PENDEKATAN REGRESI UNTUK ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI DUA-ARAH

Dwi Ispriyanti
Program Studi Statistika Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. Regression approach can be used for solving analysis of variance problems, wether of one way or two ways ANOVA . In ANOVA, model is an important factor. In this paper, we will study two ways classification ANOVA with regression approach for solving the fixed effect model. It can be done if the model is indentified truly and if the preventive procedure have been done so we have an independent normal equation. A characteristic of ANOVA is that the analysis model is overparameterized, so we have to make constraint for the parameters. In the Regression model approach for ANOVA problems, the independent variable X at categorical form 0 and 1 , or we have to make dummy variables at row and colom factors.

Keywords: ANOVA, constraint

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi pada dasarnya adalah studi mengenai ketergantungan variabel tak bebas dengan satu atau lebih variabel bebas, dengan tujuan untuk mengestimasi dan/atau memprediksi rata-rata populasi atau nilai rata-rata variabel tak bebas berdasarkan nilai variable bebas. Hasil analisis regresi adalah berupa koefisien (parameter) untuk masing-masing variabel bebas. Prosedur regresi berganda untuk memperoleh parameternya, $b = (X^T X)^{-1}$ $(X^T Y)^{-1}$ yaitu, disyaratkan bahwa matriks $(X^T X)$ bersifat tidak singular, ini berarti bahwa persamaan normalnya harus terdiri atas persamaan-persamaan yang bebas satu sama lain yang banyaknya sama dengan banyaknya parameter yang harus diduga. Akan tetapi, kalau datanya dari suatu percobaan yang terancang, perlu diperiksa bahwa semua persamaan itu bebas, kalau ternyata tidak demikian, maka harus diambil langkah-langkah yang diperlukan untuk memperoleh nilai dugaan.

Metode yang banyak digunakan untuk menganalisis data dari suatu percobaan yang terancang adalah teknik analisis ragam. Seringkali teknik ini dipandang sama sekali berbeda dari regresi secara umum, belum banyak peneliti yang menyadari bahwa setiap masalah analisis ragam dengan pengaruh tetap dapat ditangani melalui teknik regresi secara umum kalau modelnya diidentifikasi secara benar dan langkah-langkah pencegahan telah diambil agar diperoleh persamaan normal yang bebas. Suatu ciri analisis ragam adalah model ini terparameterisasikan secara berlebih, artinya model ini mengandung lebih banyak parameter daripada yang dibutuhkan untuk merepresentasikan pengaruh-pengaruh yang diinginkan. Parameterisasi berlebihan ini biasanya dikompensasi dengan membuat kendala terhadap parameter-peremeternya. Kendala pada percobaan untuk klasifikasi 2 arah dengan interaksi diambil $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_i = 0$ dan dengan interaksi $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_i = \sum_{i,j} \gamma_{ij} = 0$. Seringkali tanpa disadari bahwa semua situasi analisis ragam mempunyai model, dan bahwa model itulah yang menjadi dasar bagi pembuatan tabel analisis ragam.

Pendekatan regresi untuk suatu rancangan percobaan, maka peubah bebas (*X*) diberi nilai satu (1) dan nol (0), atau dengan membuat peubah boneka yang bersifat pengelompokan.

Contoh penerapan dalam tulisan ini adalah suatu percobaan, dimana pengusaha menghadapi masalah dengan laju produksi dalam sebuah pabriknya. Masalah yang dihadapi adalah gagalnya mencapai laju produksi yang sama dibawah kondisi yang identik. Untuk itu dilakukan percobaan dengan 24 amatan yang berasal dari dua belas kombinasi antara pereaksi dan katalisator.

2. ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI 2 ARAH TANPA INTERAKSI

Dalam suatu percobaan, yang terdiri dari *I* perlakuan, dan *J* kelompok, maka tabel data dapat dibuat seperti Tabel 1.

Tabel 1. Data Klasifikasi 2 arah

Faktor A (baris)	Faktor B (kolom)				Jumlah	Rataan
	1	2	...	J		
1 : : I	y_{11} y_{21} y_{I1}	y_{12} y_{22} y_{I2}	... ...	y_{1J} y_{2J} y_{IJ}	$y_{1.}$ $y_{2.}$ $y_{I.}$	$\bar{y}_{.1}$ $\bar{y}_{.2}$ $\bar{y}_{.I}$
Jumlah	$y_{.1}$	$y_{.2}$		$y_{.J}$	$y_{..}$	$y_{.1}$
Rataan	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$		$\bar{y}_{.J}$		$\bar{y}_{..}$

Secara matematik model tersebut tanpa interaksi dapat ditulis sebagai berikut.

