TEOREMA ELIMINASI CUT
PADA SISTEM LOGIKA FL_{gc} DAN $FL_{w,gc}$

Bayu Surarso
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, SH Tembalang Semarang 50275

Abstract. It is well known that the cut elimination theorem does not hold for FL_c dan $FL_{w,c}$, neither for propositional level nor predicate level. On the other hand, it has been proved that for the propositional level the cut elimination theorem holds for FL with global contraction (FL_{gc}), which is equivalent to FL_c. Similar result is also shown for system FL with both weakening and global contraction rule ($FL_{w,gc}$), which is equivalent to $FL_{w,c}$. In the present paper we modify and develop the method used to prove the cut elimination for proportional logic FL_{gc} to show that the cut elimination theorem even holds for the predicate logics FL_{gc} dan $FL_{w,gc}$.

Keywords: Theorema Elimination Cut, logica Full Lambek (FL), global contraction.

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 1935 Gentzen mengenalkan formulasi suatu logika yang disebut logika intuisionistik (*intuitionistic logics*). Formulasi tersebut yang kemudian lebih dikenal sebagai sistem sequent tipe-Gentzen LJ memuat tiga aturan struktural yang disebut aturan *weakening, contraction* dan *exchange*. Sedangkan logika yang tidak memuat salah satu atau beberapa aturan-aturan struktural ini disebut logika substruktur.

Secara umum, sistem sequent tipe-Gentzen untuk logika substruktural memuat suatu aturan yang disebut aturan cut [3], tetapi pada kenyataannya adanya aturan cut akan menimbulkan kesulitan dalam menganalisa logika yang bersangkutan. Gentzen berhasil mengatasai kesulitan itu untuk LJ dengan membuktikan bahwa suatu sifat yang kemudian disebut *teorema eliminasi cut* berlaku pada LJ. Teorema eliminasi cut menyebutkan bahwa jika sebuah sequent dapat dibuktikan, maka sequent tersebut dapat dibuktikan tanpa menggunakan aturan *cut*.

Logika subtruktur Full Lambek (FL) pertama kali dikenalkan oleh Ono pada tahun 1990, secara garis besarnya logika ini dapat diperoleh dari LJ dengan menghilangkan aturan-aturan struktural *weakening, contraction* dan *exchange*. Teorema Eliminasi Cut telah diketahui berlaku pada FL dan FL dengan *weakening* (FL_w), di lain pihak telah dibuktikan bahwa teorema eliminasi cut tidak berlaku pada FL dengan aturan *contraction* (FL_c) dan FL dengan aturan *contraction* dan aturan weakening ($FL_{w,c}$) [2]. Pada [1] dikenalkan suatu aturan struktural yang disebut *global contraction* dan membuktikan bahwa pada level logika proposisi teorema cut elimination berlaku pada logika-logika FL dengan *global contraction* (FL_{gc}) dan FL dengan weakening dan *global contraction* ($FL_{w,gc}$), kedua logika terakhir ini masing-masing ekuivalen dengan logika-logika proposisi FL_c dan $FL_{w,c}$. Dalam tulisan ini teknik pembuktian Teorema Eliminasi Cut yang telah digunakan pada [1] akan dimodifikasi dan dikembangkan untuk membuktikan teorema eliminasi cut pada logika-logika predikat FL_{gc} dan $FL_{w,gc}$.

2. FORMULASI LOGIKA PREDIKAT FL_{gc} dan $FL_{w,gc}$

Logika predikat FL_{gc} dapat diperoleh dari logika proposisi FL_{gc} [1], dengan menambah aturan *universal quantifier* dan *ekstensional quantifier*. Lebih tepatnya FL_{gc} dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1

Logika Predikat FL_{gc} terdiri dari inisial sequent berikut.

1. $A \to A$
2. $\Gamma, \bot, \Delta \to C$
3. $\Gamma \to T$

dan aturan inferensi berikut.

Aturan cut:

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta, A, \Sigma \to C}{\Delta, \Gamma, \Sigma \to C}(cut),$$

dalam hal ini, formula *A* yang muncul pada sequent atas aturan cut tersebut dinamakan *formula cut*.

Aturan struktural *global contraction*:

$$\frac{\Gamma, \Delta, \Delta, \Sigma \to C}{\Gamma, \Delta, \Sigma \to C}(\text{global contraction})$$

.

