# BANACH *LATTICE* YANG MEMUAT $c_O$

Farikhin
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, SH Tembalang Semarang 50275

**Abstract.** Let Banach lattices *E* and *F*. Lattice homomorphism $T : E \to F$ is called lattice embedding if there exists positive numbers m and n such that for all $x \in E$ implies $m.||\overline{x}|| \le ||T(\overline{x})|| \le n.||\overline{x}||$. In others word, Banach lattice *E* is said to be lattice embeddable in F if there exist closed subspace $F_0 \subseteq F$ such that $F_0$ and *E* are lattice isomorphic. As well known that dual space of E is Levi-σ, i.e. $sup\{\overline{x}_n \,/\, n = 1, 2,...\}$ in *E** exist for every increasing bounded (in the norm) sequences $\{\overline{x}_n \,/\, n = 1, 2,...\}$ in *E**. If sequences space $c_0$ is lattice embeddable in *E** then sequences space $l_\infty$ is lattice embeddable in *E**, within *E** is dual space of *E*. This theorem is proven by Groenewegen in [4]. For Levi-σ Banach lattice *E*, we proof that sequences space $c_0$ is lattice embeddable in *E* if only if sequences space $l_\infty$ is lattice embeddable in *E*.

**Keywords:** Levi-σ Banach lattice and lattice embeddable

## 1. PENDAHULUAN

Dalam tulisan ini, ruang vektor yang dimaksud adalah ruang vektor atas *field R*, dengan *R* menyatakan himpunan bilangan real. Notasi ≤ menyatakan urutan parsial (partial ordering) pada himpunan tak-kosong. Sedangkan vektor nol ditulis dengan notasi $\theta$.

Banach *lattice E* tersisip *lattice* di dalam F jika terdapat homomorfisma *lattice* $T : E \to F$ dan dua bilangan $m$, $n > 0$ sedemikian hingga

$$m.||\overline{x}|| \le ||T(\overline{x})|| \le n.||\overline{x}||\,,$$

untuk setiap $x \in E$.

Untuk selanjutnya, Banach *lattice F* memuat Banach *lattice E* selalu dimaksudkan bahwa *E* tersisip *lattice* ke dalam *F*.

Sebagai contoh, Banach *lattice* $l_\infty$ memuat Banach *lattice* $C[a, b]$. Uraian contoh ini dapat dilihat di dalam [1].

Syarat cukup dan perlu agar Banach *lattice E* memuat $c_0$ atau $l_\infty$ telah dibahas dalam [1] dan [5]. Sedangkan syarat cukup dan perlu agar ruang Banach *X* yang memuat $c_0$ atau $l_\infty$ dibahas di dalam [3]. Dalam [2], dibahas syarat perlu dan cukup agar Banach *lattice E* memuat $l_\infty$ menggunakan ruang operator.

Diberikan Banach *lattice E* dan *E** ruang dualnya. Dalam [4], Banach *lattice E** memuat $c_0$ jika dan hanya jika *E** memuat $l_\infty$. Ruang dual *E** merupakan Banach *lattice* yang mempunyai sifat Levi-σ. Dalam tulisan ini, dibuktikan bahwa Banach *lattice E* memuat $c_0$ jika dan hanya jika *E* memuat $l_\infty$, asalkan *E* mempunyai sifat Levi-σ.

## 2. BANACH *LATTICE*

Ruang vektor *X* yang dilengkapi dengan urutan parsial ≤ dinamakan ruang Riesz atau ruang vektor *lattice* jika memenuhi syarat-syarat :

(i). *X lattice*,

(ii). untuk setiap $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ di dalam *X* dengan $\overline{a} \le \overline{b}$ berakibat $\overline{a} + \overline{c} \le \overline{b} + \overline{c}$

(iii).untuk setiap bilangan positif α dan setiap $\overline{a}$ di dalam *X* dengan $\overline{a} \ge \theta$ berlaku $\alpha.\overline{a} \ge \theta$.

Sifat-sifat ruang Riezs dibahas secara mendalam di dalam [6]. Ruang Riezs bernorma adalah ruang Riezs *E* yang dilengkapi norma || || dan mempunyai sifat (i), (ii), (iii), dan (iv).untuk setiap $\bar{x}$, $\bar{y} \in E$, dengan $\sup\{-\bar{x}, \bar{x}\} = |\bar{x}| \leq |\bar{x}| = \sup\{-\bar{y}, \bar{y}\}$, berlaku $\|\bar{x}\| \leq \|\bar{y}\|$.

Jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang Riezs bernorma merupakan barisan konvergen, maka $E$ disebut Banach *lattice*. Dengan kata lain, ruang Banach $E$ dinamakan Banach *lattice* jika $E$ yang dilengkapi urutan parsial $\leq$ memenuhi (i), (ii), (iii), dan (iv).