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_i + \varepsilon_{ij}, \qquad (2.1)$$

dengan $i = 1,2,...,I$, $j = 1,2,...J$,

dimana

y_{ij} = Nilai pengamatan dari perlakuan ke i dalam kelompok ke j,

μ = Nilai tengah populasi, sering disebut dengan rataan umum,

α_i = Parameter yang menyatakan rataan baris ke i,

β_i = Parameter yang menyatakan rataan kolom ke j,

ε_{ij} = Galat pada pengamatan ke (*i*,*j*).

Penyajian dengan matriks untuk (2.1) diatas dapat ditulis sebagai berikut.

$$y^T = (y_{11}, y_{12}, ..., y_{iJ}, y_{21}, ..., y_{2J}, ..., y_{I1}, ..., y_{IJ}).$$

$$X = \begin{array}{c} \leftarrow \; \mathrm{I} \; \rightarrow \quad \leftarrow \; \mathrm{J} \; \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 1 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 1: \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ : \\ \alpha_I \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_J \end{bmatrix}, \text{ dan } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1J} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2J} \\ \varepsilon_{I1} \\ \varepsilon_{I2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{IJ} \end{bmatrix}.$$

Jika kita perhatikan matriks *X* di atas, maka terlihat bahwa kolom matrik *X* tidak bebas satu sama lain. Karena $X^T X$ singular, sehingga persamaan normal tidak memberikan jawaban yang tunggal untuk parameter yang ingin ditaksir. Agar persamaan normal mempunyai jawab yang tunggal, maka syarat kendala perlu ditambahkan. Kendala yang memberikan jawaban seperti itu adalah

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0. \qquad (2.2)$$

Dengan kendala tersebut, maka persamaan normalnya $(X^T X)b = X^T Y$ mempunyai jawab tunggal, yaitu

$$X^T X = \begin{bmatrix} IJ & J & J & \dots & J & I & I & \dots & I \\ J & J & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ J & 0 & J & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ J & 0 & 0 & \dots & J & 1 & 1 & \dots & 1 \\ I & 1 & 1 & \dots & 1 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ I & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & I \end{bmatrix}.$$

Bila b_0, a_1 dan b_j merupakan penaksir dari μ, α, dan β, maka persamaan normal-nya $(X^T X)b = X^T Y$ dapat ditulis

$$IJ\, b_0 + J\sum_{i=1}^{I} a_i + I\sum_{j=1}^{J} b_j = \sum_i \sum_j y_{ij} .$$

$$J\, b_0 + Ja_1 + \sum_j b_j = \sum_j y_{1j} .$$

$$J\, b_0 + Ja_2 + \sum_j b_j = \sum_j y_{2j} .$$

$$\vdots$$

$$J\, b_0 + Ja_I + \sum_j b_j = \sum_j y_{IJ} .$$

$$I\, b_0 + \sum_i a_i + Ib_1 = \sum_i y_{i1} .$$

$$\vdots$$

$$I\, b_0 + \sum_i a_i + Ib_J = \sum_i y_{iJ} .$$

Akibat dari kendala (2.2) , maka persama-an di atas dapat disederhanakan menjadi

$$IJ\, b_0 = \sum_i \sum_j y_{ij} ,$$

$$b_0 = \sum_i \sum_j y_{ij} \; / IJ = \bar{y} .$$

Karena $\sum_j b_j = 0$, maka persamaan baris kedua menjadi

$$a_1 = (\sum_j y_{1j} - Jb_0)/J = \bar{y}_1 - \bar{y} .$$

$$a_2 = \bar{y}_1 - \bar{y} .$$

$$\vdots$$

$$a_I = \bar{y}_1 - \bar{y} .$$

Karena $\sum_i a_i = 0$, maka

$$b_1 = (\sum_i y_{i1} - Jb_0)/I = \bar{y}_1 - \bar{y} .$$

$$\vdots$$

$$b_j = \bar{y}_J - \bar{y} .$$

Jadi persamaan normal di atas menjadi

$$b_0 = \hat{\mu} = \bar{y} ,$$

$$a_1 = \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..},\ i=1,2,\dots,I,$$

$$b_j = \hat{\beta}_j = \bar{y}_{.J} - \bar{y},\ j=1,2,\dots,I.$$

Persamaan (2.1) dengan mengganti para-meternya menjadi $\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{..} + a_i + b_j$.

JK_{regresi}

$$= \sum_i \sum_j (\hat{y}_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j (a_i + b_j)^2$$

$$= \sum_i \sum_j (\bar{y}_{i1} - \bar{y})^2 + \sum_i \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 ,$$

$$JK_{\text{regresi}} = \underbrace{J\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}_{JKA} + \underbrace{I\sum_i (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2}_{JKB}$$

JKA = jumlah kuadrat karena baris,
JKB = Jumlah kuadrat karena kolom.

$$JK_{\text{sisa}} = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 ,$$

$$\text{dk} = (n-1)-(I-1)-(J-1)$$

$$= (IJ - I) - (J-1) = (I-1)(J-1).$$

Sehingga diperoleh Tabel 2.

Tabel 2. Analisis Ragam klasifikasi 2 arah tanpa interaksi

Sumber Keragaman	DB	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tangah
A(Baris)	I-1	$J\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$J\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 / I - 1$
B (Kolom)	J-1	$I\sum_j (\bar{y}_j - \bar{y}_{..})^2$	$I\sum_j (\bar{y}_j - \bar{y}_{..})^2 / J - 1$
Sisa	(I-1)(J-1)	$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2$	$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 /(I-1)(J-1)$
Total	IJ-1	$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})$	

Dalam pengujian hipotesis:

1. H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I = 0$,
   H_1= minimal ada satu
   $\alpha\, i \neq 0, i = 1,2,..,I$.
2. H_0: $\beta_1 = \beta 2 = \ldots = \beta_J = 0$,
   H_1= minimal ada satu
   $\beta\, i \neq 0 (j = 1,2,..,J)$.

Untuk pengujian 1,

$$F = \frac{JKA / I - 1}{JKS / (I - 1)(J - 1)} .$$

Bila $F_{((I\text{-}1,(I\text{-}1)(J\text{-}1),\alpha)} < F$ untuk suatu α tertentu, maka H_0 ditolak, sebaliknya H_1 diterima.

Untuk pengujian 2,

$$F = \frac{JKB / J - 1}{JKS / (I - 1)(J - 1)} .$$

Bila $F_{((J\text{-}1,(I\text{-}1)(J\text{-}1),\alpha)} < F$ untuk suatu α tertentu, maka H_0 ditolak, sebaliknya H_1 diterima.

3. ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI 2 ARAH DENGAN INTERAKSI

Bila kedua faktor ada interaksi, maka banyaknya pengamatan per sel haruslah lebih besar dari satu agar interaksi dan sisa dapat dipisah. Dengan adanya interaksi maka persamaan (1) menjadi

$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$,

i= 1,2,…,I; j= 1,2,…,J; k=1,2,...,K.

K = adalah banyaknya dalam pengamatan dalam tiap sel.

Agar persamaan normal mempunyai jawab tunggal, maka diperlukan kendala

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0 ,$$

$\sum_{1=1} \gamma_{ij} = 0,$ untuk setiap *i*,

$\sum_{j=1} \gamma_{ij} = 0,$ untuk setiap ***j*.**

Rata-rata keseluruhan

$$\bar{y}_{...} = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk} / n ; n = IJK$$

Rata-rata taraf ke *I* faktor A

$$\bar{y}_{i..} = \sum_i \sum_k y_{ijk} / JK ; i = 1,2,..., I$$

Rata-rata taraf ke *J* faktor B

$$\bar{y}_{.j.} = \sum_i \sum_k y_{ijk} / IK ; j = 1,2,..., I$$

Rata-rata sel ke (*i*,*j*)

$$\bar{y}_{ij.} = \sum_k y_{ijk} / K$$

Penaksiran parameter dilakukan dengan meminimumkan jumlah kuadrat sesatan terhadap parameter-parameternya, sehingga diperoleh

$b_0 = \hat{\mu} = \bar{y}_{...}$,

$a_i = \alpha_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, i = 1,2,..,I$

$b_j = \beta_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}, j = 1,2,..,J$,

$g_{ij} = \hat{\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}, \forall\ i$ dan j

$$\hat{y}_{ijk} = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) = \bar{y}_{ij.}$$

$$\begin{aligned} JK_{Regresi} &= \sum_i \sum_j \sum_k (\hat{y}_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2 \\ &= \underbrace{JK \sum_i (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2}_{JKA} \\ &\quad + \underbrace{IK \sum_j (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2}_{JKB} \\ &\quad + \underbrace{K \sum_i \sum_j (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2}_{JK(AB)} \end{aligned}$$

$$JK_{sisa} = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

Sehingga analisis ragamnya dapat dituliskan seperti pada Tabel 3.

Dalam pengujian hipotesis:

1. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I = 0$,
   H_1= minimal ada satu $= \alpha i \neq 0$.
2. $H_0 : \beta_1 = \beta 2 = \ldots = \beta_J = 0$,
   H_1= minimal ada satu $\beta_J \neq 0$.
3. $H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_K = 0$,
   H_1= minimal ada satu $\gamma_K \neq 0$.

Tabel 3. Tabel Analisis Ragam Klasifikasi 2 arah dengan Interaksi

Sumber Keragaman	DB	Juml.Kuadrat	Kuadrat Tangah
A(Baris) B (Kolom) AB(Interaksi) Sisa	I-1 J-1 (I-1)(J-1) $IJ(K$-1)	JKA JKB $JK(AB)$ JKS	$s^2_A = JKA/I-1$ $s^2_B = JKB/J-1$ $s^2_{AB} = JK(AB)/(I-1)(J-1)$ $s^2 = JKS/IJ(K-1)$
Total	IJK-1	JKT	

Untuk pengujian 1, $F = \dfrac{JKA / I - 1}{JKS / IJ(K-1)}$.

Bila $F_{((I-1, IJ(K-1), \alpha)} < F$ untuk suatu α tertentu, maka tolak H_0, sebaliknya H_1 diterima.

Untuk pengujian 2, $F = \dfrac{JKB / J - 1}{JKS / IJ(K-1)}$.

Bila $F_{((J-1)IJ(K-1), \alpha)} < F$ untuk suatu α tertentu, maka tolak H_0, sebaliknya H_1 diterima.

Untuk pengujian 3,

$$F = \frac{JK(AB)/(I-1)(J-1)}{JKS / IJ(K-1)}.$$

Bila $F_{((I-1)(J-1), IJ(K-1), \alpha)} < F$ untuk suatu α tertentu, maka tolak H_0, sebaliknya H_1 diterima.

3.1. PENGGUNAAN PEUBAH BONEKA

Cara lain untuk menangani permasalahan di atas adalah dengan menggunakan peubah boneka. Prinsip dasar pemakaian peubah boneka bila mempunyai t kelompok, maka peubah bonekanya adalah *(t-1)*, karena jika banyaknya peubah boneka sama dengan banyaknya kelompok, maka peubah boneka tersebut secara keseluruhan tidak lagi bebas satu sama lain, karena jumlahnya merupakan vektor yang semua unsurnya sama dengan 1. Dalam keadaan seperti itu maka matriks $X^T X$ menjadi singular, sehingga persamaan normal $(X^T X)b = X^T Y$ tidak mempunyai jawab yang tunggal. Banyak cara untuk memilih peubah boneka dan kita harus hati-hati agar peubah boneka yang dipilih tidak menjadikan matriks $X^T X$ singular.

Misalnya, bila ada tiga metode mengajar yang ingin dibandingkan, maka diperlukan dua peubah boneka, peubah boneka tersebut dapat dituliskan seperti berikut.

$$X_1 = \begin{cases} 0, \text{ bila murid masuk kelompok I atau III} \\ 1, \text{ bila masuk kelompok II} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 0, \text{ bila murid masuk kelompok I atau II} \\ 1, \text{ bila masuk kelompok III} \end{cases}$$

Sehingga bila murid masuk kelompok I maka $X_1 = X_2 = 0$. Sehingga bila ada I kelompok, maka peubah bonekanya adalah

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & X_2 & X_3 & \ldots & X_I \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Pada kasus klasifikasi 2 arah, dalam pembentukan peubah boneka, baris mempunyai (I-1) peubah boneka, misal dinyatakan dengan peubah X, faktor kolom mempunyai (J-1) peubah boneka yang dapat dinyatakan dengan peubah lain, misal Z, sedangkan interaksinya adalah perkalian antara XZ. Sehingga bila taraf faktor cukup besar, yaitu bila I dan J besar, maka cukup banyak peubah boneka yang harus digunakan.