Aturan untuk penghubung logika:

$$\frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma \to A \supset B}(\to\supset),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta, B, \Sigma \to C}{\Delta, A \supset B, \Gamma, \Sigma \to C}(\supset\to),$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B}(\to \vee 1),$$

$$\frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}(\to \vee 2),$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \to C \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \to C}(\vee \to),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}(\to \wedge),$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \to C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \to C}(\wedge 1 \to),$$

$$\frac{\Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \to C}(\wedge 2 \to),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A * B}(\to *),$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A * B, \Delta \to C}(* \to).$$

Aturan untuk quantifier:

$$\frac{\Gamma \to C(t)}{\Gamma \to \exists z C(\to z)}(\to \exists),$$

$$\frac{\Gamma, A(x), \Delta \to C}{\Gamma, \exists z A(z), \Delta \to C}(\exists \to),$$

$$\frac{\Gamma \to C(x)}{\Gamma \to \forall z C(z)}(\to \forall),$$

$$\frac{\Gamma, A(t), \Delta \to C}{\Gamma, \forall z A(z), \Delta \to C}(\forall \to).$$

Disini, t adalah suatu *term*, dan x adalah suatu variabel yang memenuhi persyaratan variabel eigen. Dengan kata lain, x tidak boleh muncul di sequent bawah dari $(\exists \to)$ dan $(\to \forall)$.

Logika predikat $FL_{w,gc}$ diperoleh dari logika predikat FL_{gc} dengan menambahkan aturan *weakening* sebagai berikut $\frac{\Gamma, \Sigma \to C}{\Gamma, A, \Sigma \to C}(\text{weakening})$.

4. TEOREMA ELIMINASI CUT PADA LOGIKA FL_{gc} dan $FL_{w,gc}$

Pada [1], telah dibuktikan teorema eliminasi cut pada logika-logika proposisi FL_{gc} dan $FL_{w,gc}$ dengan lebih dahulu memperkenalkan suatu aturan stuktural yang disebut m*ulti-cut* sebagai berikut.

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Delta^*[\Gamma / A] \to B}(multi-cut),$$

dan membuktikan bahwa FL_{gc}^*, yaitu sistem logika yang diperoleh dari FL_{gc} dengan mengganti aturan *cut* menjadi aturan *multi-cut*, equivalen dengan FL_{gc}.

Bila metode tersebut digunakan untuk membuktikan Teorema Eliminasi Cut pada logika predikat FL_{gc} persyaratan variabel eigen akan menyebabkan kesulitan, untuk mengatasi hal itu multi-cut dimodifikasi ke bentuk berikut.

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Delta^*\left[\Gamma^{\#}/A\right] \to B}(multi-cut).$$

Dalam hal ini dimisalkan $x_1, \ldots, x_k$ adalah variabel yang muncul pada Γ tapi tidak muncul pada *A*. Misalkan *A* muncul sedikitnya *m* kali pada Δ. Ambil sebarang m buah variabel yang tak harus saling berbeda $y_1^i, \ldots, y_m^i$ untuk setiap $i=1,\ldots,k$. Untuk setiap $j \le m$ maka Γ_j merupakan multiset yang diperoleh dari Γ dengan mengganti setiap kemunculan bebas x_i dengan variabel y_j^i , untuk setiap i=1,…,k pada setiap formula Γ. Maka $\Delta^*\left[\Gamma^{\#}/A\right]$

adalah multiset yang diperoleh dari Δ dengan mengganti A_i dengan Γ_i untuk setiap $i=1,..,k$. Mudah diperlihatkan bahwa aturan multi-cut dalam bentuk yang telah dimodifikasi di atas bisa diturunkan dalam FL_{gc}, dengan bantuan aturan cut. Sebaliknya, aturan cut hanyalah suatu kasus khusus dari *multi-cut* tersebut.

Dengan menggunakan *multi-cut* dalam bentuk yang telah dimodifikasi seperti yang dijelaskan di atas sekarang teorema cut eliminasi untuk logika predikat FL_{gc} dapat dibuktikan sebagai berikut.

Teorema 3.1. Teorema eliminasi cut berlaku pada logika predikat FL_{gc}.

Bukti.