Untuk selanjutnya, notasi $E$ dan $F$ selalu dimaksudkan sebagai Banach *lattice*, kecuali ada penjelasan khusus.

Contoh-contoh Banach *lattice*:

1. Ruang barisan bilangan yang konvergen ke nol, ditulis dengan notasi $c_0$, dilengkapi urutan parsial : $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots\} \in c_0$ didefinisikan $\bar{x} \leq \bar{y}$ jika $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n = 1, 2, 3,\dots$. Ruang barisan $c_0$ merupakan ruang Riezs. Selanjutnya, jika didefinisikan norma pada $c_0$, $\|\bar{x}\| = \sup |x_n|$ untuk setiap $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in c_0$, maka $c_0$ adalah Banach *lattice*.
   Untuk selanjutnya, norma yang didefinisikan dalam Banach *lattice* $c_0$ selalu dimaksudkan $\|\bar{x}\| = \sup |x_n|$, untuk setiap $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in c_0$.
2. Ruang barisan bilangan yang terbatas, ditulis dengan notasi $l_\infty$, dilengkapi urutan parsial : $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots\} \in l_\infty$ didefinisikan $\bar{x} \leq \bar{y}$ jika $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n=1, 2, 3,\dots$. Ruang barisan $l_\infty$ merupakan ruang Riezs. Selanjutnya, jika didefinisikan norma pada $l_\infty$, $\|\bar{x}\| = \sup |x_n|$ untuk setiap $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in l_\infty$, maka $l_\infty$ adalah Banach *lattice*.
   Untuk selanjutnya, norma yang didefinisikan dalam Banach *lattice* $l_\infty$ selalu selalu dimaksudkan $\|\bar{x}\| = \sup |x_n|$, untuk setiap $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \in l_\infty$.
3. Diberikan $C[a, b]$ ruang vektor fungsi bernilai real yang didefinisikan pada $[a,b]$. Urutan parsial yang didefinisikan pada $C[a, b]$: $f \leq g$ jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. $C[a, b]$ yang dilengkapi urutan parsial demikian merupakan ruang Riezs. Ruang Riezs $C[a, b]$ menjadi Banach *lattice* jika dilengkapi dengan norma $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in [a,b]\}$ untuk $f \in C[a, b]$.

Diberikan $E$ dan $F$ ruang-ruang Riezs, dan tranformasi linear $T : E \to F$. Transformasi linear $T : E \to F$ dinamakan homomorfisma *lattice* jika $\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in E$ berlaku

$T(\bar{x} \vee \bar{y}) = T(\bar{x}) \vee T(\bar{y})$ dan

$T(\bar{x} \wedge \bar{y}) = T(\bar{x}) \wedge T(\bar{y})$,

dengan $\bar{x} \vee \bar{y} = \sup\{\bar{x}, \bar{y}\}$ dan

$\bar{x} \wedge \bar{y} = \inf\{\bar{x}, \bar{y}\}$.

Diberikan $T : E \to F$ transformasi linear, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

1. $T : E \to F$ homomorfisma *lattice*,
2. $|T(\bar{x})| = T(|\bar{x}|)$ untuk setiap $\bar{x} \in E$.

Pembuktian ekuivalensi pernyataan di atas dapat dilihat di dalam [1] , [5], atau [6].

## 3. BANACH *LATTICE* YANG MEMUAT $c_0$

Sifat berikut akan digunakan pada teorema yang dihasilkan. Banach *lattice* $E$ dikatakan Levi–σ jika untuk setiap barisan $\{\bar{a}_n\ /\ n = 1, 2, 3,\dots\}$ di dalam $E^+$ (*positive cone of E*) yang naik monoton dan $\sup\{\|\bar{a}_n\|\ /\ n=1, 2, 3, \dots\} < \infty$ berakibat $\sup\{\bar{a}_n\ /\ n = 1, 2, 3,\dots\} \in E$.

Banach *lattice Levi*-σ tidak bersifat heriditas. Dalam artian, sub Banach *lattice* dari Banach *lattice* yang bersifat *Levi*-σ belum tentu bersifat *Levi*-σ juga. Mudah dibuktikan bahwa $c_0$ adalah sub Banach *lattice* dari $l_\infty$. Mengingat aksioma kelengkapan bilangan real, Banach *lattice* $l_\infty$ bersifat *Levi*-σ.