Untuk mendapatkan masing-masing jumlah kuadrat regresi yang berasal dari satu koefisien b dapat digunakan prinsip jumlah kuadrat ekstra, yaitu kolom-kolom X ortogonal terhadap kolom-kolom

Xj untuk *i, j*=1,2,....*t* ($i \neq j$), dengan kata lain $X_1^T X_j = 0$, maka

$JK(b) = b^T(X^T Y) =$ *JK(b1)* + *JK(b2)* +...+*JK(bt).*

3.2. STUDI KASUS

Seorang pengusaha menghadapi masalah dengan laju produksi dalam sebuah pabriknya. Setelah diskusi panjang lebar dengan bagian risetnya, diputuskan untuk menyelidiki pengaruh dua belas kombinasi yang berasal dari empat pereaksi dan 3 katalisator. Salah satu masalah yang dihadapi adalah gagalnya mencapai laju produksi yang sama dibawah kondisi yang tampaknya identik. Untuk memperoleh nilai dugaan bagi keragaman, maka diputuskan untuk mengulang setiap kombinasi perlakuan tersebut dua kali. Sehingga percobaan ini terdiri dari 24 amatan, dan itu dikerjakan secara acak. Data disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Data 24 amatan dari Katalisator dan Pereaksi

	Katalisator		
Pereaksi	1	2	3
A	4;6	11;7	5;9
B	6;4	13;15	9.7
C	13;15	15;9	13;13
D	12;12	12;14	7;9

Sumber data : Draper N (1992)

Percobaan ini mempunyai 4 faktor baris yaitu pereaksi yang terdiri dari 4 taraf, sedangkan faktor kolom adalah katalisator yang terdiri dari 3 taraf. Tiap sel mengandung 2 ulangan dan ini memungkinkan adanya interaksi antara kedua faktor, sehingga modelnya dapat ditulis sebagai berikut.

$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$; *i* = 1,2,3,4; *j*= 1,2,3; *k*=1,2.

Dengan menggunakan rumus–rumus diatas dengan mudah dapat dihitung:

$\hat{\mu} = 10$, $\hat{\alpha}_1 = -3$, $\hat{\alpha}_2 = -1$, $\hat{\alpha}_3 = 3$, $\hat{\alpha}_4 = 1$

$\hat{\beta}_1 -1$, $\hat{\beta}_2 = 2$, $\hat{\beta}_3 = -1$, $\hat{\gamma}_{11} = 1$; $\hat{\gamma}_{12} = 0$; $\gamma_{13} = 1$, $\hat{\gamma}_{21} = 1$; $\hat{\gamma}_{22} = 6$, $\hat{\gamma}_{23} = 0$, $\hat{\gamma}_{31} = 2$ $\hat{\gamma}_{32} = -3$; $\hat{\gamma}_{33} = 1$, $\hat{\gamma}_{41} = 2$; $\hat{\gamma}_{42} = 0$; $\hat{\gamma}_{43} = -2$, *JKA*=120, *JKB*=48, *JK(AB)*=84, *JKT*= 300 dan *JKS* = 48

Tabel 5. Analisis Ragam klasifikasi 2 arah

Sumber	DB	JK	RK	F
Baris (pereaksi)	3	120	40	10.00
Kolom (katalisator)	2	48	24	6.0
AB(interkasi)	6	84	14	3.5
Galat	12	48	4	
Total	23	300		

Dengan mengambil F_{tabel} untuk $\alpha = 0.05$, maka $F_{\text{hitung}} > F_{\text{tabel}}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 ditolak, yang berarti ada pengaruh interaksi antara pereaksi dan katalisator.

Berikut ini solusi jika menggunakan peubah boneka. Karena baris ada 4 faktor maka dibuat 3 peubah boneka X_1, X_2 dan X_3 , sedangkan kolom mempunyai 3 faktor maka dibuat 2 peubah boneka, yaitu Z_1 dan Z_2 .Faktor interaksinya adalah X_1Z_1, X_1Z_2, X_2Z_1, $X_2 Z_2$, X_3Z_1, dan X_3Z_3, sehingga disini ada 11 peubah boneka .

