus (8). Untuk mengkaji hal ini, selanjutnya digunakan matriks $P$ bergantung parameter yang disajikan secara *affine* [4] pada *bouded real lemma*. Matriks $P(\rho)$ ini dapat dicari dengan menyelesaikan pertidaksamaan matriks linear (5) dengan teknik gridding ruang parameter dan dengan menggunakan paket software LMI [3], diperoleh matriks $P(\rho)$,

$$P(\rho) = \begin{bmatrix} 1{,}020 & 0{,}181 \\ -0{,}181 & 1{,}079 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}098 & 0{,}017 \\ 0{,}017 & -0{,}088 \end{bmatrix}\rho + \begin{bmatrix} -0{,}607 & -1{,}570 \\ -1{,}570 & 5{,}449 \end{bmatrix} 10^{-3}\rho^3 + \begin{bmatrix} -1{,}944 & 0{,}017 \\ 0{,}017 & 0{,}682 \end{bmatrix} 10^{-3}\rho^5. \quad (17)$$

Batas atas penguatan $L_2$ dari sistem adalah $\gamma = 141{,}1$ untuk semua nilai parameter yang bervariasi pada

$$|\rho| = |x_1 x_2| \le 1{,}69 \quad (18)$$

dan dengan laju variasi parameter pada

$$|\dot{\rho}| = \left| -x_2^2 + x_1(x_1 - 0{,}3(1 - x_1^2)x_2) \right| \le 3. \quad (19)$$

Bagimanapun bersesuaian dengan Teorema 1, maka sistem nonlinear (7) yang dideskripsikan dengan sistem LPV (16) stabil asimtotik pada domain yang bersesuian dengan kurva level $\Gamma_\beta$ dari fungsi Lyapunov $x^T P x$ yang termasuk dalam irisan himpunan yang didefinisikan seperti pada pertidaksamaan (18) dan (19).

## 5. PENUTUP

Daerah penguatan $L_2$ dari sistem LPV yang menjamin penguatan yang sama untuk sistem nonlinear dapat ditentukan berdasarkan analisis sistem LPV. Dari hasil simulasi numerik, sistem non linear dapat dideskripsikan dengan beberapa sistem LPV yang berbeda, berdasarkan pemilihan parameter. Juga diilustrasikan bahwa pemilihan parameter secara khusus penting untuk menentukan domain kestabilan sistem nonlinear berdasarkan kondisi analisis sistem LPV dengan menggunakan *bounded real lemma*.

## 6. DAFTAR PUSTAKA

[1] G.S. Becker, (1993), *Quadratic Stability and Performance of Linear Parameter Varying Systems*, Ph.D Dissertation, University of California at Berkeley.

[2] F.Bruzelius, (2004), *Linear Parameter-Varying Systems an approach to gain scheduling*, Thesis for The Degree of Doctor of Philosophy, Chalmers

University of Technology, G¨oteborg, Sweden.
[3] P.Gahinet, A.Nemirovski, A.Laub, and M.Chilali, (1995), *The LMI Control Toolbox*, The Math Works, Inc.: Natick, MA.
[4] P.Gahinet, A.Nemirovski, P.Apkarian, and M.Chilali, (1996), *Affine Parameter Dependent Lyapunov Fuctions and Real Parametric Uncertainty*, IEEE transactions on Automatic Control, 41(3).
[5] P. J. Goddard and K. Glover, (1998), *Controller Approximation: Approaches for Preserving* $H_\infty$ *Performance*, IEEE Transactions on Automatic Control 3(7),858-871.
[6] G.D. Wood, P.J. Goddard, and K. Glover, (1996), *Approximation of Linear Parameter Varying Systems*, Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan.
[7] F. Wu, (1995), *Control of Linear Parameter Varying Systems,* PhD Dissertation, Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley.