K-ALJABAR

Iswati[1] dan Suryoto[2]
[1,2]Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. *K*-algebra is an algebra structure built on a group so that characters of a group will apply also at *K*-algebra. If at group there is subgroup and homomorfism group, hence at *K*-algebra there is *K*-subalgebra and *K*-homomorfism. By using characters of group, will be proved characters applied at *K*-algebra.

Keyword : algebra, group, subgroup, and homomorfism group.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku kemudian akan membentuk suatu sistem baru. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah K-aljabar.

Misalkan $G = (G,*)$ suatu grup terhadap operasi biner $*$. Jika e adalah unsur identitas pada G dan untuk setiap x, y di G didefinisikan operasi $x \odot y = x * y^{-1}$ sedemikian sehingga operasi tersebut merupakan operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar baru yang dinamakan Kaljabar.

K-aljabar mempunyai sifat yang hampir sama dengan grup. Hal ini dapat dilihat dari grup yang mempunyai konsep subgrup dan homomorfisma grup. Sedangkan pada *K*-aljabar terdapat konsep *K*-subaljabar dan homomorfisma pada *K*-aljabar yang disebut K-homomorfisma.

2. *K*-ALJABAR

Pada bagian ini akan dibahas mengenai *K*-aljabar, *K*-subaljabar, dan *K*-homomorfisma.

2.1 *K*-Aljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari *K*-aljabar.

Definisi 2.1.1 [1] *Misalkan* $(G,*)$ *suatu grup dan pada* G *didefinisikan operasi* $\odot$ *sedemikian hingga* $\forall\, x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ *maka akan membentuk struktur aljabar baru yaitu* $(G,*,\odot,e)$. *Suatu* $(G,*,\odot,e)$ *dinamakan* K*-aljabar, jika* G *adalah bukan grup dengan order-2 dan* $\forall\, x, y, z \in G$ *berlaku :*

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z)$

   $= (x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))) \odot x$
2. $x \odot (x \odot y) = (x \odot (e \odot y)) \odot x$
3. $x \odot x = e$
4. $x \odot e = x$
5. $e \odot x = x^{-1}$, $\forall x, y, z \in G$

Jika grup $(G,*)$ merupakan grup komutatif, maka aksioma 1 dan 2 menjadi :

$1'$. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$

2'. $x \odot (x \odot y) = y$

Contoh 1

$G = \{-i, i, 1, -1\}$ terhadap operasi pergandaan merupakan grup, lebih tepatnya merupakan grup siklik dengan generator i. Jika pada G dilengkapi dengan operasi $\odot$, sebagaimana (seperti) diberikan tabel berikut :

$\odot$	$-i$	i	1	-1
$-i$	1	-1	$-i$	i
i	-1	1	i	$-i$
1	i	$-i$	1	-1
-1	$-i$	i	-1	1

Tabel 2.1.1 operasi $\odot$ pada G

Maka $(G, \cdot, \odot, e)$ membentuk K-aljabar. Hal ini dapat dilihat dari tabel bahwa aksioma 1 sampai 5 dipenuhi oleh G.

Contoh 2

$S_3 = \{e, a, b, x, y, z\}$, dengan $e = (1)$, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $x = (1\ 2)$, $y = (1\ 3)$, $z = (2\ \ 3)$ terhadap operasi komposisi fungsi $(S_3, \circ)$ membentuk grup, lebih tepatnya merupakan grup permutasi. Jika pada S_3 dilengkapi dengan operasi $\odot$, sebagaimana (seperti) diberikan oleh tabel berikut :

$\odot$	e	x	y	z	a	b
e	e	x	y	z	b	a
x	x	e	a	b	z	y
y	y	b	e	a	x	z
z	z	a	b	e	y	x
a	a	z	x	y	e	b
b	b	y	z	x	a	e

Tabel 2.1.2 operasi $\odot$ pada S_3

maka $(S_3, \circ, \odot, e)$ membentuk K-aljabar. Hal ini dapat dilihat dari tabel, bahwa aksioma 1 sampai 5 dari K-aljabar dipenuhi oleh S_3.

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K-aljabar $(G, *, \odot, e)$, jika G merupakan grup komutatif.

