

## MENENTUKAN MATRIKS PELUANG TRANSISI UNTUK WAKTU OKUPANSI MENGGUNAKAN TRANSFORMASI LAPLACE DAN MATRIKS EKSPONENSIAL

**Sudarno**

Jurusan Statistika FSM UNDIP

Email: [dsghani@gmail.com](mailto:dsghani@gmail.com)

### **Abstract**

The transition probability matrix is a matrix which contains some probability among two *state*. It has properties that every probability is non-negative and sum by row at every *state* is one. This paper want to determine the transition probability matrix by Laplace transform and exponential of a matrix methods. To construct the transition probability matrix by Laplace transform depends on identity matrix and generator matrix, but by matrix exponential method depends on generator matrix only. In this research obtained result that matrix exponential method easier than Laplace transformation. Because it is aided by software and programming. The transition probability matrix can be used to predict probability each other *state*. It could be used to predict value of *state* probability on long-term or limiting behavior, too. Otherwise, the transition probability matrix could be used to construct occupancy times matrix.

**Keywords:** Generator matrix, Laplace transform, Exponential matrix, Occupancy times matrix.

### **1. Pendahuluan**

Ruang *state* merupakan himpunan kondisi yang mungkin dilalui oleh proses stokastik yang dibicarakan. Pada proses ini, ruang *state* yang dipilih adalah ruang *state* yang berhingga, yaitu  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ . Sedangkan proses stokastik  $\{X(t), t \geq 0\}$  merupakan proses stokastik waktu-kontinu  $t$  dengan ruang *state*  $S$ , sedangkan matriks bujur sangkar yang berukuran  $N \times N$  yang berisi peluang perpindahan (transisi) dari satu *state* ke *state* yang lain dengan sifat nilainya nonnegatif dan jumlah peluang secara horizontal sama dengan satu, merupakan matriks peluang transisi  $\mathbf{P}(t)$  untuk 1-langkah yang disingkat dengan matriks peluang transisi. Matriks peluang transisi dapat dipergunakan untuk prediksi peluang jangka panjang (*steady state*)<sup>[4,5,7,8,11]</sup>.

Jika terdapat suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan nonnegatif ke himpunan bilangan riil. Maka dapat diperoleh suatu fungsi yang berupa transformasi Laplace yang berupa suatu fungsi dengan variabel bebasnya merupakan bilangan kompleks dengan bagian riilnya bernilai positif. Antara fungsi dengan variabel bebas yang berupa bilangan nonnegatif terjadi hubungan bijektif terhadap fungsi dengan variabel bebas yang berupa bilangan kompleks, dengan syarat bagian riilnya bernilai positif. Sedangkan matriks eksponensial dari suatu matriks bujur sangkar merupakan eksponensial dari matriks tersebut. Penjabarannya identik dengan konsep fungsi eksponensial pada suatu variabel bebasnya. Hasilnya sama dengan matriks bujur sangkar yang berupa penjumlahan dari matriks identitas dan matriks berpangkat dari matriks pembentuknya<sup>[2,3,5]</sup>.

Dalam Tattar et al. (2008), dibahas tentang menguji hipotesis tentang matriks peluang transisi dari proses Markov nonhomogin dengan model multi-*state* pada data tersensor. Sedangkan kelanjutannya berupa masalah k-sampel dalam model multi-*state* dan pengujian hipotesis dari matriks-matriks peluang transisi (Tattar et al. (2014)). Pada Eslahchi et al. (2012), disimulasikan perhitungan matriks peluang transisi dari proses

Markov tentang kelahiran dan kematian dalam model epidemik. Penerapan dari matriks peluang transisi adalah untuk memprediksi matriks waktu okupansi. Waktu okupansi adalah prediksi waktu yang diperlukan dari satu *state* ke *state* lain pada rantai Markov waktu kontinu<sup>[5]</sup>.