Mudah dibuktikan bahwa FL_{gc}^*, yaitu sistem logika predikat yang diperoleh dari logika predikat FL_{gc} dengan mengganti aturan *cut* menjadi aturan *multi-cut* dalam bentuk yang telah dimodifikasi, equivalen dengan FL_{gc}. Dengan adanya ekuivalensi ini Teorema 3.1 cukup dibuktikan dengan membuktikan sifat berikut.

Jika suatu sequent S terbukti pada FL_{gc}^*, maka S terbukti pada FL_{gc}^* tanpa *multi-cut.*

Sifat tersebut, seperti pada pembuktian teorema eliminasi cut pada logika proposisi FL_{gc}, dibuktikan dengan tripel induksi atas *rank global contraction*, *grade* dan *rank* dari P, dimana rank *global contraction* dari P adalah banyaknya aplikasi global contraction yang muncul diatas aplikasi *multi-cut*, grade dari sebuah *multi-cut* dari P adalah banyaknya simbol logika dari formula *multi-cut* tersebut dikalikan dengan banyaknya kemunculan formula *multi-cut* yang diganti, dan rank dari P adalah banyaknya sequent yang terdapat diatas sequent bawah dari aturan *multi-cut*.

Dengan aturan triple-induksi tersebut, sebuah aturan *multi-cut* yang muncul sebagai aturan inferensi paling bawah suatu bukti P' dari S dapat dieliminasi apabila:

1. *Rank global contraction* dari P' lebih kecil dari P
2. *Rank global contraction* dari P' sama dengan P, sedangkan *grade* dari P' lebih kecil dari grade P
3. *Rank global contraction* dan *grade* dari P' sama dengan P sedangkan *rank* dari P' lebih kecil dari rank P.

Bukti dari sifat di atas dibagi menjadi 4 kasus sebagai berikut.

1. S_1 atau S_2 adalah inisial sequent.
2. S_1 atau S_2 adalah sequent bawah dari sebuah aturan global contraction.
3. S_1 dan S_2 adalah sequent bawah dari suatu aturan untuk penghubung logika atau aturan untuk quantifier sedemikian hingga prinsipal formula dari kedua aturan tersebut adalah formula *multi-cut.*
4. S_1 atau S_2 adalah sequent bawah dari aturan untuk penghubung logika atau aturan untuk quantifier kecuali kasus 3.

Pada kasus 3 untuk S_1 adalah sebuah sequent bawah dari $(\to\exists)$ dan S_2 adalah sequent bawah dari $(\exists\to)$. Bagian akhir dari P akan berbentuk:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\to A(t)}{\Gamma\to\exists(z)A(z)}(\to\exists)\qquad\dfrac{\Delta_1,A(x),\Delta_2\to B}{\Delta_1,\exists zA(z),\Delta_2\to B}(\exists\to)}{\Delta_1^*\left[\Gamma^\#/\exists zA(z)\right],\Gamma_k,\Delta_2^*\left[\Gamma^\#/\exists zA(z)\right]}(multi-cut),$$

dimana Γ_k diperoleh dari Γ dengan menstubtitusikan beberapa variabel. Dengan persyaratan variabel eigen, x tidak muncul pada Δ_1, Δ_2 dan B, dan $\Delta_1,A(x),\ \Delta_2\to B$ dapat dibuktikan tanpa *multi-cut*, jadi $\Delta_1,A(t),\ \Delta_2\to B$ juga terbukti tanpa *multi-cut*. Kemudian bentuk diatas dapat ditransformasikan menjadi:

$$\dfrac{\Gamma\to A(t)\qquad\dfrac{\Gamma\to\exists zA(z)\quad\Delta_1,A(t),\Delta_2\to B}{\Delta_1^*\left[\Gamma^\#/\exists zA(z)\right],A(t),\Delta_2^*\left[\Gamma^\#/\exists zA(z)\right]\to B}(multi-cut)}{\Delta_1^*\left[\Gamma^\#/\exists zA(z)\right],\Gamma_k,\Delta_2^*\left[\Gamma^\#/\exists zA(z)\right]\to B}(multi-cut)$$

Rank dari *multi-cut* sebelah atas lebih kecil dari rank P dan *grade multi-cut* sebelah bawah lebih kecil dari grade P. Maka dengan hipotesis induksi, kedua *multi-cut* dapat dieliminasi.