Proposisi 2.1.1 [2] *Misalkan* $(G, *)$ *grup komutatif. Jika* $(G, *, \odot, e)$ *adalah suatu* K-*aljabar, maka* $\forall x, y, z \in G$ *berlaku* :

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y)$

   $= y \odot x = e \odot (x \odot y)$

2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$

3. $e \odot (e \odot x) = x$

4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$

Bukti – bukti :

Diambil sebarang unsur $x, y, z \in G$ dan misalkan e unsur identitas dari G, maka :

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y)$

$= x^{-1} \odot y^{-1}$

$= x^{-1} * y$

$= y * x^{-1}$

$= y \odot x$

$(e \odot x) \odot (e \odot y)$

$= (e \odot ((e \odot y) \odot (e \odot x))) \odot e$

$= (e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})) \odot e$

$= e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})$

$= e \odot (y^{-1} * x)$

$= e \odot (x * y^{-1})$

$= e \odot (x \odot y)$

Karena $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x$

dan
$(e \odot x) \odot (e \odot y) = e \odot (x \odot y)$

maka $y \odot x = e \odot (x \odot y)$.

2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) =$

$(x \odot z) * (y \odot z)^{-1}$

$= (x * z^{-1}) * (y * z^{-1})^{-1}$

$= (x * z^{-1}) * (z * y^{-1})$

$= (x * (z^{-1} * z)) * y^{-1}$

$= (x * e) * y^{-1}$

$= x * y^{-1}$

$= x \odot y$

3. $e \odot (e \odot x) = e \odot x^{-1}$

$= e * x$

$= x$

4. $x \odot (e \odot y) = x \odot y^{-1}$

$= x * y$

$= y \odot x^{-1}$

$= y \odot (e \odot x)$ ■

Jika operasi $\odot$ pada $(G,*,\odot,e)$ bersifat komutatif, maka K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ bersifat komutatif, sebagaimana diberikan oleh definisi berikut :

Definisi 2.1.2 [1] *Suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ dikatakan komutatif jika $\forall\, x, g \in G$ berlaku $g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g)$.*

Contoh 3
Berdasarkan **Contoh 1** diketahui bahwa $G = \{-i, i, 1, -1\}$ terhadap operasi pergandaan merupakan K-aljabar.

Berdasarkan tabel 2.1.1 dapat dilihat bahwa **Definisi 2.1.2** dipenuhi, sehingga $(G,\cdot,\odot,e)$ merupakan K-aljabar yang komutatif.

Proposisi 2.1.2 [1] *Suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ dikatakan komutatif jika dan hanya jika $e \odot x = x$.*

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Misalkan $(G,*,\odot,e)$ komutatif terhadap operasi $\odot$. Akan ditunjukkan $e\odot x = x$. Diambil sebarang unsur $x, g \in G$, karena $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar yang komutatif, maka :

$$\begin{aligned} g\odot(e\odot x) &= x\odot(e\odot g)\\ &= x\odot(g\odot e)\\ &= x\odot g\\ &= g\odot x\end{aligned}$$

Karena $g\odot(e\odot x) = g\odot x$, maka $(e\odot x) = x$.

$\Leftarrow$Misalkan $e\odot x = x$. Menurut definisi operasi $\odot$, $e\odot x = x^{-1}$ sehingga diperoleh $x = x^{-1}$. Akan ditunjukkan bahwa $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar yang komutatif. Diambil sebarang unsur $x, g \in G$, maka :

$$\begin{aligned} g\odot(e\odot x) &= g\odot x\\ &= g\odot x^{-1}\\ &= g*x\\ &= x*g\\ &= x*(e*g^{-1})^{-1}\\ &= x\odot(e\odot g)\end{aligned}$$

Karena $g\odot(e\odot x) = x\odot(e\odot g)$, maka $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar yang komutatif. ■

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K-aljabar $(G,*,\odot,e)$, jika G tidak komutatif.

Proposisi 2.1.3 [1] *Misalkan $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar. Jika $(G,*)$ tidak komutatif, maka $\forall\, x,y,z,u,v \in G$ berlaku:*

1. $(x\odot y)\odot(u\odot v) =$
   $(x\odot(e\odot v)\odot(e\odot y))\odot u$
2. $(x\odot y)\odot z = x\odot(z\odot(e\odot y))$
3. $e\odot(e\odot x) = x$
   $e\odot(x\odot y) = y\odot x = (e\odot x)\odot(e\odot y)$
4. $e\odot(x\odot y) = (x\odot y)^{-1}$
5. $x\odot y = e$ *jika dan hanya jika* $x = y$

Bukti – bukti :
Diambil sebarang unsur $x,y,z,u,v \in G$ dan misalkan e unsur identitas dari G, maka :

1. $(x\odot y)\odot(u\odot v)$

$$\begin{aligned} &= (x*y^{-1})\odot(u*v^{-1})\\ &= (x*y^{-1})*(u*v^{-1})^{-1}\\ &= (x*y^{-1})*(v*u^{-1})\\ &= (x*y^{-1}*v)*u^{-1}\end{aligned}$$

$= (x * (v^{-1} * y)^{-1}) * u^{-1}$

$= (x \odot (v^{-1} \odot y^{-1})) \odot u$

$= (x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$

2. $(x \odot y) \odot z = (x * y^{-1}) * z^{-1}$

$= x * (y^{-1} * z^{-1})$

$= x * (z * y)^{-1}$

$= x \odot (z \odot y^{-1})$

$= x \odot (z \odot (e \odot y))$

3. $e \odot (e \odot x) = (e \odot x)^{-1}$

$= (e * x^{-1})^{-1}$

$= x$

4. $e \odot (x \odot y) = (x \odot y)^{-1}$

$= (x * y^{-1})^{-1}$

$= y \odot x$

5. $(\Rightarrow)$ Diketahui $x \odot y = e$, akan dibuktikan $x = y$. Diambil sebarang unsur $x, y \in G$ dan berlaku $x \odot y = e$. Karena $y \in G$ dan $y^{-1} \in G$ sehingga :

$(x \odot y) \odot y^{-1} = e \odot y^{-1}$

$(x * y^{-1}) * y = e * y$

$x * (y^{-1} * y) = e * y$

$x * e = e * y$

$x = y$

$(\Leftarrow)$ Diketahui $x = y$, akan dibuktikan bahwa $x \odot y = e$

Diambil sebarang unsur $x, y \in G$, dengan $x = y$, maka

$x \odot y = y \odot y$

$x \odot y = e$ ∎

Diantara himpunan bagian – himpunan bagian dari *K*-aljabar ada yang memiliki sifat *K*-aljabar terhadap operasi biner yang sama yang dinamakan *K*-subaljabar. Berikut ini akan dibahas mengenai *K*-subaljabar.

2.2 *K*-Subaljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari *K*-subaljabar.

Definisi 2.2.1 [1] *Suatu himpunan bagian tidak kosong H dari K-aljabar $(G, *, \odot, e)$ disebut K-subaljabar jika :*

1. $e \in H$

2. $h_1 \odot h_2 \in H, \ \forall h_1, h_2 \in H$

Contoh 4

Berdasarkan **Contoh 3** diketahui bahwa $(S_3, \circ, \odot, e)$ merupakan K-aljabar. Ditinjau himpunan $A_3 = \{e, a, b\}$ yang merupakan himpunan bagian dari S_3. Operasi $\odot$ pada A_3 diberikan oleh tabel berikut :

$\odot$	e	a	b
e	e	b	a
a	a	e	b

b	b	a	e

Tabel 2.2.1 operasi $\odot$ pada A_3

Sehingga karena dipenuhi :

1. $A_3 = \{e, a, b\}$ maka $e \in A_3$
2. Dari tabel terlihat bahwa $\odot$ merupakan operasi biner pada A_3.

maka $(A_3, \circ, \odot, e)$ merupakan K-subaljabar dari $(S_3, \circ, \odot, e)$.

Selanjutnya akan ditinjau keterkaitan antara subgrup dengan Ksubaljabar, sebagaimana diberikan oleh proposisi berikut :

Proposisi 2.2.1 [1] *Misalkan $(G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar dan $g \in G$. Jika H suatu subgrup dari G. Maka $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) : x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$.*

Bukti – bukti :

1. Akan ditunjukkan $e \in H_{g^2}$. Misalkan e unsur identitas dari G dan $g \in G$, karena H subgrup dari G, maka $e \in H$ dan berlaku :

$e = e * e = (g * g^{-1}) * e$

$= g * (g^{-1} * e)$

$= g * (e * g)^{-1}$

$= g \odot (e * g)$

$= g \odot (g * e)$

$= g \odot (g \odot e) \in H_{g^2}$.

2. Diambil sebarang unsur $x, y \in H_{g^2}$, dapat dituliskan $x = g \odot (g \odot u)$ dan $y = g \odot (g \odot v)$ untuk suatu $u, v \in H$, maka :

$x \odot y$

$= (g \odot (g \odot u)) \odot (g \odot (g \odot v))$

$= (g \odot ((e \odot v) \odot (e \odot u))) \odot g$

$= (g \odot (e \odot (v \odot u))) \odot g$

$= (g \odot (u \odot v)) \odot g$

$= g \odot \big(g \odot (e \odot (u \odot v))\big)$

$= g \odot \big(g \odot (v \odot u)\big) \in H_{g^2}$

Jadi terbukti bahwa $H_{g^2} = \{g \odot (g \odot x) : x \in H\}$ adalah suatu K-subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$ ■

Proposisi 2.2.2 [1] *Misalkan H_1 dan H_2 merupakan K-subaljabar dari suatu K-aljabar $(G, *, \odot, e)$ maka :*

1. *$H_1 \cap H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$.*

2. $H_1 \odot H_2$ *adalah* K*-subaljabar dari* $(G,*,\odot,e)$ *jika dan hanya jika* $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

Bukti – bukti :

1. (i) Misalkan H_1 dan H_2 merupakan K-subaljabar dari suatu K-aljabar $(G,*,\odot,e)$, maka $e \in H_1$ dan $e \in H_2$. Akibatnya $e \in H_1 \cap H_2$, dengan kata lain $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.

   (ii) Diambil sebarang unsur $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$. Karena $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$, maka $h_1, h_2 \in H_1$ dan $h_1, h_2 \in H_2$. Selanjutnya, karena H_1, H_2 merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$, maka $h_1 \odot h_2 \in H_1$ dan $h_1 \odot h_2 \in H_2$. Dengan demikian $h_1 \odot h_2 \in H_1 \cap H_2$.

   Jadi terbukti bahwa $H_1 \cap H_2$ merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

2. $(\Rightarrow)$ Misalkan $H_1 \odot H_2$ adalah K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$, dimana $H_1 \odot H_2$

$$= \left\{ h \,\middle|\, \begin{matrix} h = h_1 \odot h_2,\ h_1 \in H_1 \text{ dan} \\ h_2 \in H_2 \end{matrix} \right\}$$

Akan ditunjukkan $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

(i) Diambil sebarang unsur $h \in H_2 \odot H_1$, maka $h = h_2 \odot h_1$ untuk suatu $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$, sehingga

$$\begin{aligned} h &= h_2 \odot h_1 \\ &= e \odot (h_1 \odot h_2) \\ &= (h_1 \odot h_1) \odot (h_1 \odot h_2) \\ &= (h_1 \odot h_2{}^{-1} \odot h_1{}^{-1}) \odot h_1 \\ &= (h_1 * h_2 * h_1) * h_1{}^{-1} \\ &= (h_1 * h_2) * (h_1 * h_1{}^{-1}) \\ &= (h_1 * h_2) * e \\ &= (h_1 * h_2) \\ &= h_1 \odot h_2{}^{-1} \in H_1 \odot H_2 \end{aligned}$$

Karena $h_2 \in H_2$ dan $(H_2,*)$ grup, maka $h_2{}^{-1} \in H_2$ sehingga $h_1 \odot h_2{}^{-1} \in H_1 \odot H_2$. Dengan demikian $H_2 \odot H_1 \subset H_1 \odot H_2$.

(ii) Diambil sebarang unsur $h \in H_1 \odot H_2$, maka $h = h_1 \odot h_2$ untuk suatu $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$, Sehingga :

$$\begin{aligned} h &= h_1 \odot h_2 \\ &= e \odot (h_2 \odot h_1) \\ &= (h_2 \odot h_2) \odot (h_2 \odot h_1) \end{aligned}$$

$= (h_2 \odot h_1^{-1} \odot h_2^{-1}) \odot h_2$

$= (h_2 * h_1 * h_2) * h_2^{-1}$

$= (h_2 * h_1) * (h_2 * h_2^{-1})$

$= (h_2 * h_1) * e$

$= (h_2 * h_1)$

$= h_2 \odot h_1^{-1} \in H_2 \odot H_1$

Karena $h_1 \in H_1$ dan $(H_1,*)$ grup, maka $h_1^{-1} \in H_1$ sehingga $h_2 \odot h_1^{-1} \in H_2 \odot H_1$. Dengan demikian $H_1 \odot H_2 \subset H_2 \odot H_1$. Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$. Akan ditunjukkan $H_1 \odot H_2$ merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$.

(i) $H_1 \odot H_2 \neq \emptyset$, karena $e \in H_1 \odot H_2$, yaitu $e = e \odot e$, dengan $e \in H_1$, $e \in H_2$.

(ii) Diambil sebarang unsur $x,y \in H_1 \odot H_2$, maka

$x = x_1 \odot x_2$ dan

$y = y_1 \odot y_2$, dengan $x_1,y_1 \in H_1$

dan $x_2,y_2 \in H_2$, sehingga :

$x \odot y = (x_1 \odot x_2) \odot (y_1 \odot y_2)$

$= (x_1 \odot (e \odot y_2) \odot (e \odot x_2) \odot y_1$

$= (x_1 \odot y_2^{-1} \odot x_2^{-1}) \odot y_1$

$= (x_1 * y_2 * x_2) * y_1^{-1}$

$= (x_1 * y_2) * (x_2 * y_1^{-1})$

$= (x_1 \odot y_2^{-1}) * (y_1 * x_2^{-1})^{-1}$

$= (x_1 \odot y_2^{-1}) \odot (y_1 \odot x_2)$

$= (x_1 \odot y_2^{-1}) \odot (e \odot (x_2 \odot y_1))$

$= (x_1 \odot y_1 \odot y_2) \odot x_2^{-1}$

$= (x_1 * y_1^{-1} * y_2^{-1}) * x_2$

$= (x_1 * y_1^{-1}) * (y_2^{-1} * x_2)$

$= (x_1 * y_1^{-1}) * (x_2^{-1} * y_2)^{-1}$

$= (x_1 \odot y_1) * (x_2^{-1} \odot y_2^{-1})^{-1}$

$= (x_1 \odot y_1) \odot (x_2^{-1} \odot y_2^{-1})$

$\in H_1 \odot H_2$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $H_1 \odot H_2$ merupakan K-subaljabar dari $(G,*,\odot,e)$. ■

Seperti halnya pada grup yang mempunyai konsep homomorfisma, *K*-aljabar yang dibangun atas grup juga mempunyai konsep homomorfisma yang disebut *K*-homomorfisma.

2.3 Homomorfisma K-aljabar

Berikut ini akan dibahas Homomorfisma *K*-aljabar dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

Definisi 2.3.1 [1] *Misalkan K_1 dan K_2 merupakan K-aljabar. Suatu pemetaan ψ dari K_1 ke K_2, dinotasikan dengan*

$\psi : K_1 \rightarrow K_2$, *disebut K-homomorfisma* *jika* $\forall x_1, y_1 \in K_1$ *berlaku* $\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(x_1) \odot \psi(y_1)$, *dimana* $\psi(x_1), \psi(y_1) \in K_2$.

Contoh 5
Misal $(G, \odot)$ suatu K-aljabar, dibentuk himpunan bagian $H = \{g \odot (g \odot x) : x \in G\}$, berdasarkan

Proposisi 2.2.1 [1] *H merupakan K-subaljabar dari G. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\psi : (G,\odot) \longrightarrow (H,\odot)$, dengan $\psi(x) = g \odot (g \odot x), \forall x \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $\psi : (G,\odot) \longrightarrow (H,\odot)$ merupakan suatu K-homomorfisma.*

Bukti :
Diambil sebarang unsur $x, y \in G$, maka $x \odot y \in G$ dan

$\psi(x \odot y)$

$= g \odot (g \odot (x \odot y))$

$= \big(g \odot (e \odot (x \odot y))\big) \odot g$

$= (g \odot ((e \odot y) \odot (e \odot x))) \odot g$

$= (g \odot (g \odot x)) \odot (g \odot (g \odot y))$

$= \psi(x) \odot \psi(y)$

Karena $\psi(x \odot y) = \psi(x) \odot \psi(y)$, maka $\psi : (G,\odot) \longrightarrow (H,\odot)$ merupakan suatu K-homomorfisma.