Sedangkan $c_0$ tidak bersifat *Levi*-σ. Ambil barisan $\{\bar{x}_n\ /\ n = 1, 2,\dots\} \subseteq c_0^+$ dengan $\bar{x}_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$, $\bar{x}_2 = \{1, 1, 0, 0, \dots\}$,

$\overline{x_3}$ ={*1, 1, 1, 0, 0, ...*},.... Barisan tersebut naik monoton dan terbatas, tetapi supremumnya tidak termuat di dalam $c_0$, yakni $\overline{x}$ = {*1, 1, 1, 1, ...*}$\notin c_0$.

Diberikan Banach *lattice E*. Ruang dual *E*, ditulis dengan *E**, merupakan Banach *lattice* yang bersifat Levi-σ [4].

**Teorema 1**. [1]. Banach *lattice E* memuat $c_0$ jika dan hanya jika terdapat { $\overline{x_n}$ / *n = 1, 2,...* }di dalam $E^+$ yang saling asing dan memenuhi sifat-sifat :

(a). $0 < \inf \{ \| \overline{x_n} \| \ / \ n = 1, 2,... \}$

(b). terdapat bilangan *M* > 0 sedemikian hingga $\| \sum_{p=1}^{n} \overline{x_n} \| \le M$ untuk setiap n.

**Teorema 2.** Diberikan Banach *lattice* E yang mempunyai sifat *Levi*-σ. Banach *lattice* E memuat $l_\infty$ jika dan hanya jika terdapat barisan { $\overline{x_n}$ / *n = 1, 2,...* } di dalam $E^+$ yang saling asing dan memenuhi sifat-sifat :

(a). $0 < \inf \{ \| \overline{x_n} \| \ / \ n = 1, 2,... \}$

(b). terdapat bilangan *M* > 0 sedemikian hingga $\| \sum_{p=1}^{n} \overline{x_p} \| \le M$ untuk setiap n.

**Bukti.**

**Syarat perlu**. Banach *lattice* E memuat $l_\infty$. Namakan $T : l_\infty \to E$ homomorfisma *lattice*, maka terdapat *n*, *m* > 0 dan setiap $\overline{A} \in l_\infty$ berlaku

$$N.\| \overline{A} \| \le \| T(\overline{A}) \| \le M.\| \overline{A} \| \quad (3.1)$$

Dibentuk barisan yang saling asing { $\overline{A_n}$ / *n = 1, 2,...* } $\subseteq (l_\infty)^+$ dengan $\overline{A_1}$ = {*1, 0, 0, ....*}, $\overline{A_2}$ = {*0, 1, 0, 0, ....*}, $\overline{A_3}$ = {*0, 0, 1, 0, ...*}, ....

Karena $T : l_\infty \to E$ homomorfisma *lattice* maka { $\overline{x_n} = T(\overline{A_n})$/*n = 1, 2, ...* } $\subseteq E^+$ dan saling asing. Lebih lanjut, mengingat persamaan (3.1) maka

$$0 < N = N.\| \overline{A_n} \| \le \| \overline{x_n} \| \text{ dan}$$

$$\| \sum_{p=1}^{n} \overline{x_p} \| = \| \sum_{p=1}^{n} T(\overline{A_n}) \|$$

$$= \| T( \sum_{p=1}^{n} \overline{A_n}) \|$$

$$\le M. \| \sum_{p=1}^{n} \overline{A_n} \|$$

$$= M \text{, untuk setiap n.}$$

Dengan demikian, terdapat barisan { $\overline{x_n}$ / *n = 1, 2,...* } di dalam $E^+$ yang saling asing dan memenuhi sifat-sifat :

(a). $0 < \inf \{ \| \overline{x_n} \| \ / \ n = 1, 2,... \}$ dan

(b). terdapat bilangan *M* > 0 sedemikian hingga $\| \sum_{p=1}^{n} \overline{x_p} \| \le M$, untuk setiap n.

**Syarat cukup**. Menurut yang diketahui, terdapat { $\overline{x_n}$ / *n = 1, 2,...* } di dalam $E^+$ yang saling asing dan memenuhi sifat-sifat :

(a). $0 < \inf \{ \| \overline{x_n} \| \ / \ n = 1, 2,... \}$ dan

(b). terdapat bilangan *M* > 0 sedemikian hingga $\| \sum_{p=1}^{n} \overline{x_p} \| \le M$ untuk setiap n.

Untuk setiap $\overline{B}$ = {$b_1$, $b_2$, ...}$\in (l_\infty)^+$, dibentuk { $\sum_{p=1}^{n} b_p. \overline{x_p}$ / *n = 1, 2,...* }. Barisan yang terbentuk bersifat monoton naik dan $\| \sum_{p=1}^{n} b_p. \overline{x_p} \| \le \| \overline{B} \|.M$.