Pada tulisan ini ingin dicari matriks peluang transisi dengan menggunakan transformasi Laplace dan matriks eksponensial. Juga ingin diketahui metode mana yang lebih mudah diterapkan pada matriks secara umum. Hasil yang diperoleh dari matriks peluang transisi dapat digunakan untuk prediksi peluang baik jangka pendek maupun jangka panjang. Sehingga hasil ini dapat dijadikan pijakan untuk pengambilan keputusan tentang masalah yang dibicarakan. Selain itu diterapkan pada pembentukan waktu okupansi dan matriks waktu okupansi.

## 2. Transformasi Laplace dan Matriks Eksponensial

### 2.1. Metode Diagonalisasi dan Matriks Generator

#### a. Metode Diagonalisasi

Menurut Fuller (1962) and Gantmacher (1960) menyatakan bahwa suatu matriks bujur sangkar  $\mathbf{A}$  berukuran  $m \times m$  dikatakan dapat didiagonalkan (*diagonalizable*), jika terdapat suatu matriks invertibel  $\mathbf{X}$  dan matriks diagonal

$$\mathbf{D} = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m],$$

sedemikian hingga

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1}$$

Dalam hal ini,  $\lambda$  adalah nilai eigen dari matriks  $\mathbf{A}$ ,  $x_j$  adalah kolom ke- $j$  dari matriks  $\mathbf{X}$ , dan  $y_j$  adalah baris ke- $j$  dari matriks  $\mathbf{X}^{-1}$ .

#### Teorema 1.

Jika  $\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1}$  maka  $\mathbf{A}^n = \mathbf{X} \mathbf{D}^n \mathbf{X}^{-1} = \sum_{j=1}^m \lambda_j^n x_j y_j$ . (1)

Bukti:

Karena matriks  $\mathbf{A}$  *diagonalizable*, maka berlaku

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1}$$

Sehingga

$$\mathbf{A}^n = [\mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1}] [\mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1}] \dots [\mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1}] = \mathbf{X} \mathbf{D}^n \mathbf{X}^{-1}.$$

Dengan menggunakan

$$\mathbf{D}^n = \text{diag} [\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_m^n]$$

maka didapat persamaan kedua dalam Persamaan (1).

#### b. Matriks Generator<sup>[5]</sup>

Matriks generator merupakan suatu matriks yang membangun atau membangkitkan proses stokastik rantai Markov waktu kontinu  $\{X(t), t \geq 0\}$ . Notasi dari matriks generator ditulis dengan

$$\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{i,j \in S}$$

dimana  $S$  adalah ruang *state*. Salah satu dari sifat matriks generator adalah jumlah dari semua elemen barisnya sama dengan nol, yaitu

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0, \quad i \in S.$$

Selanjutnya dibicarakan teorema tentang hubungan antara matriks peluang transisi dengan matriks generator.

**Teorema 2** (Kulkarni, 2010).

Misalkan  $\mathbf{P}(t)$  merupakan suatu matriks peluang transisi dari rantai Markov waktu-kontinu (RMWK) dengan ruang-state  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  dan matriks generator  $\mathbf{Q}$ . Maka  $\mathbf{P}(t)$  adalah dapat diturunkan (*differentiable*) terhadap  $t$  dan memenuhi

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q} \mathbf{P}(t), \quad (2)$$

dan

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{Q}, \quad (3)$$

dengan syarat awal

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I},$$

dimana  $\mathbf{I}$  adalah suatu matriks identitas yang berukuran sesuai dengan materi yang dibicarakan.

Kadang dijumpai istilah yang digunakan untuk memberi nama Persamaan (2) adalah persamaan mundur, sedangkan Persamaan (3) disebut persamaan maju.

## 2.2. Transformasi Laplace<sup>[5]</sup>

Transformasi Laplace merupakan transformasi fungsi bijektif dari fungsi dengan domain himpunan nonnegatif terhadap himpunan bilangan kompleks. Definisinya sebagai berikut:

Misalkan  $f : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ . Maka transformasi Laplace dari fungsi tersebut adalah

$$f^*(s) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

jika integral tersebut ada untuk suatu bilangan kompleks  $s$  dengan  $\text{Re}(s) > 0$ , dimana  $\text{Re}(s)$  adalah bagian riil dari bilangan kompleks  $s$ .

Untuk mengetahui peluang transisi  $p_{ij}(t)$ , diperlukan transformasi Laplace yang didefinisikan sebagai berikut:

$$p_{ij}^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_{ij}(t) dt, \quad \text{Re}(s) > 0.$$

Dengan mendefinisikan setiap elemen dari matriks peluang transisi  $\mathbf{P}(t)$  ke dalam transformasi Laplace, maka didapat matriks peluang transisi baru  $\mathbf{P}^*(s)$ , yaitu

$$\mathbf{P}^*(s) = [p_{ij}^*(s)]_{i,j \in S}.$$

Berikut akan dibahas teorema yang dijadikan dasar untuk membentuk matriks peluang transisi  $\mathbf{P}(t)$  menggunakan matriks peluang transisi  $\mathbf{P}^*(s)$ .

### Teorema 3.

Transformasi Laplace dari matriks peluang transisi  $\mathbf{P}(t)$  diberikan dengan

$$\mathbf{P}^*(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}, \quad \text{Re}(s) > 0.$$

Bukti:

Dengan menggunakan sifat dari transformasi Laplace, diperoleh

$$\int_0^{\infty} e^{-st} p_{ij}'(t) dt = s p_{ij}^*(s) - p_{ij}(0).$$

Dalam bentuk matriks, hasil ini merupakan transformasi Laplace dari matriks turunan  $\mathbf{P}'(t)$  yang diberikan oleh  $s\mathbf{P}^*(s) - \mathbf{I}$ . Selanjutnya, dengan melakukan transformasi Laplace pada kedua sisi dari Persamaan 2 atau 3, dan menggunakan syarat awal  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ , didapat

$$s\mathbf{P}^*(s) - \mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^*(s) = \mathbf{P}^*(s)\mathbf{Q}. \quad (4)$$

Persamaan (4) ini dapat disederhanakan menjadi

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{P}^*(s) = \mathbf{P}^*(s)(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \mathbf{I}.$$

Karena  $s\mathbf{I} - \mathbf{Q}$  mempunyai invers untuk  $\text{Re}(s) > 0$ , maka teorema terbukti.

### 2.3. Matriks Eksponensial<sup>[5]</sup>

Didefinisikan eksponensial dari suatu matriks bujur sangkar  $\mathbf{A}$  yang berukuran  $N \times N$  sebagai berikut:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i}{i!}.$$

Dalam hal ini,  $e^{\mathbf{A}}$  merupakan matriks bujur sangkar berukuran  $N \times N$ . Jika matriks  $\mathbf{A}$  adalah matriks diagonal, yaitu

$$\mathbf{A} = \text{diag} [a_1, a_2, \dots, a_N],$$

Maka

$$e^{\mathbf{A}} = \text{diag} [e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_N}].$$

Pada teorema di bawah ini akan dijumpai matriks generator  $\mathbf{Q}$  yang dapat dibuat menjadi perkalian dari beberapa matriks dengan salah satu matriksnya merupakan matriks diagonal (*diagonalizable*). Matriks  $\mathbf{Q}$  dikatakan *diagonalizable*, jika ada matriks diagonal  $\mathbf{D}$  dan matriks invertibel  $\mathbf{X}$  sedemikian hingga

$$\mathbf{Q} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}. \quad (5)$$

#### Teorema 4.

Matriks peluang transisi dari RMWK mempunyai *state*-berhingga dengan matriks generator  $\mathbf{Q}$  diberikan oleh

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Lebih lanjut, jika  $\mathbf{Q}$  *diagonalizable* dan memenuhi Persamaan 5, maka

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{X}^{-1} = \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} x_i y_i, \quad (7)$$

dimana  $\lambda_i = D_{ii}$ ,  $x_i$  adalah kolom ke- $i$  dari matriks  $\mathbf{X}$ , dan  $y_i$  adalah baris ke- $i$  dari matriks  $\mathbf{X}^{-1}$ .

Bukti:

Berdasarkan pengertian dari matriks eksponensial diatas, berarti

$$e^{\mathbf{Q}t} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^i}{i!}, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Jika diturunkan terhadap variable  $t$  didapat

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{Q}t} = \mathbf{Q}e^{\mathbf{Q}t} = e^{\mathbf{Q}t}\mathbf{Q}.$$

Dengan demikian  $e^{\mathbf{Q}t}$  memenuhi persamaan maju dan persamaan mundur. Karena ada solusi tunggal pada persamaan tersebut dalam hal ruang-*state* berhingga, maka diperoleh Persamaan 6. Selanjutnya berdasarkan Teorema 1, dihasilkan bahwa

$$\mathbf{Q}^n = \mathbf{X} \mathbf{D}^n \mathbf{X}^{-1}, \quad n \geq 0.$$

Dengan mengganti ke dalam Persamaan 8, dan mengalikan  $\mathbf{X}$  pada sisi kiri dan  $\mathbf{X}^{-1}$  pada sisi kanan, diperoleh

$$e^{\mathbf{Q}t} = \mathbf{X} \left( \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{D}t)^n}{n!} \right) \mathbf{X}^{-1}, \quad t \geq 0,$$

yang sesuai dengan Persamaan (7). Sehingga berdasarkan Persamaan 1 maka teorema terbukti.

#### 2.4. Waktu Okupansi<sup>[4, 5]</sup>

Misal  $\{X(t), t \geq 0\}$  merupakan RMWK pada ruang-state  $S$  yang mempunyai matriks generator  $\mathbf{Q}$ . Jika  $V_j(x)$  menyatakan lamanya waktu pada proses RMWK yang dilakukan dalam state  $j$  atas  $(0, t]$ . Maka  $V_j(0) = 0$  untuk semua  $j \in S$ . Didefinisikan

$$M_{ij}(t) = E(V_j(t) / X(0) = i), \quad i, j \in S, \quad t \geq 0 \quad (9)$$

$M_{ij}(t)$  disebut waktu okupansi dari state  $i$  ke state  $j$  selama waktu  $t$ . Hal ini, jika diperluas ditulis dalam bentuk matriks menjadi matriks waktu okupansi, yaitu

$$\mathbf{M}(t) = [M_{ij}(t)]$$

Berikut ini disajikan teorema tentang cara membuat matriks waktu okupansi.

#### Teorema 5.

Matriks waktu okupansi  $\mathbf{M}(t)$  dapat dicari dengan cara:

$$\mathbf{M}(t) = \int_0^t \mathbf{P}(u) du, \quad t \geq 0 \quad (10)$$

dimana  $\mathbf{P}(u)$  merupakan matriks peluang transisi fungsi dari  $u$ .

Bukti:

Ambil  $j \in S$ . Misal  $Z(u) = 1$ , jika  $X(u) = j$ , dan nol untuk yang lainnya. Maka

$$V_j(t) = \int_0^t Z(u) du.$$

Sehingga berdasarkan Persamaan (9), didapat

$$\begin{aligned} M_{ij}(t) &= E(V_j(t) / X(0) = i) = E\left(\int_0^t Z(u) du / X(0) = i\right) = \int_0^t E(Z(u) / X(0) = i) du \\ &= \int_0^t P(X(u) = j / X(0) = i) du = \int_0^t p_{ij}(u) du \end{aligned}$$

Dengan menulis elemen ini ke dalam bentuk matriks didapat Persamaan (10), yaitu

$$\mathbf{M}(t) = \int_0^t \mathbf{P}(u) du, \quad t \geq 0.$$

### 3. Hasil dan Pembahasan

Berikut ini akan dibahas komputasi untuk memperoleh matriks peluang transisi baik menggunakan transformasi Laplace maupun matriks eksponensial. Selanjutnya hasil matriks peluang transisi tersebut dipergunakan untuk membentuk matriks waktu okupansi.