Homomorfisma pada K-aljabar akan berakibat pada homomorfisma grup sebagaimana diberikan oleh akibat berikut:

Akibat 2.3.1 [1] *Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ adalah K-aljabar serta $\psi : K_1 \to K_2$, suatu K-homomorfisma, maka ψ juga merupakan homomorfisma dari grup G_1 ke G_2.*

Bukti :
Dipandang $(G_1, *)$ dan $(G_2, *)$ sebagai suatu grup. Akan ditunjukkan pemetaan $\psi : G_1 \to G_2$ merupakan homomorfisma grup. Diambil sebarang unsur $x, y \in G_1$, maka :

$$\begin{aligned}\psi(x * y) &= \psi(x \odot y^{-1}) \\ &= \psi(x) \odot \psi(y^{-1}) \\ &= \psi(x) * [\psi(y^{-1})]^{-1} \\ &= \psi(x) * [\psi(y)^{-1}]^{-1} \\ &= \psi(x) * \psi(y)\end{aligned}$$

Karena $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$, maka ψ juga merupakan homomorfisma dari G_1 ke G_2. ■

Berikut ini akan ditinjau sifat-sifat dari K-homomorfisma sebagaimana diberikan oleh proposisi berikut :

Proposisi 2.3.1 [1] *Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$*

serta $\psi : H_1 \to K_2$, *suatu* K-*homomorfisma. Jika* K_1 *suatu* K-*aljabar yang komutatif, maka* $\forall x_1, x_2 \in K_1$ *berlaku*

1. $\psi(e_1) = e_2$.
2. $\psi(x) = \psi(x^{-1})$.
3. $\psi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \psi(x_1)$.
4. $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$ *jika dan hanya jika* $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.
5. *Jika* H_1 *adalah subaljabar dari* K_1 *maka* $\psi(H_1)$ *adalah subaljabar dari* K_2.

Bukti – bukti :

1. Misalkan ψ suatu K-homomorfisma dari K_1 ke K_2, dimana e_1 dan e_1 berturut – turut menyatakan unsur identitas dari K_1 dan K_2 terhadap operasi biner $\odot$.

   Diambil sebarang unsur $x \in K_1$, maka

   $x \odot e_1 = a$ dan

   $\psi(x \odot e_1) = \psi(x) \ldots (i)$

   Karena $\psi : K_1 \longrightarrow K_2$ suatu K-homomorfisma, maka pers (i) menjadi

   $\psi(x) \odot \psi(e_1) = \psi(x) \ldots (ii)$

   Selanjutnya, karena dan e_2

   Adalah unsur di K_2, maka

   $\psi(x) = \psi(x) \odot e_2 \ldots (iii)$

   Sehingga dari (ii) dan (iii) diperoleh $\psi(x) \odot \psi(e_1) = \psi(x) = \psi(x) \odot e_2$

   Dengan demikian berakibat $\psi(e_1) = e_2$.

2. Misalkan e_1 menyatakan unsur identitas dari K_1. Akan ditunjukkan $\psi(x) = \psi(x^{-1})$. Diambil sebarang unsur $x \in K_1$, maka $e \odot x = x^{-1}$.

   Karena $e \odot x = x^{-1} \in K_1$ dan ψ suatu K-homomorfisma, maka :

   $\psi(e \odot x) = \psi(x^{-1}) \ldots$(i)

   Selanjutnya menurut **Proposisi 2.1.2** menyatakan bahwa $e \odot x = x$.

   Karena $e \odot x = x \in K_1$ dan ψ suatu K-homomorfisma, maka :

   $\psi(e \odot x) = \psi(x) \ldots$(ii)

   Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh $\psi(x^{-1}) = \psi(x)$.

3. Misalkan e_1 menyatakan unsur identitas dari K_1. Akan ditunjukkan $\psi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \psi(x_1)$. Diambil sebarang unsur $x_1 \in K_1$ maka

   $e_1 \odot x_1 \in K_1$ dan berlaku

   $\psi(e_1 \odot x_1) = \psi(e_1) \odot \psi(x_1)$

   $= e_2 \odot \psi(x_1)$.

4. $(\Rightarrow)$ Diketahui $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$.

   Akan ditunjukkan $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.

   Diambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$.

   Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$

   dan berlaku :

   $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$

   $\psi(x_1 \odot x_2) \odot \psi({x_2}^{-1}) = e_2 \odot \psi({x_2}^{-1})$

   $\psi[(x_1 \odot x_2) \odot {x_2}^{-1}] = e_2 \odot \psi({x_2}^{-1})$

   $\psi[(x_1 * {x_2}^{-1}) * x_2] = [\psi({x_2}^{-1})]^{-1}$

   $\psi[x_1 * ({x_2}^{-1} * x_2)] = [\psi({x_2}^{-1})]^{-1}$

   $\psi[x_1 * e_1] = [\psi(x_2)^{-1}]^{-1}$

   $\psi(x_1) = \psi(x_2)$

   $(\Leftarrow)$ Diketahui $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, akan ditunjukkan $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$.

   Diambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$.

   Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$

   dan berlaku :

   $\psi(x_1 \odot x_2) = \psi(x_1) \odot \psi(x_2)$

   $= \psi(x_1) \odot \psi(x_1)$

   $= \psi(x_1 \odot x_1)$

   $= \psi(e_1)$

   $= e_2$

5. Misalkan H_1 merupakan subaljabar dari K_1. Akan ditunjukkan bahwa $\psi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2.

(i). $H_1 \neq \emptyset$ karena setidaknya H_1 memuat elemen identitas yaitu $e_1 \in H_1$ maka $\psi(e_1) = e_2 \in \psi(H_1)$. Dengan kata lain $\psi(H_1) \neq \emptyset$.

(ii). Diambil sebarang unsur $y_1, y_2 \in \psi(H_1)$, maka terdapat $x_1, x_2 \in H_1$ sedemikian sehingga $\psi(x_1) = y_1$, $\psi(x_2) = y_2$, dan

$y_1 \odot y_2 = \psi(x_1) \odot \psi(x_2)$

$= \psi(x_1 \odot x_2) \in \psi(H_1)$,

karena $x_1 \odot x_2 \in H_1$ ∎

Akibat 2.3.2 [1] *Misalkan $\psi : K_1 \longrightarrow K_2$ suatu K-homomorfisma, maka $\forall x_1, y_1 \in K_1$ berlaku :*

1. $\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$
2. $\psi(x_1) = \psi(e_1 \odot x_1)$

Bukti - bukti :

1. Misal e_1 adalah unsur identitas dari K_1.

   Diambil sebarang unsur $x_1, y_1 \in K_1$ maka $y_1 \odot x_1 \in K_1$ dan $x_1 \odot y_1 \in K_1$.

   Dengan demikian $e_1 \odot (x_1 \odot y_1) \in K_1$. Menurut

Proposisi 2.1.3 berlaku $e_1 \odot (x_1 \odot y_1) = y_1 \odot x_1$

$$\psi[e_1 \odot (x_1 \odot y_1)] = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi[(e_1 \odot x_1) \odot (e_1 \odot y_1)] = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi({x_1}^{-1} \odot {y_1}^{-1}) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi({x_1}^{-1}) \odot \psi({y_1}^{-1}) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi(x_1) \odot \psi(y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

2. Misal e_1 adalah unsur identitas dari K_1.

   Diambil sebarang unsur $x_1 \in K_1$, maka

   $e_1 \odot x_1 \in K_1$ dengan $e_1 \odot x_1 = {x_1}^{-1}$.

$$\psi(e_1 \odot x_1) = \psi({x_1}^{-1})$$

$$\psi(e_1 \odot x_1) = \psi(x_1) \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh dari kernel ψ.

Definisi 2.3.2 [1] *Misalkan* $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ *dan* $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ *merupakan* K*-aljabar dan* $\psi : K_1 \to K_2$ *suatu homomorfisma. Himpunan bagian dari* K_1 *yaitu* $\ker(\psi) = \{x \in K_1 : \psi(x) = e_2\}$ *disebut kernel dari* ψ.

Contoh 6

Berdasarkan Contoh 5 diketahui $(G, \odot)$ merupakan K-aljabar dan $(H, \odot)$ merupakan K-subaljabar dari $(G, \odot)$ serta $\psi : (G, \odot) \to (H, \odot)$ suatu K-homomorfisma dengan $\psi(x) = g \odot (g \odot x), \forall x \in G$. Akan dicari kernel dari ψ. Diambil sebarang unsur $x \in G$, terdapat 2 kemungkinan yaitu $x = e_1$ atau $x \neq e_1$.

1) Untuk $x = e_1$

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= g \odot (g \odot e_1) \\ &= g \odot g \\ &= e_2 \end{aligned}$$

2) Untuk $x \neq e_1$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= g \odot (g \odot x) \\ &= g * (g * x^{-1})^{-1} \\ &= g * (x * g^{-1}) \neq e_2 \end{aligned}$$

Karena untuk $x = e_1$, $\psi(e_1) = e_2$ maka $\ker(\psi) = \{e_1\}$.