Hal ini berakibat

$$\sup\{ \| \sum_{p=1}^{n} b_p. \overline{x_p} \| \ / \ n = 1, 2,... \} < \infty.$$

Karena *E* bersifat *Levi*-σ maka $\sum_{p=1}^{\infty} b_p.\overline{x_p}$ termuat di dalam $E^+$.

Khususnya $\overline{x} = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{x_p}$ termuat di dalam $E^+$.

Berdasarkan uraian sebelumnya, didefinisikan fungsi S : $(l_\infty)^+ \to E^+$ dengan rumus $S(\overline{B}) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p. \overline{x_p}$ untuk setiap $\overline{B}$ = {$b_1$, $b_2$, ...}$\in (l_\infty)^+$.

Fungsi S merupakan fungsi aditif, sehingga dapat dikonstruksikan fungsi positif $T: l_\infty \to E$ sedemikian hingga $T(\overline{a}) = S(\overline{a})$ untuk $\overline{a} \in (l_\infty)^+$.

Selanjutnya akan dibuktikan transformasi $T: l_\infty \to E$ merupakan homomorfisma *lattice*. Ambil sebarang $\overline{B}$ = {$b_1$, $b_2$, ...}$\in l_\infty$ maka

$|\overline{B}|$ = {$|b_1|$, $|b_2|$, ...}, sehingga didapat

$$\begin{aligned}|T(\overline{B})| &= |T(\{b_1, b_2, ...\})| \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} |b_p|.\overline{x}_p \\ &= T(|\overline{B}|)\end{aligned}$$

atau $T : l_\infty \to E$ suatu homomorfisma *lattice*.

Lebih lanjut, untuk setiap n berlaku

$$\begin{aligned}N.|b_n| &\le \|\sum_{p=1}^{\infty} |b_p|.\overline{x}_p\| = \|T(|\overline{B}|)\| \\ &\le \|\overline{B}\|.\|\sum_{p=1}^{\infty} \overline{x}_p\| = M.\|\overline{B}\|,\end{aligned}$$

dengan $M = \|\overline{X}\|$.

Hal ini berakibat

$$\begin{aligned}N.\|\overline{B}\| &\le \|T(|\overline{B}|)\| \\ &= \||T(\overline{B})|\| \\ &= \|T(\overline{B})\| \\ &\le M.\|\overline{B}\| \quad \forall\ \overline{B} \in l_\infty.\end{aligned}$$

Jadi Banach *lattice* $l_\infty$ tersisip *lattice* ke dalam E. ■

Berdasarkan Teorema 1 dan Teorema 2 diperoleh teorema berikut .

**Teorema 3.** Diberikan E Banach *lattice* yang bersifat *Levi*-σ. Banach *lattice* E memuat $c_0$ jika dan hanya jika Banach *lattice* E memuat $l_\infty$.

Mengingat E* adalah Banach lattice yang bersifat Levi-σ, dengan menggunakan Teorema 3 diperoleh pernyataan berikut.

**Akibat.** Banach *lattice* E* memuat $c_0$ jika dan hanya jika E* memuat $l_\infty$

## 4. KESIMPULAN

Banach lattice E* memuat ruang barisan $c_0$ jika dan hanya jika E* memuat ruang barisan $l_\infty$.

Jika Banach lattice *E** diganti dengan Banach lattice *E* yang bersifat Levi-σ, maka lemma tersebut masih berlaku. Dalam artian, *E* memuat ruang barisan $c_0$ jika dan hanya jika *E* memuat ruang barisan $l_\infty$, asalkan *E* bersifat Levi-σ. Dengan kata lain, telah dibuktikan suatu teorema yang lebih umum daripada lemma yang dibuktikan oleh Groenewegen.

## 4. DAFTAR PUSTAKA


[1]. Burkinshaw, O & Aliprantis, C. (1985) , *Positive operators* , Academic Press , Orlando USA.

[2]. Farikhin. (2002), *Syarat Cukup Agar $l_\infty$ Tersisip Lattice ke Dalam Ruang Banach Lattice*, Jurnal Matematika atau Pembelajaranya (Edisi khusus), Tahun VIII, Universitas Negeri Malang.

[3]. Ferrando , J.C, & Amigo, J.M. (2000), *On Copies of $c_0$ in the Bounded Linear operators Spaces* , Czechoslovak Math. Jour. **50** (125), Praha.

[4]. Groenewegen, G.L.M. (1982), *On Spaces of Banach lattice valued Functions and measures*, Ph.D. Dissertation , Nijmegen University, Netherland.

[5]. Meyer-Nieberg, P. (1991), *Banach Lattice*, Springer, Berlin.

[6]. Zaanen, A. C. (1997) , *Introduction to Operators Theory in Riesz Spaces* , Springer, Berlin.