Faktor interaksi diperoleh dengan mengalikan faktor pereaksi dengan katalisator. Model regresinya dapat ditulis sebagai berikut.

$$\hat{Y} = \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 Z_1 + \beta_5 Z_2 + \beta_6 X_1 Z_! + \beta_7 X_1 Z_2 + \beta_9 X_2 Z_2 + \beta_{10} X_3 Z_1 + \beta_{11} X_3 Z_2 + \beta_8 X_2 Z_1 .$$

Suku $\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$ untuk pereaksi, suku $\beta_4 Z_1 + \beta_5 Z_2$ untuk katalisator, suku $\beta_6 X_1 Z_! + \beta_7 X_1 Z_2 + \beta_8 X_2 Z_1 + \beta_9 X_2 Z_2$ $\beta_{10} X_3 Z_1 + \beta_{11} X_3 Z_2$ untuk interaksi pereaksi dan katalisator

Untuk mendapatkan kolom-kolom *X* ortogonal terhadap kolom-kolom *Xj*, maka dibuat peubah boneka sebagai berikut.

Tabel 6. Data peubah boneka X_1, X_2, X_3.

X1	*X2*	*X3*	Pereaksi
-1	0	-1	A
1	0	- 1	B
0	-1	1	C
0	1	1	D

Tabel 7. Data peubah boneka Z_1, Z_2.

Z1	*Z2*	Katalisator
-1	1	1
0	- 2	2
1	1	1

Dengan peubah boneka di atas dapat dibuat matriks X yang berukuran 24×12, $X^T X$ suatu matrik diagonal berukuran 12×12, yaitu:

$$X^T X = diag\{24,12,12,24,16,48,8,24,16,48\},$$

$$X^T Y = \{240,12,-12,48,0,-48,2,-18, -6,-18-6,-18,-20,36\}^T .$$

Dengan demikian $b = (X^T X)^{-1} X^T Y$ mempunyai nilai:

$$b = \{10,1,-1,2,0,-1,1/4,-3/4,-3/4,-3/4 -5/4,3/4\}^T ,$$

$$JKR = b^T (X^T Y) = 2652 ,$$

$$JKS = Y^T Y - b^T (X^T Y) .$$

Tabel 8. Analisis ragam klasifikasi 2 arah dengan Pendekatan regresi

Sumber	DB	JK	RK	F
Pereaksi	3	120	40	10.00
Katalisator	2	48	24	6.0
Katalis*Pereaksi	6	84	14	3.5
Galat	12	48	4	
Total	23	300		

Hasil yang diperoleh dengan menggunakan peubah boneka sama dengan Tabel 8 di atas, sehingga kesimpulannya sama, yaitu ada pengaruh yang nyata pada interaksi katalisator dan pereaksi dan sumbangan yang paling nyata diberikan oleh b_{10} dan b_{11}. Hal ini menandakan adanya interaksi yang sesungguhnya antara X_3 dan Z_1 dengan X_3 dan Z_2.

4. KESIMPULAN

1. Dalam analisis ragam semua peubah bebas atau faktor bersifat katagori, sedangkan dalam analisis regresi bersifat kuantitatif
2. Matrik $X^T X$ pada analisis ragam bersifat singular, sehingga perlu syarat tambahan, sedangkan pada analisis regresi jarang sekali hal itu terjadi.
3. Pemilihan peubah boneka adalah hal penting dan mendapatkan jumlah kuadrat masing-masing parameter digunakan prinsip jumlah kuadrat ekstra.
4. Semakin rumit rancangannya, semakin rumit konversi bentuk regresinya, dan semakin besar ukuran matriks *X* nya.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Drapper, NR and Harry Smith, S. (1992), *Analisis Regresi Terapan*, Edisi kedua, Gramedia Pustaka Utama , Jakarta.

[2]. R.K Sembiring. (1995), *Analisis Regresi*, Edisi ke 2, Penerbit ITB Bandung.

[3]. Kutner, Nachtsheim, Neter. (2004), *Applied Linier Regression Models*, Mc Graw-Hill, New York.