Pada kasus 4 akan diperlihatkan untuk S_1 adalah sebuah squent bawah dari $(\exists \rightarrow)$. Disini akan digunakan beberapa aplikasi dari $(\exists \rightarrow)$, jadi persyaratan variabel eigen harus selalu diperhatikan. Bagian akhir dari P akan berbentuk:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A(x), \Sigma \rightarrow B}{\Gamma, \exists z A(z), \Sigma \rightarrow B}(\exists \rightarrow) \qquad \Delta \rightarrow D}{\Delta^{*}\left[\left(\Gamma, \exists z A(z), \Sigma\right)^{\#} / B\right] \rightarrow D}(multi-cut)$$

Diasumsikan disini bahwa *m* buah kemunculan dari *A* pada Δ akan digantikan dengan *multi-cut* diatas. Karena Δ berbentuk $\Delta_1, B, \Delta_2, B, \ldots, \Delta_m, B, \Delta_{m+1}$ maka bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A(x), \Sigma \rightarrow B}{\Gamma, \exists z A(z), \Sigma \rightarrow B}(\exists \rightarrow) \qquad \Delta_1, B, \Delta_2, \ldots, \Delta_m, B, \Delta_{m+1} \rightarrow D}{\Delta_1, \Gamma_1, \exists z A_1(z), \Sigma_1, \Delta_2, \Gamma_2, \exists z A_2(z), \Sigma_2, \ldots, \Delta_m, \Gamma_m, \exists z A_m(z), \Sigma_m, \Delta_{m+1} \rightarrow D}(multi-cut)$$

dimana $\Gamma_i, \exists z A_i(z), \Sigma_i$ diperoleh dari $\Gamma, \exists z A(z), \Sigma$ dengan beberapa penggantian variabel untuk setiap *i*. Ambil variabel berbeda $y_1, \ldots, y_m$ yang tidak muncul pada P, maka bentuk di atas dapat ditransformasikan menjadi bentuk:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A(x), \Sigma \rightarrow B \qquad \Delta_1, B, \Delta_2, \ldots, \Delta_m, B, \Delta_{m+1} \rightarrow D}{\Delta_1, \Gamma_1, A_1(y_1), \Sigma_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m, \Gamma_m, A_m(y_m), \Sigma_m, \Delta_{m+1} \rightarrow D}(multi-cut)}{\Delta_1, \Gamma_1, \exists z A_1(y_1), \Sigma_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m, \Gamma_m, \exists z A_m(y_m), \Sigma_m, \Delta_{m+1} \rightarrow D}(\exists \rightarrow)}{\dfrac{beberapa \quad aplikasi \quad (\exists \rightarrow)}{\Delta_1, \Gamma_1, \exists z A_1(z), \Sigma_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m, \Gamma_m, \exists z A_m(z), \Sigma_m, \Delta_{m+1} \rightarrow D}}(\exists \rightarrow)$$

Rank dari *multi-cut* diatas lebih kecil dari P, sehingga dengan hipotesis induksi dapat dieliminasi. ■

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan Teorema 3.2.

Teorema 3.2. Teorema eliminasi cut berlaku pada logika predikat $FL_{w,gc}$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa teorema eliminasi cut berlaku pada FL dengan *global contraction* (FL_{gc}) dan FL dengan *weakening* dan *global contraction* ($FL_{w,gc}$) baik untuk level logika proposisis maupun level logika predikat.

Teorema eliminasi cut adalah teorema dasar pada teori pembuktian. Karena telah dibuktikan bahwa teorema eliminasi cut berlaku pada FL_{gc} dan $FL_{w,gc}$, maka dengan menggunakan sifat tersebut diharapkan untuk selanjutnya dapat dipelajari sifat-sifat lain dari FL_{gc} dan $FL_{w,gc.}$

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bayu Surarso. (2006), *Prinsip Maksimova Untuk Logika $FL_{w,gc}$* , Makalah Dipublikasikan di prosiding Seminar Nasional SPMIPA 2006, 22-24.

[2]. Ono, H., Bayu Surarso. (1996), *Cut Elimination in Noncommutative Substructural Logics*, Reports on Mathematical Logics 30, 3-29.

[3]. Troelstra, A.S.,Schwichtenberg, H. (2000), *Basic Proof Theory, Second Edition*, Madrid, Cambrige University Press.