#### 3.1. Perhitungan menggunakan Transformasi Laplace

Komputasi dilakukan pada suatu mesin yang mempunyai dua-state  $S = \{0, 1\}$ . Misalkan terdapat RMWK dua-state yang mempunyai matriks generator dan matriks identitas, masing-masing adalah

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0,2 & -0,2 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga berdasarkan Teorema 3, dapat dibentuk matriks

$$\mathbf{P}^*(s) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -0,2 & s+0,2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1,2)} \begin{bmatrix} s+0,2 & 1 \\ 0,2 & s+1 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, masing-masing elemennya adalah

$$p_{00}^*(s) = \frac{s+0,2}{s(s+1,2)} = \frac{1}{6} \frac{1}{s} + \frac{1}{1,2} \frac{1}{s+1,2}, \text{ akibatnya } p_{00}(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{1,2} e^{-1,2t}.$$

$$p_{01}^*(s) = \frac{1}{s(s+1,2)} = \frac{1}{1,2} \frac{1}{s} - \frac{1}{1,2} \frac{1}{s+1,2}, \text{ akibatnya } p_{01}(t) = \frac{1}{1,2} - \frac{1}{1,2} e^{-1,2t}.$$

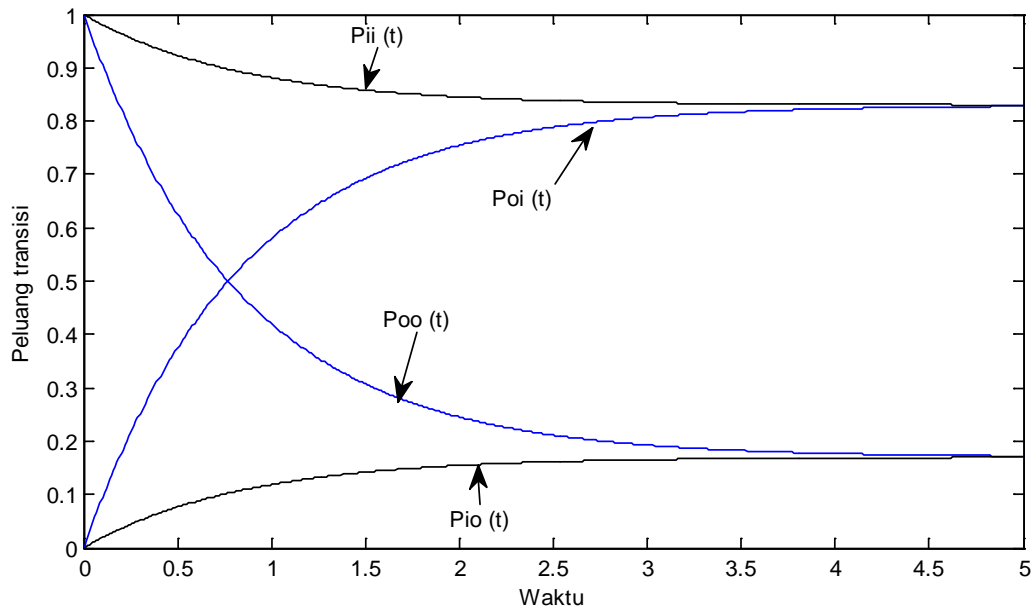
$$p_{10}^*(s) = \frac{0,2}{s(s+1,2)} = \frac{1}{6} \frac{1}{s} - \frac{1}{6} \frac{1}{s+1,2}, \text{ akibatnya } p_{10}(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-1,2t}.$$

$$p_{11}^*(s) = \frac{s+1}{s(s+1,2)} = \frac{1}{1,2} \frac{1}{s} + \frac{1}{6} \frac{1}{s+1,2}, \text{ akibatnya } p_{11}(t) = \frac{1}{1,2} + \frac{1}{6} e^{-1,2t}.$$

Akhirnya, didapat matriks peluang transisi

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Adapun gambarnya disajikan berikut ini<sup>[6]</sup>:



**Gambar 1.** Fungsi Peluang Transisi untuk Dua-State.

Jika dilakukan komputasi untuk  $t = 1$ , dihasilkan matriks peluang transisi

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 0,4200 & 0,5800 \\ 0,1188 & 0,8812 \end{bmatrix}.$$

### 3.2. Perhitungan menggunakan Matriks Eksponensial

Komputasi untuk suatu mesin dengan dua-state  $S = \{0,1\}$ . Pandang RMWK dua-state dengan matriks generator

Menentukan ... (Sudarno)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}.$$