Selanjutnya akan ditinjau keterkaitan antara $\ker(\psi)$ dengan relasi ekuivalensi yang didefinisikan pada K-aljabar. Misalkan $\psi : K_1 \to K_2$ suatu homomorfisma, maka

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \{x \in K_1 | \psi(x) = e_2\}.$$

Didefinisikan relasi "$\sim$" pada K_1 dengan $x \sim y$ jika hanya jika

$$x \odot y \in \ker(\psi), \forall x, y \in K_1.$$

Teorema 3.3.2 [1] *Misalkan K_1 suatu K-aljabar. Jika pada K_1 didefinisikan sebuah relasi "$\sim$" dengan $x \sim y$ jika hanya jika $x \odot y \in ker(\psi), \forall x, y \in K_1$, maka relasi "$\sim$" merupakan relasi ekuivalensi.*

Bukti :
Misal pada K_1 didefinisikan relasi "$\sim$" dengan $x \sim y$ jika hanya jika $x \odot y \in$ ker $(\psi), \forall x, y \in K_1$. Akan ditunjukkan relasi "$\sim$" merupakan relasi ekuivalensi, yaitu akan ditunjukkan relasi $\sim$ memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

1). Diambil sebarang unsur $x \in K_1$ maka $x \odot x = e_1 \in K_1$ dan $\psi(x \odot x) = \psi(e_1) = e_2$, sehingga $x \odot x \in \ker(\psi)$, yaitu $x \sim x$. Dengan kata lain relasi $\sim$ bersifat refleksif.

2). Diambil sebarang unsur $x, y \in K_1$dan $x \sim y$, maka $x \odot y \in \ker(\psi)$ sehingga $\psi(x \odot y) = e_2$. Karena $\psi : K_1 \to K_2$ suatu homomorfisma, maka menurut Akibat 2.3.2 , berlaku $\forall x, y \in K_1$ berlaku $\psi(x \odot y) = \psi(y \odot x)$. Dengan demikian $(y \odot x) = e_2$, maka $y \odot x \in \ker(\psi)$ yaitu $y \sim x$, akibatnya relasi $\sim$ bersifat simetris.

3). Diambil sebarang unsur $x, y, z \in K_1$ dan $x \sim y, y \sim z$. Akan ditunjukkan $x \sim z$. Karena $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka $x \odot y \in \ker(\psi)$ dan $y \odot z \in \ker(\psi)$. Sehingga $\psi(x \odot y) = e_2$ dan $\psi(y \odot z) = e_2$. Selanjutnya, karena $x \odot y \in K_1$ dan $y \odot z \in K_1$ maka $(x \odot y) \odot (y \odot z) \in K_1$ dan

$$\begin{aligned}
\psi((x \odot y) \odot (y \odot z)) &= \psi(x \odot y) \odot \psi(y \odot z) \\
&= e_2 \odot e_2 \\
&= e_2 \qquad \dots (i)
\end{aligned}$$

Disisi lain
$$\psi((x \odot y) \odot (y \odot z)) = \psi(x \odot z) \dots (ii)$$

Dari (i) dan (ii) didapat $\psi(x \odot z) = e_2$. Sehingga $x \odot z \in \ker(\psi)$, yaitu $x \sim z$. Dengan kata lain relasi $\sim$ bersifat transitif.

Dari (1), (2), dan (3) terbukti bahwa relasi '$\sim$' merupakan relasi ekuivalensi pada K_1.

3. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan, dapat diambil beberapa hal sebagai berikut :

1. Misalkan $(G,*)$ suatu grup dengan unsur identitas e. Jika pada G dilengkapi operasi $\odot$ yang didefinisikan oleh $\forall x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ sedemikian hingga operasi $\odot$ merupakan operasi biner pada G dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka $(G,*,\odot, e)$ akan membentuk struktur aljabar baru yang disebut *K*-aljabar.
2. Dari suatu *K*-aljabar dapat dibentuk himpunan bagian yang memiliki sifat *K*-aljabar terhadap operasi biner yang sama yang dinamakan *K*-subaljabar
3. Sebagaimana pada grup yang terdapat konsep homomorfisma grup, pada *K*-aljabar juga terdapat konsep homomorfisma yang dinamakan *K*-homomorfisma.
4. Sifat-sifat yang berlaku pada grup, akan berlaku juga pada *K*-aljabar.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] K.H Dar Akram, (2007), *On K-Homomorphisms of K-Algebras*, University of the Punjab, International Mathematical Forum. Ser, 46.

[2] K. H Dar Akram, (2006), *On Subclass of K(G)-algebra*, Annals of University of Cariova, Math. Comp. Sci. Ser, 33.