Langkah awal matriks  $\mathbf{Q}$  dibuat *diagonalizable* sedemikian hingga

$$\mathbf{Q} = \mathbf{XDX}^{-1}.$$

Jika diambil matriks

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ 1,2 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \text{ maka diperoleh } \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Akibatnya dapat ditentukan matriks

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{bmatrix}.$$

Jika digantikan ke Persamaan 7 dihasilkan

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1,2t} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + e^{-1,2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Jika dilakukan komputasi untuk  $t = 1$ , didapat nilai-nilai peluang transisi:

$$p_{00}(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}e^{-1,2} = 0,418, \quad p_{01}(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-1,2} = 0,582,$$

$$p_{10}(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-1,2} = 0,116 \text{ dan } p_{11}(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}e^{-1,2} = 0,884.$$

Jika ditulis menjadi matriks peluang transisi adalah

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 0,4200 & 0,5800 \\ 0,1188 & 0,8812 \end{bmatrix}$$

yang hasilnya sama dengan matriks peluang transisi yang diperoleh menggunakan transformasi Laplace.

Jika dilakukan komputasi untuk beberapa nilai  $t$  pada fungsi peluang transisi diperoleh hasil<sup>[6]</sup>:

**Tabel 1.** Nilai Peluang Transisi untuk Beberapa Waktu

Peluang transisi	Waktu (jam)			
	1	6	12	24
$p_{00}$	0,4200	0,1706	0,1700	0,1700
$p_{01}$	0,5800	0,8294	0,8300	0,8300
$p_{10}$	0,1188	0,1699	0,1700	0,1700
$p_{11}$	0,8812	0,8301	0,8300	0,8300

Terlihat bahwa untuk waktu yang makin besar, nilai  $p_{00}$  sama dengan nilai  $p_{10}$  demikian pula nilai  $p_{01}$  sama dengan nilai  $p_{11}$ . Salah satu sifat dari matriks peluang transisi  $\mathbf{P}(t)$  di atas adalah untuk

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{1,2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{1,2} \end{bmatrix},$$

dimana artinya pada jangka panjang atau kondisi *steady-state*, *state* 0 berpeluang  $\frac{1}{6}$  atau 0,17, sedangkan *state* 1 berpeluang  $\frac{1}{1,2}$  atau 0,83. Hal ini persis seperti terlihat pada sifat dari Gambar 1.

Untuk perluasan dari kasus diatas, dikembangkan untuk komputasi pada suatu mesin dengan tiga-*state*  $S = \{0,1,2\}$ . Pandang RMWK tiga-*state* dengan matriks generator

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0,3 & -1,3 & 1 \\ 0 & 0,6 & -0,6 \end{bmatrix}$$

Langkah awal matriks  $\mathbf{Q}$  harus dibuat *diagonalizable* sedemikian hingga

$$\mathbf{Q} = \mathbf{XDX}^{-1}.$$

Jika diambil matriks

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0,6709 & -0,9637 & 0,5774 \\ 0,6829 & -0,1136 & 0,5774 \\ -0,2890 & 0,2416 & 0,5774 \end{bmatrix},$$

maka dapat dihasilkan invernya, yaitu matriks

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,2718 & 0,9221 & -0,6503 \\ -0,7435 & -0,2922 & 1,0357 \\ 0,1752 & 0,5838 & 0,9731 \end{bmatrix}.$$

Akibatnya dapat ditentukan matriks diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2,0179 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8821 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jika digantikan ke Persamaan 7, dihasilkan matriks

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{X} \begin{bmatrix} e^{-2,0179t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0,8821t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1}.$$

Sehingga diperoleh.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) = & \begin{bmatrix} 0,1824 & -0,6186 & 0,4363 \\ -0,1856 & 0,6297 & -0,4441 \\ 0,0786 & -0,2665 & 0,1879 \end{bmatrix} e^{-2,0179t} + \begin{bmatrix} 0,7165 & 0,2816 & -0,9981 \\ 0,0845 & 0,0332 & -0,1177 \\ -0,1796 & -0,0706 & 0,2502 \end{bmatrix} e^{-0,8821t} \\ & + \begin{bmatrix} 0,1012 & 0,3371 & 0,5619 \\ 0,1012 & 0,3371 & 0,5619 \\ 0,1012 & 0,3371 & 0,5619 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Berdasarkan matriks peluang transisi di atas, maka terdapat 9 model komponennya yang dapat ditentukan. Demikian pula, untuk nilai  $t$  tertentu akan diperoleh nilai prediksi yang dicari. Untuk nilai  $t$  yang makin besar menuju tidak terhingga didapat matriks peluang transisi pada keadaan *steady state*, yaitu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0,1012 & 0,3371 & 0,5619 \\ 0,1012 & 0,3371 & 0,5619 \\ 0,1012 & 0,3371 & 0,5619 \end{bmatrix},$$

yang mana artinya pada jangka panjang, *state* 0 berpeluang 0,1012, *state* 1 berpeluang 0,3371 dan *state* 2 berpeluang 0,5619.

### 3.3. Konstruksi Waktu Okupansi

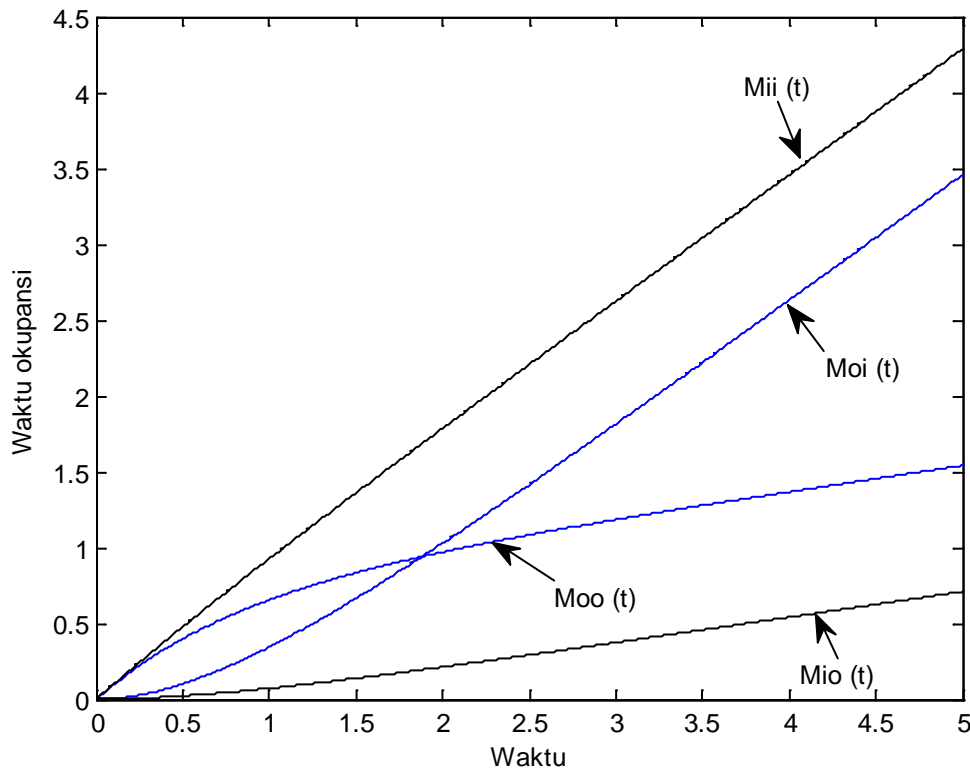
Pembuatan dilakukan untuk mesin dengan dua-*state*  $S = \{0, 1\}$ . Berdasarkan Persamaan 11, telah didapat matriks peluang transisi  $\mathbf{P}(t)$ . Sehingga berdasarkan Persamaan 10 dapat dikonstruksi matriks waktu okupansi, yaitu

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} M_{00}(t) &= 0,17t + 0,694 [1 - e^{-1,2t}], & M_{01}(t) &= 0,83t - 0,694 [1 - e^{-1,2t}], \\ M_{10}(t) &= 0,17t - 0,139 [1 - e^{-1,2t}], & M_{11}(t) &= 0,83t + 0,139 [1 - e^{-1,2t}], \end{aligned} \text{ untuk } t \geq 0.$$

Fungsi dari elemen matriks waktu okupansi dapat digambarkan sebagai berikut<sup>[6]</sup>:



**Gambar 2.** Fungsi Ekspektasi Waktu Okupansi untuk Dua-State

Terlihat bahwa makin besar nilai  $t$ , makin besar nilai waktu okupansinya. Sehingga waktu okupansi tidak mempunyai nilai tertentu (konstan) pada waktu *steady state*. Urutan kecepatan bertambahnya nilai waktu okupansi terhadap waktu adalah  $M_{11}$ ,  $M_{01}$ ,  $M_{00}$  baru  $M_{10}$ . Untuk pembuktian sampel beberapa nilai waktu ditabelkan di bawah ini:<sup>[6]</sup>

**Tabel 2.** Nilai Waktu Okupansi untuk Beberapa Waktu

Waktu okupansi (jam)	Waktu (jam)			
	1	6	12	24
$M_{00}$	0,6550	1,7135	2,7340	4,7740
$M_{01}$	0,3450	4,2865	9,2660	19,2260
$M_{10}$	0,0729	0,8811	1,9010	3,9410
$M_{11}$	0,9271	5,1189	10,0990	20,0590

Dengan cara yang sama untuk kasus tiga-state  $S = \{0,1,2\}$  akan diperoleh hasil yang identik.

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas hal-hal yang dapat disimpulkan adalah:

1. Untuk menentukan matriks peluang transisi dapat menggunakan transformasi Laplace dan matriks eksponensial, hasilnya akan sama.
2. Mencari matriks peluang transisi dengan menggunakan transformasi Laplace, bergantung pada invers dari selisih antara matriks identitas dengan matriks generator.
3. Mencari matriks peluang transisi dengan menggunakan matriks eksponensial, bergantung pada matriks generator yang *diagonalizable*.
4. Secara umum, metode transformasi Laplace lebih sulit dari pada metode matriks eksponensial.
5. Makin besar ukuran matriks generator, makin sulit menentukan matriks peluang transisinya, apabila menggunakan transformasi Laplace. Tetapi jika menggunakan metode matriks eksponensial ukuran matriks generator tidak menjadi masalah. Karena dalam mencari solusinya menggunakan program dari perangkat lunak MATLAB.
6. Untuk mengetahui ekspektasi waktu yang diperlukan dari satu *state* ke *state* lain menggunakan waktu okupansi. Waktu okupansi tidak mempunyai kondisi *steady state*.

#### DAFTAR PUSTAKA

1. Eslahchi, C., and Movahedi, F., Calculation of transition probability in birth and death Markov process in the epidemic model, *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, Volume 55, Issues 3 – 4: 810 – 815. URL: [www.elsevier.com/locate/jspi](http://www.elsevier.com/locate/jspi).
2. Fuller, L.E., *Basic Matrix Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
3. Gantmacher, F.R., *Matrix Theory*, Vols. I and II, Chelsea Publishing, NY, 1960.
4. Kurkani, V.G., *Modeling, Analysis, Design, and Control of Stochastic Systems*, Springer-Verlag, New York, 1999.
5. Kulkarni, V.G., *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, NY, 2010.
6. Moore, H., *MATLAB for Engineers*, Prentice Hall, New Jersey, 2007.
7. Ross, S.M., *Stochastic Processes*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

8. Ross, S.M., *Introduction to Probability Models*, Sixth Edition, Academic Press, New York, 1997.
9. Tattar, P.N. and Vaman, H.J., Testing transition probability matrix of a multi-state model with censored data, *Lifetime Data Analysis*, 2008, Volume 14, Issue 2: 216 – 230. URL: [www.springer.com/search?facet-discipline="statistics"](http://www.springer.com/search?facet-discipline=).
10. Tattar, P.N. and Vaman, H.J., The k-Sample problem in a multi state model and testing transition probability matrices, *Lifetime Data Analysis*, 2014, Volume 20, Issue 3: 387 – 403. URL: [www.springer.com/search?facet-discipline="statistics"](http://www.springer.com/search?facet-discipline=).
11. Winston, W.L., *Operations Research: Applications and Algorithms*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1987.